Math. P. 554 q /1

G G/13

DIE GEBILDE ERSTEN UND ZWEITEN GRADES DER LINIENGEOMETRIE IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG

VON

DR. RUDOLF STURM,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU.

I. THEIL.

DER LINEARE COMPLEX ODER DAS STRAHLENGEWINDE
UND
DER TETRAEDRALE COMPLEX.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.

298 F

Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

Bobek, Karl, Privatdocent für Mathematik im Allgemeinen, Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Nach den Vorträgen des Herrn C. Küpper bearbeitet. [VI u. 210 S.] gr. 8. 1889. geh. n. ℳ 4.80.

Disteli, Dr. **Martin,** Assistent am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich, die Steinerschen Schliefsungsprobleme nach darstellend geometrischer Methode. Mit 10 lithographierten Tafeln. [XII u. 124 S.] gr. 8. 1888. geh. n. ℳ 4.—

Dronke, Dr. **A.,** Direktor der Realschule I. O. zu Trier, die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise für die Prima höherer Lehranstalten. Mit Figuren im Text [IV u. 75 S.] gr. 8. 1881. geh. n. ℳ 2.—

Durège, Dr. **H.,** ordentlicher Professor an der Universität zu Prag. die ebenen Curven dritter Ordnung. Eine Zusammenstellung ihrer bekannteren Eigenschaften. Mit 44 Figuren in Holzschnitt. [XII u. 343 S.] gr. 8. 1871. geh. n. ℳ 7.20.

Fiedler, Dr. **Wilhelm,** Professor am Polytechnikum zu Zürich, Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme. Mit 16 lith. Tafeln. [XVI u. 264 S.] gr. 8. 1882. geh. n. ℳ 9.—

Fuhrmann, W., Oberlehrer an der Realschule auf der Burg in Königsberg/Ostpr., Einleitung in die neuere Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen und Gymnasien. Mit 4 lithographierten Figurentafeln. [IV u. 63 S.] gr. 8. 1881. geh. n. ℳ 1.60.

Geiser, Dr. **C. F.,** Docent am Schweizerischen Polytechnikum, Einleitung in die synthetische Geometrie. Ein Leitfaden beim Unterricht an höheren Realschulen und Gymnasien. Mit vielen Holzschnitten im Text. [VI u. 183 S.] gr. 8. 1869. geh. n. ℳ 3.—

Hankel, Dr. **Herm.,** weil. Professor in Tübingen, Vorlesungen über die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung. [VIII u. 256 S.] gr. 8. 1875. geh. n. ℳ 7.—

Henrici und **P. Treutlein,** Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. In drei Teilen. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. geh. n. ℳ 7.60.

Einzeln:

I. Teil. Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abbildung ohne Mafsänderung. Mit 193 Figuren in Holzschnitt. Zweite Auflage. [VIII u. 146 S.] 1891. n. ℳ 2.—

II. — Perspektivische Abbildung in der Ebene. Berechnung der planimetrischen Gröfsen. Pensum der Sekunda. [Nebst weiteren Ausführungen für Prima.] Mit 189 Figuren in Holzschnitt und einem [lithogr.] Kärtchen. [VIII u. 242 S.] 1882. n. ℳ 2.80.

III. — Lage und Gröfse der stereometrischen Gebilde. Abbildungen der Figuren einer Ebene auf eine zweite [Kegelschnitte]. Pensum für Prima. Mit 134 Figuren in Zinkographie. [VIII u. 194 S.] gr. 8. 1883. n. ℳ 2.80.

Müller, Dr. **Hubert,** Oberlehrer am Kaiserl. Lyceum in Metz, Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. Erster Theil, zweites Heft.

Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.

DIE

GEBILDE ERSTEN UND ZWEITEN GRADES

DER

LINIENGEOMETRIE

IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG

VON

Dr. RUDOLF STURM,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU.

I. THEIL.

DER LINEARE COMPLEX ODER DAS STRAHLENGEWINDE

UND

DER TETRAEDRALE COMPLEX.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1892.

69 G

Math. P. 554 g/1

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

DEM ANDENKEN

AN

HEINRICH SCHRÖTER

GEWIDMET

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede.

Seit dem Erscheinen der grundlegenden Schriften von Kummer und Plücker ist die Literatur über die Liniengeometrie bedeutend angewachsen, und es dürfte der Versuch einer zusammenfassenden Darstellung unserer Kenntnisse auf diesem Gebiete an der Zeit sein. Während mehrerer Jahre aber habe ich mich mit einer synthetischen Darstellung beschäftigt. Möchte das Ergebniss meiner Arbeit als würdige Ergänzung der synthetischen Lehrbücher meines Lehrers und Freundes Schröter, der uns am Anfange dieses Jahres leider durch einen frühen Tod entrissen worden ist, angesehen werden können und von ähnlichem Nutzen für das Studium der Geometrie werden.

Als ich die Abfassung meines Buches unternahm, glaubte ich es auch als Ergänzung von Reye's Geometrie der Lage ansehen zu dürfen, dessen zweite Abtheilung sehr werthvolle liniengeometrische Abschnitte, aber doch nur in engerem Rahmen, enthält. Wir haben jedoch nächstens die dritte Auflage dieser Abtheilung zu erwarten, in welcher sie in zwei Bände zerlegt wird und die liniengeometrischen Abschnitte jedenfalls viel umfangreicher sein werden.

Von den Strahlenörtern sind die der ersten Stufe, die Regelflächen, schon vor der Liniengeometrie Gegenstand der Untersuchung gewesen; mit denen der zweiten und dritten Stufe, den Congruenzen und den Complexen, hat uns erst die Liniengeometrie bekannt gemacht, und in Bezug auf sie hat sich die Forschung vorzugsweise im Gebiete des 1. und 2. Grades bewegt; was bei den Congruenzen dahin zu verstehen ist, dass eine der beiden Gradzahlen, die Ordnung oder Klasse, 1 oder 2 ist, während die andere höher sein kann.

Die Liniengeometrie 1. und 2. Grades gliedert sich von selbst in drei Theile, die Theorie der linearen Complexe und der durch solche Complexe gebildeten linearen Systeme, die Theorie der Strahlencongruenzen 1. und 2. Ordnung (oder Klasse) und die Theorie der Complexe 2. Grades.

In dieser Weise zerfällt auch mein Buch in drei Bände, von denen

BAYERISCHE STAATS BIBLIOTHEK MÜNCHEN

die beiden ersten nunmehr veröffentlicht werden; die Abfassung und Veröffentlichung des dritten wird durch meine Uebersiedelung nach Breslau und das Einleben in neue Verhältnisse wohl etwas verzögert werden:

Eine Abweichung von der obigen Eintheilung hat dadurch stattgefunden, dass die lineare Congruenz und der tetraedrale Complex schon im ersten Bande behandelt werden, jene wegen ihrer engen Verbindung mit dem linearen Complexe, dieser, weil er bei den Congruenzen 2. Ordnung als bekannt vorausgesetzt werden muss.

Hinsichtlich der Vorkenntnisse glaube ich, dass, wer mit Schröter's beiden älteren Büchern, der Theorie der Kegelschnitte und der Theorie der Oberflächen 2. Ordnung, und mit Reye's Geometrie der Lage (in den bisherigen Auflagen) vertraut ist und die allgemeinsten Sätze über höhere Curven kennt, den ersten Band verstehen wird; über den zweiten werde ich mich in dessen Vorrede äussern.

Ich beziehe mich auch an einigen Stellen auf Schubert's Kalkül der abzählenden Geometrie und will damit vor allem auf dieses hervorragende, immer noch nicht genug bekannte Buch hinweisen, aus welchem der Geometer viel lernen kann, insbesondere über die Mannigfaltigkeit der Raumgebilde und die Vielfachheit der Bedingungen, über welche selbst in angesehenen Schriften sich Irrthümer finden. Der Kundige wird den Einfluss des Schubert'schen Werkes auf mein Buch nicht verkennen; dankbar für die vielen Anregungen, die ich aus ihm empfangen, hebe ich ihn selbst hervor. Ich benutze aus ihm — ausser dem Princip von der Erhaltung der Anzahl — vorzugsweise den Begriff der Charakteristiken eines Systems von Curven oder Flächen 2. Grades und die Schreibweise der vielfachen Charakteristiken als symbolische Producte von einfachen.

Ich habe mir erlaubt, in diesem Buche folgende neue Benennungen: Strahlengewinde, Strahlengebüsche (oder kurz: Gewinde, Gebüsche), Strahlennetz, windschiefe Involution für die längeren unbequemen Namen: linearer Complex, specieller linearer Complex, lineare Congruenz, geschaart-involutorisches System (oder Collineation) einzuführen, und hoffe, dass diese Neuerung, welche mit mancherlei sprachlichen Vortheilen verbunden ist, für berechtigt gehalten werde. Die drei ersten haben den Beifall einiger Fachgenossen gefunden; die letzte ist der Sprache der italienischen Geometer entlehnt.

Breslau, im Juni 1892.

Inhalt.

Einleitende Betrachtungen.

Grundgebilde und Oerter der Liniengeometrie.

Seite

1, 2. Definition der Liniengeometrie; vierfache Unendlichkeit der Geraden; Grundgebilde . 1
3, 4. Ein- bis vierfache Bedingungen für die Gerade; die beiden Treffgeraden von 4 Geraden . 3
5—7. Die Strahlenörter 3., 2., 1. Stufe; ihr Grad; Beispiele 6
8, 9. Die Treffgeraden von 3, bezw. 4 Curven 11
10. Die Regelschaar und ihre Ausartungen 12
11. Die vierfach unendliche Mannigfaltigkeit der Kugeln 15

Mehrdeutige Correspondenzen. Gemeinsame Strahlen von Strahlenörtern.

I.

12—17. Allgemeine Correspondenzen $[n, n_1]$; Chasles' Correspondenz-Princip 16
18—23. Involutorische Correspondenzen $[n]$; Charakteristiken-Formeln für Kegelschnitte und Flächen 2. Grades; Involution n^{ten} Grades. . . . 23
24—31. Cyklische involutorische Correspondenzen; Poncelet'sche Polygone . 30

II.

32, 33. Correspondenz-Principe im Punktfelde und im Punktraume 38
34—36. Gemeinsame Strahlen von Strahlenörtern, insbesondere Halphen's Satz . 41
37. Correspondenz-Princip im Strahlenraume 44

Die Regelflächen dritten und vierten Grades.

38. Allgemeine Bemerkungen . 48
39. Die beiden Arten der cubischen Regelflächen 49
40. Die beiden Arten der Regelflächen 4. Grades mit einer Doppellinie 2. Ordnung . 52

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Seite

41—43. Die 6 Arten der Regelflächen 4. Grades mit einer Doppelcurve 3. Ordnung 54
44—46. Die 4 Arten der Regelflächen 4. Grades mit einer dreifachen Geraden 58

Der lineare Complex und die linearen Systeme von linearen Complexen.

Der lineare Complex oder das Strahlengewinde.

I.

47, 48. Das Nullsystem und der lineare Complex seiner Leitstrahlen; Polaren, Durchmesser, Axe, Regelschaaren 62
49, 50. Zwei Möbius'sche Tetraeder 66
51—53. Bestimmung des Nullsystems; fünffache Unendlichkeit 71
54, 55. Specialfall und Beispiele in der Mechanik 75

II.

56. Höhere Nullsysteme 78

III.

57. Jeder lineare Complex gehört zu einem Nullsysteme; Polaren . . . 81
58. Strahlennetze, Regelschaaren, Regelflächen 3. und 4. Grades im linearen Complexe; gemeinsame Strahlen; fünffache Unendlichkeit des linearen Complexes 83
59. Das Strahlengebüsche als Specialfall 85

IV.

60, 61. Durchmesser, Axe; Axe beim Gebüsche 87
62—64. Die Windungs-Eigenschaften des linearen Complexes; Parameter; Einführung des Namens „Gewinde“ 89
65—70. Sätze über zwei polare Geraden; der Parameter eines Durchmessers; das Gewinde als Ort gegebenen Momenten-Verhältnisses 95

V.

71, 72. Die Chasles'sche und die Sylvester'sche Erzeugung des Gewindes . 102
73, 74. Die Regelschaar durch 3 Strahlen eines Gewindes; Büschel und Netze von Gewinden, zu denen Sylvester's Erzeugung führt; Construction des Gewindes aus 5 Strahlen 106
75. Ein Gewinde bei der allgemeinen räumlichen Correlation 109

Die lineare Congruenz oder das Strahlennetz und der Büschel von Gewinden.

I.

76—78. Collineare Ebenenbündel und Punktfelder beim Strahlennetze; die Leitgeraden; Regelschaar durch 3 Strahlen eines Strahlennetzes . 110

Seite

79. Quadratische Verwandtschaft beim Strahlennetze 113
80. Construction des Netzes aus 4 Strahlen; das Netz durch 4 Strahlen eines Gewindes . 114
81—84. Die Collineationen mit Axen, die windschiefe Involution, die mit einem Strahlennetze verbunden sind 114
85—87. Das Strahlennetz mit imaginären Leitgeraden 118

II.

88—90. Achtfache Unendlichkeit des Strahlennetzes; Grundbedingungen. 123
91—93. Construction des Netzes aus 4 Strahlen durch Regelschaaren, des Gewindes aus 5 Strahlen durch Regelschaaren oder Netze. . . . 126
94—97. Eindeutige Abbildung des Strahlennetzes auf eine Ebene oder Fläche 2. Grades; Correspondenz-Princip im Strahlennetze; collineare Strahlennetze . 129
98. Sätze über gemeinsame Strahlen 134

III.

99—101. Die Schnittcongruenz zweier Gewinde; weitere Gewinde durch sie: der Büschel von Gewinden 135
102. Die zu zwei Gewinden gehörige Collineation mit Axen; zwei Gewinde in Involution . 139
103—105. Projective Beziehbarkeit des Büschels; Constituenten; die beiden Gebüsche in ihm; die Regelschaar der Polaren einer Geraden . . 141
106—108. Eigenschaften von zwei Gewinden in Involution 144
109. Die Invariante und das Moment zweier Gewinde 147

IV.

110, 111. Hauptstrahl eines Strahlennetzes; cubische Regelfläche der Axen der Gewinde eines Büschels; Grenzaxen, Hauptebenen. 149
112, 113. Beziehung zwischen zwei die Lage einer Axe des Büschels bestimmenden Grössen; das zu einer Axe gehörige gleichseitige Paraboloid im Netze . 152
114. Die dem Hauptstrahle unendlich nahen Strahlen des Netzes; seine Brennpunkte und Brennebenen 154
115—117. Das Dichtigkeitsmass des Hauptstrahls in einem seiner Punkte . 156
118—120. Ausdruck für den Parameter eines Gewindes des Büschels; die charakteristische Curve des Büschels 161

V.

121—123. Ein gleichseitiges Paraboloid, eine Involution in der Regelfläche der Axen und ein Complex 2. Grades sind mit jedem Strahlennetze und dann mit ∞^1 verbunden 167
124. Fusspunktenfläche eines Strahlennetzes. 173
125. Ausartungen der Regelfläche der Axen 174

Die linearen Systeme zweiter und dritter Stufe (Netz und Gebüsche) von Strahlengewinden.

I.

Seite

126, 127. Gemeinsame Regelschaar dreier Gewinde und eines Netzes von Gewinden; Ort der Axen der Gebüsche des Netzes; Herstellung des Netzes vermittelst der Sylvester'schen Erzeugungsweise . . . 175
128—130. Büschel im Netze; gemeinsame Gewinde; Constituenten; der Inbegriff aller Gewinde durch eine Regelschaar; das Strahlennetz der Polaren einer Geraden 178
131, 132. Zwei Gewinde-Netze in Involution; Gruppen von Gewinden in Involution. 180
133. Das Polarsystem der Trägerfläche der Grund-Regelschaar 182
134—136. Die Congruenz der Axen der Gewinde eines Netzes. 183

II.

137, 138. Die gemeinsamen Geraden von 4 Gewinden; Herstellung des durch sie constituirten Gebüsches S_3 von Gewinden vermittelst der Sylvester'schen Erzeugung 186
139. Büschel und Netze in S_3; gemeinsame Gewinde 189
140, 141. Analogie des Gebüsches mit dem Punktraume und collineare Beziehung auf ihn . 190
142, 143. Herstellung von S_3 durch Büschel und Netze; das Gewinde der Polaren einer Geraden; die Gewinde des Gebüsches durch 1, bezw. 2 Gerade . 192
144. Der Büschel von Gewinden, der zu einem S_3 in Involution ist, und das Strahlennetz der Axen der Gebüsche in S_3 193
145. Die Grund-Regelschaar eines Netzes kann imaginär sein 194
146. Der Complex 2. Grades der Axen der Gewinde eines S_3 195

Das lineare System vierter Stufe (Gewebe) von Gewinden und der Inbegriff aller Gewinde.

I.

147, 148. Herstellung eines Gewebes S_4 von Gewinden; Gewinde der Axen der Strahlengebüsche des Gewebes; Büschel, Netze, Gebüsche in S_4 197
149, 150. Gewinde eines S_4 durch gegebene Geraden; gemeinsame Gewinde 199
151. Allgemeiner Satz über die Mannigfaltigkeit der verschiedenen linearen Systeme von Gewinden in einem höherstufigen linearen Systeme. 201
152. Das Gewinde, das zu einem Systeme S_4 in Involution ist 202
153, 154. Eindeutige Abbildung eines S_4 in den Strahlenraum vermittelst der Polaren einer gegebenen Geraden 203
155. Collineare Beziehung eines Gewebes. 206

II.

156. Der Inbegriff aller Gewinde; gemeinsame Gewinde linearer Systeme. 207

Seite

157. Höherstufige lineare Systeme von Gewinden durch ein gegebenes System; das quadratische System 4. Stufe der Strahlengebüsche . 209
158. Collineare Beziehung des Inbegriffs aller Gewinde 211

Erzeugnisse zweier oder mehrerer linearer Systeme von Gewinden, welche collinear sind.

159, 160. Das Erzeugniss zweier projectiver Büschel von Gewinden, ein Complex 2. Grades . 211
161, 162. Die Erzeugnisse von 3 Netzen, 4 Gebüschen, 5 Geweben, 6 Räumen von Gewinden, welche collinear sind 214
163—165. Die Congruenz 3. Grades, welche durch 3 projective Büschel oder 2 collineare Netze von Gewinden erzeugt wird 215
166, 167. Vier andere Congruenzen . 221

Orthogonale Gewinde.

168, 169. Definition orthogonaler Gewinde; mehrfach und vollkommen orthogonale lineare Systeme . 223
170—172. Perpendiculäre Büschel; Büschel, die auf zwei Büscheln, Netzen, Gebüschen oder Geweben zugleich perpendiculär sind 226
173. Perpendiculäre Netze . 231
174. Die zu sich selbst orthogonalen Gewinde; Entfernungen von Gewinden und linearen Systemen 232

Die Gruppen von zwei bis sechs Gewinden, welche gegenseitig in Involution sind.

175. Involutorische und vertauschbare eindeutige Transformationen . . 234
176, 177. Zwei Gewinde in Involution 235
178—181. Drei Gewinde in Involution 237
182—184. Vier Gewinde in Involution 240
185. Die Gruppe von 32 linearen Transformationen bei sechs Gewinden in Involution . 242
186, 187. Die Leitgeraden-Paare der Schnitt-Strahlennetze und ihre Tetraeder . 243
188—192. Figuren von 16 Punkten und 16 Ebenen, von 32 Geraden 245
193, 194. Art der Windung und Realität bei sechs Gewinden in Involution 249

Das Gebüsche der Trägerflächen der Regelschaaren eines Strahlennetzes.

195, 196. Büschel, Ebenenpaare, Charakteristiken, Netze dieses Systems . . 252
197, 198. Die Leitschaaren der Regelschaaren; collineare Beziehung des Gebüsches auf den Punktraum 256

Abbildung des Strahlengewindes in den Punktraum.

199—201. Einzweideutige Abbildung des Strahlengewindes in den Punktraum . 257

Seite

202—205. Eindeutige Abbildung; Hauptstrahl, Hauptcurve; Bilder der Strahlenbüschel; einfachere Herstellung der Abbildung 261
206. Uebertragung des Correspondenz-Princips im Punktraume auf das Strahlengewinde . 267
207, 208. Abbildung des Strahlengebüsches; zerfallende Hauptcurve. . . . 269

Abbildung des Strahlenraums in lineare Systeme vierter Stufe.

209—212. Einzweideutige Abbildung des Strahlenraums in das lineare System 4. Stufe der Flächen 2. Grades, welche durch die Hauptcurve gehen . 272
213—217. Eindeutige Abbildung; Ausnahmen von der Eindeutigkeit; einfachere Herstellung . 277
218—221. Eindeutige Abbildung in den linearen Punktraum von 4 Dimensionen . 285

Abbildung des Strahlenraums in ein quadratisches Kegelschnitt-System vierter Stufe und aller Gewinde in die Kegelschnitte einer Ebene.

222—225. Erste Abbildung der Gewinde in die Kegelschnitte einer Ebene, bei welcher die Gebüsche Kegelschnitten entsprechen, die den Tangentendreiecken eines festen Kegelschnitts umgeschrieben sind 291
226, 227. Zweite, duale Abbildung . 296

Das System sechster Stufe der Regelschaaren in einem Strahlengewinde.

228. Dreh-Regelschaaren . 300
229—233. Grundbedingungen; Strahlenbüschel-Paare; Doppel-Büschel; Charakteristiken des Systems der Trägerflächen 301

Collineationen und Correlationen, welche ein Gewinde in sich selbst überführen.

234—236. Untersuchung, ob eine beliebige Collineation oder Correlation ein Gewinde in sich transformirt; Analogie und Zusammenhang mit ähnlichen Sätzen bei Flächen 2. Grades 307
237. Mannigfaltigkeit der linearen Transformationen, die ein gegebenes Gewinde in sich überführen. 312
238. Strahlennetze im Gewinde, die auch in sich übergehen 313
239—242. Specielle Collineationen und Correlationen: Polarsysteme, Nullsysteme, windschiefe Involutionen, u. s. w. 313

Das zu einer cubischen Raumcurve gehörige Strahlengewinde.

243. Definition; jeder Strahl des Gewindes ist für die 4 Tangenten der Raumcurve, welche er trifft, einzige Treffgerade 319
244—247. Der Wurf der Berührungspunkte von 4 solchen Tangenten und derjenige der 4 Treffpunkte sind äqui-anharmonisch 320

Seite

248—249. Jedem Punktquadrupel auf der Raumcurve sind ein Gewinde und ∞^3 andere Punktquadrupel zugeordnet; lineare Systeme von Punktquadrupeln und die zugeordneten Systeme 326
250. Tetraeder, die einer cubischen Raumcurve ein-, einer andern umgeschrieben sind . 328
251. Zu jedem Gewinde gehören ∞^7 cubische Raumcurven 330

Der tetraedrale oder Reye'sche Complex.

I.

252, 253. Definition desselben; singuläre Punkte und Ebenen; im Complex enthaltene Strahlennetze 333
254, 255. Regelschaaren, Sehnen- und Axen-Congruenzen von cubischen Raumcurven im Complexe; Herstellung des Complexes vermittelst eines speciellen Flächennetzes 2. Ordnung 334
256. Strahlenbüschel des Complexes 337
257—259. Erzeugung des Complexes durch zwei projective Strahlenbüschel, durch ein Punktfeld und einen Strahlenbündel, die collinear sind 338

II.

260, 261. Erzeugung des Complexes durch zwei collineare Räume; Invarianten einer Collineation . 342
262, 263. Entstehung der Regelschaaren, der Sehnen- und Axen-Congruenzen; Charakteristiken der Systeme der Trägerflächen der Regelschaaren . 344
264—267. Systeme von Collineationen, welche den nämlichen Complex erzeugen; Ausartungen erster und zweiter Ordnung. 347
268, 269. Linearer Complex projectiver Ebenenbüschel und Büschel collinearer Ebenen-Räume; Oerter von Elementen, die sich in diesen Räumen entsprechen . 353
270—272. Projective Ebenenbüschel nach 5, 6, 7 Punkten; der Büschel collinearer Punkt-Räume; zwei weitere Erzeugungen. 357

III.

273, 274. Der Complex der Wechselstrahlen einer Correlation; der Complex der Tangenten der cubischen Raumcurven mit gemeinsamem Schmiegungstetraeder . 360
275, 276. Der Axen-Complex einer Fläche 2. Grades; der Complex der Strahlen gleicher Entfernung von 2 Punkten 362
277. Ausartungen des tetraedralen Complexes. 365

IV.

278, 279. Eindeutige Abbildung des Complexes in den Ebenen- oder Punkt-Raum. 367
280. Bilder der Complexkegel, Complexcurven, der Strahlenbüschel; Ausnahmen von der Eindeutigkeit. 369
281—283. Bilder von Congruenzen im Complexe; Congruenzen, die sich in Flächen 2. Grades abbilden; die Normalen-Congruenz einer Fläche 2. Grades . 371

Seite

284, 285. Bilder von Regelflächen im Complexe; Regelflächen 4. und 3. Grades . 375

V.

286—288. Collineationen und Correlationen, durch welche ein gegebener tetraedraler Complex in sich selbst übergeht 378

Zusätze . 383

Wortverzeichniss . 384

Einleitende Betrachtungen.

Grundgebilde und Oerter der Liniengeometrie.

Bis in die ersten Jahrzehnte unseres Jahrhunderts hat man in 1
der Geometrie den Punkt allein als Grundelement der Betrachtung angesehen. Die zwanziger Jahre brachten dann die Erkenntniss des Princips der Dualität, dessen Entdeckung und Begründung wir Poncelet, Gergonne, Möbius, Plücker und Steiner zu verdanken haben.

Neben die Geometrie des Punktes trat, völlig gleichberechtigt mit ihr, eine Geometrie, in welcher die Ebene das Grundelement der Betrachtung ist.

Ausser diesen Elementen besitzt die Geometrie ein drittes von gleicher Einfachheit, *die gerade Linie.* Bei allen dualen Transformationen geht sie in sich selbst über, jedoch so, dass, wenn sie in der einen von zwei dualen Betrachtungen vorzugsweise als Verbindungslinie von Punkten angesehen wird, sie in der andern als Schnittlinie von Ebenen aufgefasst wird.

Dies dritte Element weist auf *eine dritte Geometrie* hin, *in der* also *die Gerade das Grundelement ist.* Definitiv eingeführt wurde sie durch Plücker's Werk, mit dem er am Schlusse seines Lebens wieder zur Mathematik zurückkehrte: Neue Geometrie des Raumes, begründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement (Leipzig, 1868—69).

Doch sind dieser Schrift mehrere andere vorangegangen oder mindestens mit ihr gleichzeitig, welche die Liniengeometrie vorbereitet haben oder ihr angehören: Grassmann's Ausdehnungslehre aus dem Jahre 1844 und ihre 1862 erschienene Umarbeitung, dann Abhandlungen von Cayley und Sylvester, einige vorläufige Mittheilungen von Plücker selbst, Kummer's grosse Abhandlung von 1866 über algebraische Strahlensysteme (oder Strahlencongruenzen nach Plücker's Terminologie), einige Aufsätze von Battaglini.

Zwischen den beiden Geometrien, welche den Punkt oder die 2
Ebene zum Grundelemente haben, und der Geometrie der geraden

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Linie findet *ein fundamentaler Unterschied* statt, der darauf beruht, dass der Punkt und die Ebene einerseits, die Gerade andererseits nicht gleich grosse Mannigfaltigkeit im Raume haben.

Es giebt im Raume ∞^3 *Punkte und* ∞^3 *Ebenen, aber* ∞^4 *Geraden.* Wir wollen uns diese höhere Mannigfaltigkeit der Geraden im Raume, welche der Liniengeometrie eine grössere Reichhaltigkeit giebt, auf verschiedene Weisen klar machen.

Die ∞^2 Strahlen eines Strahlenbündels mit eigentlichem (endlichem) Scheitel geben alle möglichen Richtungen im Raume. Zu jedem giebt es ∞^2 Parallele, die wir uns am besten aus allen Punkten einer den Strahl schneidenden Ebene gezogen denken. Es findet keine Wiederholung statt und andererseits gelangen wir so zu allen Geraden des Raumes, also ist ihre Zahl $\infty^2 \times \infty^2$ oder ∞^4.

Oder allgemeiner und ohne eine metrische Eigenschaft, wie den Parallelismus, zu benutzen, verbinden wir alle ∞^2 Punkte der einen von zwei beliebigen, aber festen Ebenen — im Vorangehenden war die eine die unendlich ferne — mit allen ∞^2 der andern und erhalten alle Geraden des Raumes und zwar jede im allgemeinen*) nur einmal.

Wir können, dual, auch alle ∞^2 Ebenen eines Bündels mit allen eines andern schneiden.

Wollen wir, was lehrreicher ist, durch alle 4 Stufen aufsteigen, so lassen wir zuerst einen Strahl einen Strahlenbüschel (X, $\mathfrak{x}$) durchlaufen, dann bewegen wir, den Scheitel festhaltend, die Ebene des Büschels um eine durch den Scheitel gehende Gerade, auf welcher wir darauf den Scheitel gleiten lassen, welche beiden Operationen wir auch, dual, in umgekehrter Reihenfolge vornehmen können; endlich lassen wir diese Gerade noch durch einen Strahlenbüschel (S, σ) sich bewegen.

Wir erhalten so nach und nach:

1) einen Strahlenbüschel mit ∞^1 Strahlen,

2) ∞^1 Strahlenbüschel mit ∞^2 Strahlen, welche einen Bündel oder ein Feld von Strahlen erfüllen,

3) ∞^2 Strahlenbüschel oder ∞^1 Strahlenbündel, bezw. Strahlenfelder mit ∞^3 Strahlen, welche alle eine feste Gerade treffen,

4) ∞^1 solche Strahlenmannigfaltigkeiten, wie die vorhergehende Stufe eine ergab, und damit ∞^2 Strahlenbündel oder Strahlenfelder, ∞^3 Strahlenbüschel mit ∞^4 Strahlen.

*) Je ∞^1-mal ergiebt sich jede Gerade der beiden festen Ebenen; das hat aber auf die Mannigfaltigkeit aller Geraden keinen Einfluss; der Grad derselben würde nur dann zu erniedrigen sein, wenn *jede* Gerade bei der beschriebenen Construction sich ∞^1- oder allgemeiner ∞^α-mal ergäbe.

Jeder Strahl des Raumes ergiebt sich dabei und zwar im allgemeinen einmal; denn er schneidet einen bestimmten Strahl des Büschels (S, σ) und legt mit diesem den erzeugenden Strahlenbüschel (X, $\mathfrak{x}$) fest, in dem er sich befindet.*)

Der Strahlenmannigfaltigkeit 3. Stufe 3), *dem Inbegriffe aller* ∞^3 *Strahlen, welche eine feste Gerade treffen*, wollen wir einen kurzen Namen geben, den sie bisher noch nicht gehabt hat, dessen sie aber als ein Grundgebilde der Liniengeometrie bedarf: *Strahlengebüsche;* die feste Gerade heisst seine *Axe, Treff- oder Leitgerade.*

Somit haben wir im Strahlenraume 5 Grundgebilde:

1) das Grundgebilde 1. Stufe oder mit ∞^1 Strahlen:

den Strahlenbüschel,

alle Strahlen in einer Ebene durch einen Punkt derselben,

2) zwei zu einander duale Grundgebilde 2. Stufe mit ∞^2 Strahlen:

den Strahlenbündel,

alle Strahlen durch einen Punkt,

und

das Strahlenfeld,

alle Strahlen in einer Ebene,

3) das Grundgebilde 3. Stufe oder mit ∞^3 Strahlen:

das Strahlengebüsche,

alle Strahlen, welche eine feste Gerade treffen,

4) das Grundgebilde 4. Stufe oder mit ∞^4 Strahlen:

den Strahlenraum

selbst.

Jede der beiden andern Geometrien hat nur 3 Grundgebilde:

Punktreihe, Punktfeld, Punktraum,

bezw.

Ebenenbüschel, Ebenenbündel, Ebenenraum.

Für einen Strahl ist eine Bedingung eine α*-fache, wenn ihr durch* 3
$\infty^{4-\alpha}$ *Strahlen genügt wird.*

Danach ist das Treffen oder die Incidenz mit einer gegebenen Geraden eine einfache Bedingung, das Hindurchgehen durch einen gegebenen Punkt, bezw. das Hineinfallen in eine gegebene Ebene oder die Incidenz mit einem gegebenen Punkte, einer gegebenen Ebene eine zweifache, die Zugehörigkeit zu einem gegebenen Strahlenbüschel eine dreifache Bedingung.

*) Während wir zu allen Strahlen des Raumes gelangt sind, haben wir nicht alle Strahlenbündel, Strahlenfelder und Strahlenbüschel erhalten, sondern nur diejenigen Bündel, deren Scheitel in σ liegt, diejenigen Felder, deren Ebene durch S geht, und diejenigen Büschel, deren Scheitel und Ebene beides thun. Insgesammt enthält der Raum ∞^3 Strahlenbündel oder -felder und ∞^5 Strahlenbüschel.

Diese Bedingungen wollen wir die *Grundbedingungen* für die Gerade nennen.

Weitere *einfache Bedingungen* sind: eine gegebene Curve zu treffen, eine gegebene Fläche zu berühren, mit einer gegebenen Geraden oder mit einer gegebenen Ebene einen gegebenen Winkel zu bilden; ferner, dass die Gerade sich mit zwei bestimmten Punkten in gegebenen Ebenen oder Flächen bewege, dass sie gleiche Entfernung oder gegebenes Verhältniss der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten habe, u. s. w.

Zweifache Bedingungen sind: die zweimalige Begegnung mit einer gegebenen Curve, die zweimalige Berührung, sowie die dreipunktige Berührung (Osculation) mit einer gegebenen Fläche, der Parallelismus mit einer gegebenen Geraden*), die Normalität zu einer gegebenen Ebene oder Fläche, der Schnitt mit einer gegebenen Geraden oder Curve unter gegebenem Winkel, die Forderung, dass drei bestimmte Punkte der Geraden sich in drei gegebenen Ebenen oder Flächen, oder dass ein bestimmter Punkt auf einer gegebenen Geraden oder Curve, ein anderer auf einer gegebenen Ebene oder Fläche sich bewege, u. s. w.

Dreifache Bedingungen sind: Berührung mit einer gegebenen Curve, dreimalige Begegnung mit derselben, dreimalige Berührung mit einer gegebenen Fläche, Osculation mit derselben und gleichzeitig gemeine Berührung an anderer Stelle, vierpunktige Berührung mit ihr, Schnitt mit einer gegebenen Geraden oder Curve in gegebenem Punkte unter gegebenem Winkel, die Vorschrift, dass zwei bestimmte Punkte der Geraden sich auf gegebenen Geraden oder Curven bewegen, u. s. w.

Vierfache Bedingungen sind: Berührung mit einer gegebenen Curve und gleichzeitiger Schnitt an einer andern Stelle, viermaliger Schnitt mit ihr, fünfpunktige Berührung mit einer gegebenen Fläche, zweimalige Osculation und dergl.

4 *Eine vierfache Bedingung oder allgemeiner mehrere Bedingungen, deren Vielfachensumme 4 ist, werden durch eine endliche Zahl von Geraden erfüllt.*

So giebt es z. B. eine endliche Zahl von Geraden, welche

1) durch zwei gegebene Punkte gehen,

2) in zwei gegebene Ebenen fallen,

*) Parallel zu einer Geraden sind ∞^2, den Winkel 0 aber bilden mit ihr ∞^3, nämlich alle, welche die eine oder die andere von den beiden Geraden treffen, die vom unendlich fernen Punkte der gegebenen Geraden tangential an den unendlich fernen Kugelkreis kommen. Ebenso giebt es ∞^2 Gerade, die zu einer Ebene normal sind, und ∞^3, die mit ihr den Winkel $\frac{\pi}{2}$ bilden.

3) durch einen gegebenen Punkt gehen und in eine gegebene Ebene fallen,

4) durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei gegebene Geraden treffen,

5) in eine gegebene Ebene fallen und zwei gegebene Geraden treffen,

6) eine gegebene Gerade treffen und einem gegebenen Strahlenbüschel angehören,

7) *4 gegebene Geraden treffen.*

In den Fällen 1), 2), 4), 5), 6) ist diese Zahl 1. Bemerkenswerth ist, dass den beiden Bedingungen von 3) bei beliebiger Lage von Punkt und Ebene, d. h. wenn sie nicht incident sind, nicht zugleich genügt werden kann oder, anders ausgedrückt, durch 0 Strahlen genügt wird.

Nicht so einfach ist die Beantwortung von 7).

Die Ermittelung der Anzahl und die Construction der betreffenden Geraden ist eine berühmte Aufgabe. Gergonne hat sie in den zwanziger Jahren gestellt.*) Unter den Geometern, die sich mit ihr beschäftigten, hat Steiner die bei weitem einfachste Lösung gegeben.**)

Wenn u_1, u_2, u_3, u_4 die gegebenen Geraden sind, so lasse man auf u_1 einen Punkt X_1 sich bewegen, die Ebenen ξ_2, ξ_3, die ihn je mit u_2, u_3 verbinden, beschreiben zwei Ebenenbüschel, welche beide mit der Punktreihe der X_1 perspectiv, also unter einander projectiv sind; die Schnittlinien entsprechender Ebenen sind je die von X_1 kommenden Geraden, welche u_2, u_3 treffen. Wir erhalten so *die* ∞^1 *Geraden, welche* u_1, u_2, u_3 *zugleich schneiden;* sie bilden, wie bekannt, eine *Regelschaar*, d. h. die eine Geradenschaar eines einmanteligen Hyperboloids, zu dessen anderer Schaar — *Leitschaar* — die u_1, u_2, u_3 gehören. Die beiden projectiven Ebenenbüschel der ξ_2 und ξ_3 rufen auf der vierten Geraden u_4 zwei conjective Punktreihen***) hervor. Wenn nun eine Gerade der Regelschaar auch u_4 trifft, so müssen die beiden Ebenen ξ_2 und ξ_3, die in ihr sich schneiden, u_4 in dem nämlichen Punkte treffen, der also ein sich selbst entsprechender Punkt der beiden conjectiven Punktreihen ist. Weil es deren zwei giebt,

*) In seinen Annales de Mathématiques Bd. 17 S. 83.

**) Journal für Mathematik Bd. 2 S. 268; Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten (Berlin 1832) S. 243; Gesammelte Werke Bd. 1 S. 147, 402. Vergl. auch Schröter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung (Leipzig 1880) § 14.

***) Ich nenne, mit H. Pfaff, zwei projective gleichartige Gebilde *conjectiv*, wenn sie denselben Träger haben.

— welche die Schnitte des Hyperboloids mit u_4 sind —, so haben wir zwei (reelle oder conjugirt imaginäre) Geraden, welche den vier Bedingungen 7) genügen.

Es giebt mithin zwei Gerade, welche 4 gegebene Geraden zugleich treffen (Steiner's Satz).

Die Construction dieser beiden Geraden ist folglich zurückgeführt auf die gleichfalls berühmte und auch von Steiner zuerst gelöste Aufgabe: die sich selbst entsprechenden Punkte zweier conjectiven Punktreihen zu finden.*)

Unsere in sich duale Aufgabe kann man natürlich auch dual lösen, indem man um u_1 eine Ebene ξ_1 dreht, welche je u_2, u_3 in X_2, X_3 schneidet, u. s. w.

Unmittelbar anzugeben sind die beiden Geraden in dem Specialfalle, dass zwei Gerade, z. B. u_1 und u_2, sich schneiden, und noch einfacher, wenn auch u_3, u_4 es thun.

Die vorliegende Aufgabe ist das liniengeometrische Analogon zu den Aufgaben der beiden andern Geometrien: den gemeinsamen Punkt dreier Ebenen oder Felder, die gemeinsame Ebene dreier Punkte oder Bündel zu finden.

Während diese aber nur eine Lösung haben, hat sie zwei; und das ist ein fundamentaler Unterschied, der sich fortwährend zu erkennen geben wird: *der Liniengeometrie ist dadurch der Charakter des Quadratischen aufgedrückt.*

5 Während in den beiden Geometrien, welche den Punkt, bezw. die Ebene zu Grundelementen haben, nur Oerter 1. und 2. Stufe für diese Elemente möglich sind, *treten in der Liniengeometrie Oerter 1., 2., 3. Stufe auf.*

Alle Strahlen, welche einer einfachen Bedingung genügen, bilden einen Strahlenort 3. Stufe, der nach Plücker's Vorschlag *Complex* genannt wird.

Sämmtliche ∞^2 Strahlen, welche einer zweifachen oder zwei einfachen Bedingungen genügen, erzeugen einen Strahlenort 2. Stufe, welchen man in der ersten Zeit nach Kummer's Vorgange *Strahlensystem* genannt hat, während jetzt mehr der bestimmtere Plücker'sche Name *Congruenz* gebraucht wird.

Die ∞^1 Strahlen, welche Bedingungen von der Vielfachensumme 3 erfüllen, erzeugen eine Regel-, Strahlen- oder Linienfläche.

*) Systematische Entwickelung S. 67; Gesammelte Werke Bd. 1 S. 284; Steiner-Schröter's Vorlesungen über synthetische Geometrie, 2. Auflage (Leipzig 1876) S. 46.

Da die Strahlen eines Orts α^{ter} Stufe Bedingungen von der Vielfachensumme $4 - \alpha$, oder, wie wir kürzer sagen wollen, indem wir eine β-fache Bedingung für β einfache rechnen, $4 - \alpha$ Bedingungen zu erfüllen haben, so können ihnen noch α Bedingungen auferlegt werden. Und wenn sowohl die den Ort definirenden, als auch diese weiteren Bedingungen algebraisch sind, so ist die Zahl der allen 4 Bedingungen genügenden Strahlen nach *dem Princip von der Erhaltung der Anzahl* — welches eine Folge des Fundamentalsatzes der Algebra ist, dass jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln besitzt — bekanntlich constant, wie auch die geometrischen Gebilde, die in den Bedingungen auftreten, im Raume gelegen sind.*)

Die 4 Grundbedingungen sind algebraisch.

Also kann man den Strahlen einer Regelfläche noch die einfache Grundbedingung auferlegen, eine gegebene Gerade zu treffen, und *die feste* d. h. von der Lage dieser Geraden unabhängige *Zahl der Erzeugenden einer algebraischen Regelfläche, welche die einfache Grundbedingung erfüllen, nennen wir den Grad der Regelfläche.*

Die Regelfläche ist zugleich ein Ort 2. Stufe von Punkten, den Punkten auf ihren Erzeugenden, und ein Ort 2. Stufe von Ebenen, den Ebenen durch ihre Erzeugenden, welche bekanntlich die Berührungsebenen der Punktfläche sind. Der liniengeometrische Grad ist ersichtlich gleich der Ordnung des Punktortes, d. h. der Zahl der Punkte, die er auf eine Gerade wirft, und ebenfalls gleich der Klasse des Ebenenortes, d. h. der Zahl der Berührungsebenen, die von einer Geraden kommen, und aus diesem Grunde empfiehlt sich gerade das unbestimmte Wort „Grad“.

Den Strahlen einer Congruenz können wir die eine wie die andere zweifache Grundbedingung auferlegen, mit einem gegebenen Punkte oder mit einer gegebenen Ebene zu incidiren, und *die feste Zahl der Strahlen einer algebraischen Congruenz, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, heisst die Ordnung oder der Bündelgrad der Congruenz, die feste Zahl derjenigen, welche in eine Ebene fallen, ihre Klasse oder ihr Feldgrad.***)

*) Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie (Leipzig 1879) § 4.

**) Schubert hat Math. Annalen Bd. 10 S. 21 und im Kalkül S. 18 den gewiss wohl begründeten Vorschlag gemacht, die Namen: *Ordnung, Klasse, Rang* auf die Oerter von Punkten, Ebenen, Strahlen zu vertheilen, was dem bisherigen Gebrauche zum grösseren Theile entspricht. Aber es ist doch fraglich, ob es möglich sein dürfte, so eingebürgerte Benennungen, wie Grad eines Complexes, Grad einer Regelfläche, Ordnung und Klasse einer Congruenz ausser Gebrauch zu bringen. An sich sind insbesondere die beiden Schubert'schen Wörter Bündelrang, Feldrang (oder Bündelgrad, Feldgrad) zweifellos viel geeigneter, weil

Die Congruenz hat also *zwei* gleichberechtigte zu einander duale *Gradzahlen* und zeichnet sich dadurch vor allen andern Oertern von Punkten, Ebenen oder Strahlen aus.

Bei in sich dualen Congruenzen sind beide Gradzahlen gleich; wir sagen dann „Grad". *Eine Congruenz n^{ten} Grades ist also eine in sich duale Congruenz n^{ter} Ordnung und n^{ter} Klasse.*

Den Strahlen eines Complexes kann man noch die dreifache Grundbedingung, einem gegebenen Strahlenbüschel anzugehören, auferlegen und *die feste Zahl der Strahlen eines algebraischen Complexes, welche sich in einem beliebig gegebenen Strahlenbüschel befinden, heisst der Grad des Complexes.*

Nimmt man vom Büschel blos den Scheitel, so wird den Complexstrahlen nur die zweifache Bedingung auferlegt, durch einen gegebenen Punkt zu gehen; die ∞^1 sie erfüllenden Strahlen des Complexes bilden einen Kegel, welchen man *den dem Punkte zugehörigen Complexkegel* nennt. Die Anzahl der Strahlen eines algebraischen Complexes, die dem Büschel angehören, ist die Zahl der Kanten dieses Kegels, welche in die Ebene des Büschels fallen, also seine Ordnung.

Der Grad eines algebraischen Complexes ist gleich der Ordnung jedes von seinen ∞^3 Complexkegeln.

In eine Ebene fallen auch ∞^1 Strahlen des Complexes, welche eine Curve umhüllen, *die der Ebene zugehörige Complexcurve.* Liegt der Büschel in der Ebene, so sind die ihm angehörigen Complexstrahlen die Tangenten der Curve aus dem Scheitel.

Der Grad eines algebraischen Complexes ist gleich der Klasse aller seiner ∞^3 Complexcurven.

Wiederum empfiehlt sich das Wort „Grad", weil es eben Ordnung, Klasse und Rang zugleich bezeichnet.

6 Wir haben im Vorangehenden schon mehrere Strahlenörter erhalten.

So bilden alle Geraden, welche eine (ebene oder unebene) Curve treffen, einen Complex. Ist die Curve algebraisch und von der Ordnung μ, so ist der Complex μ^{ten} Grades; die Complexkegel sind die Projectionskegel der Curve aus den verschiedenen Punkten des Raumes, die Complexcurven zerfallen sämmtlich in μ Strahlenbüschel.

sie die Sache klar ausdrücken und keinen Zweifel lassen, während „Ordnung" und „Klasse" ebenso gut auch umgekehrt gebraucht werden könnten, wie das auch geschehen ist (Halphen, Comptes rendus Bd. 74 S. 41). Schubert's Wörter haben aber bis jetzt wenig Aufnahme gefunden; auch dürften sie der Uebersetzung Schwierigkeit entgegensetzen. Ich bin daher bei „Ordnung" und „Klasse" geblieben.

Wenn die getroffene Linie eine Gerade ist, so ist der Complex ein Strahlengebüsche und dieses also ein Complex 1. Grades. *Aber nicht jeder Complex 1. Grades ist ein Strahlengebüsche.*

Die Tangenten ferner einer Fläche bilden einen Complex; Complexkegel sind die Berührungskegel, Complexcurven die ebenen Schnitte der Fläche. *Ist die Fläche algebraisch, so ist der Grad des Complexes gleich dem Range der Fläche,* d. h. der Ordnung aller Tangentialkegel und der Klasse aller ebenen Schnitte.

Jedoch ist nicht umgekehrt jeder Strahlencomplex ein Tangentencomplex. Unter den Complexen 2. Grades z. B. bildet der Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades einen sehr speciellen Fall.

Steiner hat sich einst hierüber im Irrthume befunden. Es ist eine einfache Bedingung für eine Gerade, von 4 gegebenen Ebenen nach einem gegebenen Doppelverhältnisse geschnitten zu werden; also müssen alle Geraden, bei denen es geschieht, einen Complex bilden. Steiner hat — freilich lange, bevor systematisch Liniengeometrie getrieben wurde — die Frage nach der Fläche gestellt, die von diesen Geraden berührt wird.*) Der Complex ist aber kein Tangentencomplex; er ist der sogenannte *tetraedrale Complex,* mit dem wir uns später eingehend beschäftigen werden.

Die Strahlen, welche mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel (oder mit einer zur Geraden normalen Ebene den Complementwinkel) bilden, erzeugen einen Complex 2. Grades; alle Complexkegel sind Rotationskegel, deren Axen zur Geraden parallel sind und die alle die unendlich ferne Ebene in derselben Curve 2. Grades schneiden, welche daher von allen Geraden des Complexes getroffen wird. Dieser Complex ist also ein Specialfall der oben zuerst erwähnten Art.**)

Der Complex der Geraden, welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernung haben, ist ebenfalls 2. Grades; wir werden ihn, sowie auch den Complex 4. Grades der Geraden, welche mit zwei bestimmten Punkten in gegebenen Ebenen gleiten, seiner Zeit genauer betrachten.

Einfach aber lässt sich zeigen, dass *die geraden Linien auf den Flächen eines Netzes 2. Ordnung einen Complex 3. Grades bilden.*

*) Systematische Entwickelung, Anhang Nr. 15; in den Gesammelten Werken Bd. 1 S. 442 ist die Frage richtiger gestellt.

**) Wenn der Winkel 0 ist, so zerfällt er in zwei imaginäre Strahlengebüsche, deren Leitgerade die Tangenten des unendlich fernen Kugelkreises sind, welche die gegebene Gerade treffen. Die Parallelen zu dieser gehören zu beiden Gebüschen.

Alle durch einen Punkt P gehenden derartigen Geraden liegen auf den Flächen des Büschels, welchen P aus dem Netze ausscheidet, treffen die Grundcurve 4. Ordnung desselben, ausser in P, noch einmal und bilden also den Kegel 3. Ordnung, der aus P diese Curve projicirt.

Die Complexcurve in einer Ebene ist die Cayley'sche Curve des Kegelschnitt-Netzes, das durch das Flächennetz in die Ebene eingeschnitten wird.

Jeder Strahl durch einen der Grundpunkte des Netzes liegt auf einer Fläche desselben; also *gehören die Bündel um die 8 Grundpunkte zum Complexe.* —

Jede Gerade, die einer starren Figur angehört, welche durch ∞^3 Lagen im Raume geht, beschreibt einen Complex.

7 *Die einfachsten Congruenzen sind der Strahlenbündel und das Strahlenfeld;* jener hat die Ordnung 1, die Klasse 0, dieses umgekehrt.

Ferner bilden sämmtliche Strahlen, welche zwei Gerade zugleich treffen, eine Congruenz, von welcher beide Gradzahlen 1 sind (Nr. 4).

Sie wird deshalb *lineare Congruenz* genannt; es ist aber besser, ein einfaches Wort für sie zu haben: wir nennen sie *Strahlennetz.* Die beiden Geraden heissen *ihre Leitlinien.* Sie ist der Durchschnitt der Strahlengebüsche, die zu den einzelnen Leitlinien gehören. *Schneiden sich die beiden Leitlinien, so zerfällt das Strahlennetz in einen Bündel und ein Feld.*

Alle Strahlen, welche eine gegebene Gerade rechtwinklig schneiden, bilden ein Netz, dessen zweite Leitgerade unendlich fern ist.

Die Geraden, welche zwei Curven von den Ordnungen μ, μ_1 zugleich treffen, erzeugen eine Congruenz, deren Ordnung und Klasse $\mu\mu_1$ ist; wenn die Curven Θ Punkte gemein haben, so lösen sich Θ Strahlenbündel ab, die verbleibende Congruenz hat nur noch die Ordnung $\mu\mu_1 - \Theta$.

Die Strahlen, welche eine gegebene Gerade unter einem gegebenen (nicht rechten) Winkel schneiden und also, ausser der Geraden, noch einen gewissen unendlich fernen Kegelschnitt treffen, erzeugen eine Congruenz, deren beide Gradzahlen 2 sind.

Zwei Complexe vom Grade n bezw. n_1 haben eine Congruenz vom Grade nn_1 gemein; denn die beiden Complexkegel je aus demselben Punkte haben so viele gemeinsame Kanten und ebenso die beiden Complexcurven in derselben Ebene so viele gemeinsame Tangenten.

Eine Congruenz entsteht ferner durch die Doppelsecanten einer Raumcurve (diejenige z. B. einer cubischen Raumcurve hat die Ordnung 1 und die Klasse 3, die zu einer Raumcurve 4. Ordnung erster Art gehörige die Ordnung 2, die Klasse 6), durch die Geraden, welche

= Congruenz der geradlinigen Erzeugenden, die in einem Büschel von Flächen 2. Ordnung enthalten sind.

eine Curve treffen und eine Fläche berühren, durch die Doppeltangenten oder die dreipunktig berührenden Tangenten (Haupttangenten) einer Fläche, durch die Normalen einer Fläche oder Raumcurve, durch die Schmiegungsstrahlen einer Raumcurve (d. h. die Strahlen, welche durch ihre Punkte je in der zugehörigen Schmiegungsebene gezogen sind), durch eine Gerade, welche mit 3 bestimmten Punkten auf 3 Flächen oder mit einem auf einer Fläche, mit einem andern auf einer Curve gleitet, überhaupt durch eine Gerade, die von einer starren Figur mitgeführt wird, welche ∞^2 Lagen im Raume einnimmt.

In dem Complexe 3. Grades der geraden Linien auf den Flächen eines Netzes 2. Ordnung haben wir *die Congruenz der Kanten der Kegel dieses Netzes.* Da der Büschel, der durch einen Punkt aus dem Netze ausgeschieden wird, 4 Kegel enthält, so ist diese Congruenz 4. Ordnung, und weil die Spitzen aller Kegel des Netzes eine Curve 6. Ordnung bilden, so ist die Klasse der Congruenz 2 . 6 = 12.

Die einfachste Regelfläche ist der Strahlenbüschel; er ist 1. Grades. 8

Eine Regelfläche entsteht durch alle Geraden, welche 3 Complexen oder einem Complexe und einer Congruenz gemeinsam sind; also z. B. durch die gemeinschaftlichen Tangenten von 3 Flächen, durch die Geraden einer Congruenz, welche auf eine Gerade oder Curve sich stützen, durch die Geraden, welche an 3 Curven hingleiten.

Sind diese sämmtlich gerade Linien, so wissen wir aus Nr. 4, dass eine Regelfläche entsteht, von welcher 2 Erzeugende eine vierte Gerade treffen, also eine Regelschaar.

Was für einen Grad hat aber die Regelfläche, deren Gerade sich auf *die 3 Curven R_1, R_2, R_3* stützen, *welche beliebige Ordnungen μ_1, μ_2, μ_3 haben?* Das Hyperboloid, welches die Regelschaar trägt, die sich auf die 3 Geraden l_1, l_2, l_3 stützt, hat $2\mu_1$ Punkte mit R_1 gemein, also treffen $2\mu_1$ Gerade zugleich R_1, l_1, l_2, l_3 oder die Regelfläche der Geraden, welche an R_1, l_2, l_3 hingleiten, ist vom Grade $2\mu_1$, und die $2\mu_1\mu_2$ Punkte, welche sie mit R_2 gemein hat, zeigen, dass die Regelfläche der auf R_1, R_2, l_3 sich stützenden Geraden vom Grade $2\mu_1\mu_2$ ist.

*Die Regelfläche der Geraden, welche R_1, R_2, R_3 zugleich schneiden, ist vom Grade $2\mu_1\mu_2\mu_3$.**)

Man sieht hier den Einfluss der 2 im Steiner'schen Satze.

Vorausgesetzt ist im Vorangehenden, dass die Leitcurven keine Begegnungspunkte haben; ist ein solcher vorhanden, so löst sich von der Regelfläche der Kegel ab, der aus ihm die dritte Curve projicirt.

*) Cayley, Cambridge and Dublin Mathematical Journal Bd. 8 S. 145; Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes Bd. 2 Art. 232 der 3. Aufl.

μ_1, μ_2, μ_3 sind die Grade der Complexe der Treffgeraden der drei Leitcurven; unser Satz ordnet sich deshalb dem später zu beweisenden allgemeineren Satze unter, dass drei Complexen von den Graden n_1, n_2, n_3 eine Regelfläche vom Grade $2n_1n_2n_3$ gemeinsam ist.

Regelflächen werden ferner erzeugt durch die dreifachen Secanten einer Raumcurve, die Geraden, welche eine gegebene Curve zweimal, eine andere einmal treffen, die vierpunktig berührenden Tangenten einer Fläche, die dreimal zweipunktig, die einmal dreipunktig und einmal zweipunktig berührenden Tangenten, durch die Tangenten, Haupt-, Binormalen oder Krümmungsaxen einer Raumcurve.

9 Bringt man die oben erhaltene Regelfläche vom Grade $2\mu_1\mu_2\mu_3$ mit einer vierten Curve R_4 von der Ordnung μ_4 zum Schnitte, so ergiebt sich:

Es giebt $2\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$ Gerade, welche 4 Curven von den Ordnungen μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 zugleich treffen.

Dies ist wiederum ein besonderer Fall des späteren Satzes, dass 4 Complexe von den Graden μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 so viele Strahlen gemeinsam haben.

Nehmen wir aber an, dass *von den 4 Curven je R_i und R_k sich in σ_{ik} Punkten begegnen*, so gehören zu den $2\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$ Geraden

1) die

$$\sigma_{23}\sigma_{14} + \sigma_{31}\sigma_{24} + \sigma_{12}\sigma_{34}$$

Verbindungslinien von Schnittpunkten zweier Curven mit den Schnittpunkten der beiden übrigen,

2) die

$$\sigma_{14}(\mu_2\mu_3 - \sigma_{23}) + \sigma_{24}(\mu_3\mu_1 - \sigma_{31}) + \sigma_{34}(\mu_1\mu_2 - \sigma_{12})$$
$$+ \sigma_{23}(\mu_1\mu_4 - \sigma_{14}) + \sigma_{31}(\mu_2\mu_4 - \sigma_{24}) + \sigma_{12}(\mu_3\mu_4 - \sigma_{34})$$

weiteren gemeinsamen Kanten aller Kegel, welche aus einem der Schnittpunkte die beiden übrigen Curven projiciren.

Folglich bleiben

$$2\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 - \sigma_{23}\mu_1\mu_4 - \sigma_{31}\mu_2\mu_4 - \sigma_{12}\mu_3\mu_4 - \sigma_{14}\mu_2\mu_3 - \sigma_{24}\mu_3\mu_1 - \sigma_{34}\mu_1\mu_2$$
$$+ \sigma_{23}\sigma_{14} + \sigma_{31}\sigma_{24} + \sigma_{12}\sigma_{34}$$

*Gerade, welche den vier Curven in getrennten Punkten begegnen.**)

10 *Der Strahlenbüschel ist die einzige Regelfläche 1. Grades.*

Denn erstens muss die zugehörige Punktfläche, d. i. der Ort der Punkte auf den Geraden, 1. Ordnung, also eine Ebene sein, in welche

*) Sind alle Zahlen μ und σ gleich 3, so ergiebt sich 27, die Zahl der Geraden auf der cubischen Fläche; vergl. Journal für Mathematik Bd. 88 S. 213.

daher alle Geraden der Regelfläche 1. Grades hineinfallen. Zweitens muss die zugehörige Ebenenfläche, der Ort der Ebenen durch die Erzeugenden 1. Klasse, demnach ein Bündel sein, durch dessen Scheitel also die Geraden der Regelfläche, als gemeinsame Linien von je ∞^1 von diesen Ebenen, hindurch gehen müssen. Folglich bilden die Geraden einen Strahlenbüschel.

Ebenso ist die Regelschaar die einzige Regelfläche 2. Grades, weil die zugehörige Punktfläche 2. Ordnung und die zugehörige Ebenenfläche 2. Klasse sein muss.

Die Trägerfläche einer Regelschaar hat die besondere Eigenschaft, dass sie noch eine zweite Regelschaar trägt.

Die Figur zweier so verbundener Regelschaaren ist eine der merkwürdigsten, welche die moderne Geometrie entdeckt hat.*) Sie ist so vielfach behandelt,**) dass ich die Leser dieses Buches als mit ihr vertraut voraussetzen darf.

*Die Trägerfläche einer Regelschaar ist die einzige Regelfläche, auf welcher eine zweite Geradenschaar sich befindet.****) Denn die ∞^1 Geraden der einen Schaar, welche durch die verschiedenen Punkte einer Geraden der andern Schaar gehen, können, infolge der Stetigkeit, sich nicht ändern, wenn von dieser Geraden zur unendlich nahen in der zweiten Schaar übergegangen, also wenn diese ganze Schaar durchlaufen wird; demnach erschöpfen sie die ganze erste Schaar, und jede Gerade der einen trifft alle aus der andern. Schon drei aber aus einer genügen (Nr. 4), um die andere als Regelschaar oder Regelfläche 2. Grades zu charakterisiren.

Steiner's Satze über die beiden Treffgeraden von 4 gegebenen Geraden u_1, u_2, u_3, u_4 kann man eine andere Fassung geben: u_1, u_2, u_3 und u_1, u_2, u_4 bestimmen als Leitgeraden zwei Regelschaaren, welche selbst die beiden Treffgeraden und deren Leitschaaren u_1, u_2 gemeinsam haben.

Wenn also zwei Regelschaaren zwei Gerade gemeinsam haben, so gilt dies auch für die mit ihnen verbundenen Regelschaaren.

Eine Regelschaar kann in drei Weisen ausarten, entweder in die Kantenreihe eines Kegels 2. Grades — wir wollen sie dann *conische Regelschaar* nennen — *oder in den Büschel der Tangenten eines Kegel-*

*) Monge, Journal de l'École polytechnique Heft 1.

**) Klassisch ist Steiner's Behandlung dieser beiden Geradenschaaren in seiner Systematischen Entwickelung Nr. 51, die zu den schönsten Partien dieses ausgezeichneten Buchs gehört. Man sehe auch Reye's Geometrie der Lage Th. 1 10. Vortrag (in allen 3 Auflagen) und Schröter's Oberflächen 2. Ordnung § 14.

***) Vergl. auch Staudt, Geometrie der Lage (Nürnberg 1847) Nr. 329.

schnitts oder in zwei Strahlenbüschel mit gemeinsamem Strahle, der dann zugleich Verbindungslinie der Scheitel und Schnittlinie der Ebenen ist. *In den beiden ersten Fällen vereinigt sich die Regelschaar mit der zugehörigen Leitschaar.*

Im ersten Falle ist die Trägerfläche als Punktfläche der Kegel 2. Grades, als Ebenenfläche der doppelte Ebenenbündel um dessen Scheitel. Die Ebenenbüschel um zwei beliebige Kanten, als Geraden der Leitschaar, sind in allgemeiner Projectivität; speciell ist nur, dass die Axen sich schneiden. Die Punktreihen aber auf ihnen befinden sich in ausgearteter Projectivität, derartig dass dem Scheitel des Kegels als Punkt der einen Geraden alle Punkte auf der andern entsprechen.*)

Im zweiten Falle wird die Ebenenfläche 2. Klasse von den Ebenen durch die Tangenten des Kegelschnitts gebildet, die Punktfläche ist die doppelte Ebene desselben. Die Punktreihen auf zwei Tangenten des Kegelschnitts, als Leitgeraden, sind in allgemeiner Projectivität; die Specialität besteht wiederum nur darin, dass diese Geraden sich schneiden. Hingegen sind die Ebenenbüschel um sie in ausgearteter Projectivität, so dafs beide die Ebene des Kegelschnitts zur singulären Ebene haben.

Zur dritten Ausartung, *dem Zerfallen in zwei Strahlenbüschel* (S_1, σ_1), (S_2, σ_2) *mit gemeinsamem Strahle,* gelangt man bei der Erzeugung der Regelschaar aus 3 Leitgeraden u_1, u_2, u_3, wenn zwei von ihnen sich schneiden; ist S_1 der Schnitt von u_1, u_2 und σ_2 die Verbindungsebene, so ist σ_1 die Ebene $S_1 u_3$ und S_2 der Punkt $\sigma_2 u_3$.

Ohne gemeinsamen Strahl giebt es nicht ∞^1 alle Geraden der ausgearteten Schaar zugleich treffende Geraden, keine Leitschaar. Wenn aber $S_1 S_2 \equiv \sigma_1 \sigma_2$, dann *besteht die Leitschaar ebenfalls aus zwei Strahlenbüscheln, nämlich* (S_1, σ_2), (S_2, σ_1). Nehmen wir aus dieser Leitschaar zwei Strahlen und zwar aus verschiedenen Büscheln, so werden sowohl die Ebenenbüschel um sie, als auch die Punktreihen auf ihnen durch die Regelschaar in ausgeartete Projectivität gebracht mit σ_1, σ_2, bezw. S_1, S_2 als singulären Elementen. Nimmt man aber die beiden Strahlen aus dem nämlichen Büschel der Leitschaar, z. B. aus (S_1, σ_2), so werden die Ebenenbüschel und die Punktreihen perspectiv, und zwar so, dafs jene den Strahlenbüschel (S_1, σ_1), diese den (S_2, σ_2) erzeugen.

Die Trägerfläche beider ausgearteter Regelschaaren besteht als Punktfläche aus den beiden Ebenen oder Feldern σ_1, σ_2, als Ebenen-

*) Hinsichtlich der ausgearteten Projectivität sehe man Steiner-Schröter's Vorlesungen § 19 a).

fläche aus den Bündeln S_1, S_2. Die Doppellinie des einen Paares ist mit der des andern identisch.

Eine ebenfalls vierfach unendliche Mannigfaltigkeit bilden die sämmtlichen Kugeln des Raumes (oder allgemeiner, alle Flächen 2. Grades durch einen festen Kegelschnitt); jeder Punkt ist Mittelpunkt von ∞^1 Kugeln. Wir haben daher Analogien zwischen der Liniengeometrie und *der Geometrie, in welcher die Kugel das Grundelement der Betrachtung ist,* zu erwarten. 11

Aber andererseits wird sich auch ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden ergeben, infolge dessen die letztere, obwohl sie das weniger einfache Element hat, die einfachere ist und als Vorbereitung für die Liniengeometrie dienen kann.*)

Systeme 2. und 3. Stufe von Kugeln nennt man, wegen dieser Analogie, auch *Kugelcongruenzen* und *Kugelcomplexe.*

Der Bedingung für eine Gerade, eine gegebene Gerade zu treffen, ist die Bedingung für die Kugel analog, eine gegebene Kugel rechtwinklig zu schneiden; sie ist einfach, denn es giebt ∞^3 Kugeln, die sie erfüllen, aus jedem Punkte als Mittelpunkt eine.

Der Inbegriff dieser Kugeln ist der einfachste Kugelcomplex, der gewöhnlich *Kugelgebüsche* genannt wird.

Es giebt ferner ∞^2 Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln orthogonal schneiden; sie haben alle 2 Punkte gemeinsam und ihre Mittelpunkte erfüllen die Potenzebene der beiden gegebenen Kugeln; diese einfachste Kugelcongruenz nennt man einen *Kugelbündel* oder ein *Kugelnetz.*

Drei gegebene Kugeln werden von ∞^1 Kugeln rechtwinklig geschnitten, welche alle durch einen festen Kreis gehen und ihre Mittelpunkte auf der Potenzaxe der 3 gegebenen Kugeln haben; dies einfach unendliche System heisst ein *Kugelbüschel.*

Zu vier gegebenen Kugeln endlich giebt es nur eine einzige Kugel, welche alle vier rechtwinklig schneidet; sie hat ihren Mittelpunkt im Potenzpunkte der gegebenen Kugeln.

Daher stimmt diese „Geometrie von 4 Dimensionen“, wie man wohl häufig, aber nicht ganz richtig sagt, in ihrem Fundamentalsatze mit der Geometrie des Punktes und der der Ebene überein, und weicht ab von der der geraden Linie. *Die vierfach unendliche Mannigfaltigkeit der Geraden ist quadratisch, die der Kugeln linear.*

Im Kugelgebüsche, Kugelnetze, Kugelbüschel giebt es, infolge

*) Reye's Schrift: Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugeln systeme (Leipzig 1879) soll unter anderm auch diesem Zwecke dienen.

dieses Satzes, nur eine Kugel, welche 3, 2, bezw. eine gegebene Kugel rechtwinklig schneidet. Lassen wir hier die zwei- und dreifache Grundbedingung aus 2, 3 einfachen bestehen*) und nennen die Zahl der Kugeln eines algebraischen Systems α^{ter} Stufe, welche $(4-\alpha)$-mal die einfache Grundbedingung erfüllen, seinen *Grad*, so *sind die besprochenen Kugelsysteme linear oder 1. Grades.* Und eine Kugelcongruenz hat nur eine Gradzahl, nicht 2, wie die Strahlencongruenz.

In dem vierfach unendlichen Systeme der Kugeln zeichnen sich die beiden dreifach unendlichen Systeme der Punkte (Punktkugeln) und der Ebenen aus (vom Radius 0, bezw. ∞). In jedem Kugelbüschel giebt es 2 Punkte, die beiden „Grenzkugeln“, und eine Ebene, die Potenzebene; also *ist der Complex der Punktkugeln quadratisch, der der Ebenen linear.*

Der einfachen Grundbedingung ordnen sich als Specialfälle unter, dass die Kugel einen gegebenen Punkt rechtwinklig schneide, d. h. durch ihn gehe, und dass sie eine gegebene Ebene orthogonal schneide, d. h. ihren Mittelpunkt in ihr habe.

Mehrdeutige Correspondenzen. Gemeinsame Strahlen von Strahlenörtern.

I.

12 Es werden im Folgenden wiederholt mehrdeutige Correspondenzen, insbesondere zwischen Gebilden 1. Stufe benutzt werden, so dass es sich empfiehlt, eine zusammenhängende Darstellung derselben zu geben. Wenn wir auch vorzugsweise gerade Punktreihen betrachten werden, so ist doch bekannt, dass an deren Stelle alle Gebilde — gegebenen Falls auch zwei ungleichartige — treten können, welche auf gerade Punktreihen projectiv bezogen werden können, und wo es geeignet erscheint, werden wir auch andere einführen.

Wir sagen von zwei Punktreihen u, u_1, dass sie in einer Correspondenz oder Verwandtschaft $[n, n_1]$ stehen, wenn jedem Punkte X der ersten n_1 Punkte X_1 der zweiten und jedem Punkte X_1 dieser n Punkte X jener entsprechen.

Sind x und x_1 Grössen (Parameter), durch welche die Lage eines Punktes auf u oder u_1 eindeutig bestimmt wird, so besteht zwischen

*) Die 3 Grundbedingungen können also auch dahin ausgesprochen werden, dass die Kugel einem gegebenen Gebüsche, Netze oder Büschel angehören soll.

den x und x_1 entsprechender Punkte X und X_1 eine Gleichung, welche in Bezug auf x vom Grade n und in Bezug auf x_1 vom Grade n_1 ist.

Demnach ist sie von der Gestalt:

$$\begin{aligned} &(a_{n,n_1} x_1^{n_1} + a_{n,n_1-1} x_1^{n_1-1} + \cdots + a_{n,0})\, x^n \\ + &(a_{n-1,n_1} x_1^{n_1} + a_{n-1,n_1-1} x_1^{n_1-1} + \cdots + a_{n-1,0})\, x^{n-1} \\ + &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + &(a_{0,n_1} x_1^{n_1} + a_{0,n_1-1} x_1^{n_1-1} + \cdots + a_{0,0}) = 0, \end{aligned}$$

und hat offenbar $(n+1)(n_1+1)$ Glieder und daher $nn_1 + n + n_1$ *wesentliche Constanten.*

Folglich sind z. B. zwischen zwei gegebenen Trägern ∞^5 *Verwandtschaften* [2, 1] *und* ∞^8 *Verwandtschaften* [2, 2] *möglich.*

Liegen die beiden Punktreihen auf derselben Geraden, so entsteht die Frage nach der Anzahl der Punkte, in denen sich zwei entsprechende vereinigen, der sogenannten Coincidenzen.

Zu dem Ende ist es natürlich nothwendig, für x und x_1 übereinstimmende parametrische Bestimmung anzunehmen, so dass zu gleichen Werthen von x und x_1 identische Punkte X und X_1 gehören. Setzt man dann in der Verwandtschaftsgleichung $x_1 = x$, so ergiebt sich, da die Coefficienten der Potenzen von x oder x_1 ganze rationale Functionen in x_1, bezw. x vom Grade n_1, bezw. n sind, eine Gleichung $(n + n_1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Wurzeln die Parameter der Coincidenzpunkte sind.

Und wir haben damit das Princip, das, weil es von Chasles*) zuerst in seiner grossen Bedeutung erkannt und ausgebeutet worden ist, das Chasles'sche *Correspondenz-Princip* genannt wird:

Zwei Punktreihen auf derselben Geraden oder allgemeiner zwei auf Punktreihen projectiv beziehbare Gebilde auf dem nämlichen Träger, welche sich in einer Correspondenz $[n, n_1]$ *befinden, haben* $n + n_1$ *Coincidenzen, d. h. Punkte, bezw. Elemente, die sich selbst entsprechen (vereinigte Elemente).*

Wir kehren zum allgemeinen Falle zurück. 13

Jede der beiden Reihen enthält eine Anzahl von Punkten, von deren entsprechenden Punkten sich zwei vereinigt haben: ein solcher Punkt wird *Verzweigungspunkt* der betreffenden Reihe genannt, und der Punkt, in dem die Vereinigung statt hat, der entsprechende *Doppelpunkt* in der andern Reihe.**)

*) Ausgesprochen in den Comptes rendus Bd. 58 (1864) S. 1175 und in vielen folgenden Artikeln der Comptes rendus verwerthet.

**) Diese Namen: Verzweigungspunkt und Doppelpunkt in dieser Bedeutung

Will man die Verzweigungspunkte auf u haben, so kann man eine Correspondenz zwischen zwei auf u_1 gelegenen Punktreihen herstellen, in der sich zwei Punkte entsprechen, welche dem nämlichen Punkte von u correspondiren. Irgend einem Punkte X_1 von u_1 entsprechen n Punkte X auf u, und jedem dieser, ausser X_1, noch $n_1 - 1$ andere Punkte X_1' auf u_1. Also correspondiren dem X_1 $n(n_1 - 1)$ Punkte X_1'; wie man von X_1 zu jedem dieser gelangt, so auch umgekehrt von jedem der X_1' zu X_1, so dass also jedem X_1' auch $n(n_1 - 1)$ Punkte X_1 entsprechen. Demnach ist die Verwandtschaft, in der sich die X_1 und X_1' entsprechen, eine $[n(n_1 - 1), n(n_1 - 1)]$ und hat $2n(n_1 - 1)$ Coincidenzen nach dem Correspondenz-Princip. Jede von denselben ist ein Doppelpunkt auf u_1 und entspricht einem Verzweigungspunkte auf u.

In unserer Correspondenz (n, n_1) *hat also die Punktreihe* u, *von welcher jeder Punkt* n_1 *entsprechende Punkte auf* u_1 *hat,* $2n(n_1 - 1)$ *Verzweigungspunkte und die Punktreihe* u_1, *von der jeder Punkt* n *entsprechende auf* u *hat,* $2n_1(n - 1)$ *Verzweigungspunkte.*

Ihnen entsprechen je auf der andern Geraden ebenso viele Doppelpunkte.

14 *Jede Regelfläche, welche zwei gerade Leitlinien hat,* ruft auf denselben eine Correspondenz hervor, in der sich die Schnitte mit der nämlichen Erzeugenden entsprechen. Ist die eine Leitgerade u n_1-fach (d. h. gehen durch jeden ihrer Punkte n_1 Erzeugende der Fläche) und die andere u_1 n-fach, so ist die Correspondenz eine $[n, n_1]$. Die $2n(n_1 - 1)$ Verzweigungspunkte auf u und die $2n_1(n - 1)$ Verzweigungspunkte auf u_1 sind die sogenannten *Cuspidal- oder Rückkehrpunkte* auf den beiden vielfachen Geraden, d. h. Punkte, von denen zwei unendlich nahe Erzeugende der Fläche ausgehen.

In jeder Ebene durch u liegen n Erzeugende, diejenigen, welche von ihrem Begegnungspunkte mit u_1 ausgehen. *Folglich ist die Regelfläche vom* $(n + n_1)^{\text{ten}}$ *Grade.*

Zwischen den Ebenenbüscheln u und u_1 entsteht eine Correspondenz $[n_1, n]$, in der sich je zwei durch die nämliche Erzeugende gehende Ebenen entsprechen. Der Büschel u hat $2n_1(n - 1)$ Verzweigungsebenen, d. h. solche, welche je zwei unendlich nahe Erzeugende der Fläche enthalten (Cuspidalebenen der Regelfläche); sie

rühren von Emil Weyr her, der ersteren aus der Functionentheorie entlehnt hat; man vergleiche: Weyr's Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde (Leipzig 1869, 1870) und: Beiträge zur Curventheorie (Wien 1880). Ich vermeide es aber, auch die Coincidenzelemente Doppelelemente zu nennen. In einem Coincidenzelemente vereinigen sich zwei einander entsprechende Elemente, in einem Doppelelemente zwei demselben Elemente — Verzweigungselemente — entsprechende.

gehen durch die Cuspidalpunkte von u_1; u_1 hingegen hat $2n(n_1 - 1)$ Verzweigungsebenen.

Solche Erzeugende der Regelfläche, welche mit einer unendlich nahen sich schneiden, nennt man — nach Cayley — *Torsallinien* der Fläche, weil längs einer solchen Geraden, wie in Nr. 38 noch genauer erörtert wird, die Fläche von einer und derselben Ebene, welche die beiden unendlich nahen Erzeugenden verbindet, berührt wird.

Der Schnittpunkt einer Torsallinie mit der einen Geraden ist ein Verzweigungspunkt der Punkte-Correspondenz, der mit der andern ein Doppelpunkt; die Verbindungsebene mit der letzteren eine Verzweigungsebene, die mit der ersteren eine Doppelebene der Ebenen-Correspondenz.

Wenn die Träger der beiden in Correspondenz $[n, n_1]$ *stehenden* 15
Punktreihen in die nämliche Ebene fallen, dann geht die Regelfläche $(n + n_1)^{\text{ten}}$ Grades in *eine Curve* $(n + n_1)^{\text{ter}}$ *Klasse* über, welche von den Verbindungslinien entsprechender Punkte eingehüllt wird. Die durch einen beliebigen Punkt gehenden Verbindungslinien sind die Coincidenzen der beiden Strahlenbüschel, die aus ihm die Punktreihen projiciren und ebenfalls in einer Correspondenz $[n, n_1]$ sich befinden. *Die beiden Geraden* u *und* u_1 *sind* n-, *bezw.* n_1-*fache Tangenten der Curve;* denn z. B. u verbindet den Punkt uu_1 als Punkt von u_1 mit seinen entsprechenden Punkten auf u; diese sind, wie die Betrachtung des an uu_1 unendlich nahen Punktes auf u_1 zeigt, die Berührungspunkte der u.

Die Verzweigungspunkte sind ersichtlich die weiteren (einfachen) Schnitte jeder dieser beiden vielfachen Tangenten mit der Curve.

Da zwei windschiefe Punktreihen, unter Festhaltung der Correspondenz, in eine Ebene gebracht werden können, so erhalten wir hieraus eine neue Methode, die Zahlen der Verzweigungspunkte abzuleiten. Die Möglichkeit weiterer vielfacher Tangenten ist ersichtlich im allgemeinen nicht vorhanden; also ist die Ordnung der Curve

$$(n + n_1)(n + n_1 - 1) - n(n - 1) - n_1(n_1 - 1) = 2nn_1$$

und u hat, ausser den n Berührungspunkten, noch

$$2nn_1 - 2n = 2n(n_1 - 1)$$

weitere Schnitte.

Verschiebt man die eine Punktreihe in sich selbst, bis im Schnittpunkte sich entsprechende Punkte vereinigen, dann löst sich der Büschel um denselben ab und es bleibt nur noch eine Curve $(n + n_1 - 1)^{\text{ter}}$ Klasse, für welche u und u_1 $(n - 1)$-, bezw. $(n_1 - 1)$-fache Tangenten sind.

Für die Correspondenz [2, 2] führt dies zu einem bemerkenswerthen Satze.

Dieselbe hat auf jeder der beiden Geraden 4 Verzweigungspunkte; diese sind also bei der Curve 3. Klasse die 4 weiteren Schnitte der beiden einfachen Tangenten u und u_1. Durch Dualisirung des bekannten Satzes von Salmon,*) nach welchem alle Tangentenwürfe,**) die von den Punkten der ebenen Curve 3. Ordnung (ohne Doppelpunkt) an dieselbe kommen, unveränderliches Doppelverhältniss haben, ergiebt sich:

Die Würfe der Verzweigungselemente zweier Gebilde, die sich in Correspondenz [2, 2] *befinden, haben gleiches Doppelverhältniss.****)

16 *Die beiden Punktreihen in Correspondenz* $[n, n_1]$ *seien auf einen und denselben Kegelschnitt* K *übertragen; dann umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve* $(n + n_1)^{\text{ter}}$ *Klasse;* denn durch einen Punkt von K können keine anderen Linien gehen als diejenigen, welche ihn als Punkt der einen oder anderen Reihe mit seinen entsprechenden verbinden. Diese Curve $\mathfrak{K}$ heisst *die Directionscurve*†) *der vom Kegelschnitte* K *getragenen Correspondenz* $[n, n_1]$.

Sie geht durch die sämmtlichen Verzweigungspunkte und berührt K *in den* $n + n_1$ *Coincidenz- oder vereinigten Punkten.*

Ersteres bedarf keines Beweises; was aber die Berührung anlangt, so sei $X \equiv Y_1$ ein Punkt auf K, der einem der Coincidenzpunkte unendlich nahe ist; von seinen ihm in beiderlei Sinne entsprechenden Punkten ist je einer X_1, bezw. Y ihm unendlich nahe; es sind dies diejenigen, welche durch Continuität in den Coincidenzpunkt übergehen; also sind XX_1 und YY_1 sowohl 2 unendlich nahe Tangenten von K, als von $\mathfrak{K}$ und $X \equiv Y_1$ ihr Schnitt; folglich ist dieser Punkt oder auf der Grenze der Coincidenzpunkt Berührungspunkt beider Curven K und $\mathfrak{K}$.

Andere Punkte können K und $\mathfrak{K}$ nicht gemeinsam haben; also ist $\mathfrak{K}$ von der Ordnung $2nn_1$ und hat $\frac{1}{2} n (n - 1) + \frac{1}{2} n_1 (n_1 - 1)$ Doppeltangenten. Diese Linien werden dadurch Doppeltangenten von $\mathfrak{K}$, dass jedem der beiden Schnitte mit K als Punkt der ersten

*) Vergl. z. B. Schröter, Theorie der ebenen Curven 3. Ordnung (Leipzig 1888) S. 68.

**) Ein *Wurf* ist, nach Staudt, jeder Inbegriff von 4 in bestimmter Weise angeordneten Elementen, aus denen ein Doppelverhältniss gebildet werden kann.

***) Cremona, Sulle superficie gobbe di quarto grado (Memorie dell' Istituto di Bologna Ser. II Bd. 8). — Vergl. auch Em. Weyr, Beiträge zur Curvenlehre Cap. IV.

†) Auch dieser Name rührt von Emil Weyr her.

Reihe der andere in der zweiten correspondirt, also diese beiden Punkte sich involutorisch entsprechen.

Zwei auf demselben Träger befindliche Gebilde, welche in einer Correspondenz $[n, n_1]$ *stehen, haben* $\frac{1}{2} n (n - 1) + \frac{1}{2} n_1 (n_1 - 1)$ *Paare sich involutorisch entsprechender Elemente.**)

Wir wollen dies noch auf eine zweite Weise darthun. Es seien O', O'' zwei beliebige Punkte von K; wir projiciren die erste Reihe aus O', die zweite aus O''; die Strahlenbüschel, welche projiciren, erzeugen, weil sie gleichfalls in einer Correspondenz $[n, n_1]$ sich befinden, durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Curve $(n + n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche O' zum n-, O'' zum n_1-fachen Punkte hat und durch die $n + n_1$ vereinigten Punkte der Reihen auf K geht. Vertauschen wir O' und O'', so ergiebt sich eine Curve $(n + n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung, für welche O' n_1-, O'' n-fach ist und die ebenfalls durch die vereinigten Punkte geht. Folglich haben diese beiden Curven

$$n (n - 1) + n_1 (n_1 - 1)$$

weitere gemeinsame Punkte. Ist X einer derselben, so sind die Schnitte Y, Z von $O'X$ und $O''X$ mit K entsprechend in der ersten und zweiten Punktreihe auf K, weil X zur ersten Curve gehört, aber auch entsprechend in der zweiten und ersten, weil X auch auf der zweiten Curve liegt, also involutorisch entsprechend; folglich liegt auch $(O'Z, O''Y)$ auf beiden Curven, und je zwei von den weiteren gemeinsamen Punkten führen zu dem nämlichen involutorischen Paare.

Die Tangenten aus O', bezw. O'' an die erste Curve $(n + n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung gehen durch die Verzweigungspunkte der ersten, bezw. zweiten Reihe.

Wenn die Zahl der involutorischen Paare grösser ist als

$$\tfrac{1}{2} n (n - 1) + \tfrac{1}{2} n_1 (n_1 - 1),$$

so haben die beiden Curven $(n + n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung mehr als $(n + n_1)^2$ gemeinsame Punkte. Eine völlige Identität kann nur eintreten, wenn $n = n_1$ ist; denn im andern Falle haben sie O', O'' zu vielfachen Punkten von ungleichem Grade der Vielfachheit; also ist dann nur möglich, dass beide zerfallen und der eine Theil beiden Curven gemeinsam ist, was natürlich auch bei $n = n_1$ eintreten kann. Aber im allgemeinen werden in diesem Falle die vollen Curven identisch sein.

Wenn bei zwei Gebilden auf dem nämlichen Träger, welche sich in einer Correspondenz $[n, n]$ *befinden, mehr als* $n (n - 1)$ *involutorische*

*) Vergl. Emil Weyr, Journal f. Mathem. Bd. 74 S. 189.

Paare vorhanden sind, dann ist, im allgemeinen), die ganze Correspondenz involutorisch, d. h. jede zwei entsprechende Elemente entsprechen sich involutorisch oder in beiderlei Sinne.*

So gelangen wir zu den *involutorischen Correspondenzen,* mit denen wir es im Folgenden am meisten zu thun haben werden.

17 Doch ehe wir uns zu denselben wenden, soll noch ein interessanter Specialfall der Correspondenz [2, 2] erörtert werden.

Man kann bekanntlich 2 (gemeine) Involutionen — als ihre Träger wollen wir zwei Strahlenbüschel U, U_1 in derselben Ebene annehmen — *projectiv auf einander beziehen,* d. h. so, dass die Paare sich eindeutig entsprechen: jedem Strahle von U oder U_1 entsprechen dann 2 Strahlen im andern Büschel. *Diese specielle Correspondenz* [2, 2] *hat die besondere Eigenschaft, dass, wenn x_1, x_1' die beiden dem x entsprechenden Strahlen sind, die zweiten Strahlen, welche ihnen in U entsprechen, die nämlichen sind;* was bei einer beliebigen Correspondenz [2, 2] nicht der Fall ist: da hat x_1 einen andern zweiten entsprechenden als x_1'.

Diese Specialität ist nur eine einfache Bedingung; die Zahl der Correspondenzen [2, 2] zwischen 2 gegebenen Gebilden ist ∞^8, da die Verwandtschaftsgleichung:

$$(a_{22}x_1^2 + a_{21}x_1 + a_{20})\,x^2 + (a_{12}x_1^2 + a_{11}x_1 + a_{10})x + \\ + (a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}) = 0$$

8 wesentliche Constanten hat, und also 8 Paare entsprechender Elemente sie eindeutig festlegen.

In jedem der beiden Gebilde aber sind ∞^2 Involutionen möglich und zwischen je zweien derselben ∞^3 Projectivitäten; also giebt es ∞^7 Correspondenzen der jetzt betrachteten Art.

Suchen wir das Kennzeichen für diese Specialität auf. Wenn der eine Strahlenbüschel, unter Festhaltung der Correspondenz, so gedreht wird, dass im gemeinsamen Strahle sich entsprechende Strahlen ver-

*) Bei der Correspondenz [2, 2] müssen also 3 Paare involutorisch sein. Es lässt sich jedoch zeigen, dass diese, wenn die Correspondenz durchweg involutorisch sein soll, nicht 3 Paare einer (gemeinen) Involution sein dürfen. Ist das nämlich der Fall, dann zerfällt die Directionscurve in einen Doppelbüschel und einen Kegelschnitt und die Correspondenz in eine Involution und eine Projectivität, und jeder Punkt ist nur mit dem einen entsprechenden Punkte involutorisch entsprechend. Auch die Curven 4. Ordnung, welche durch die Büschel 0′, 0″ erzeugt werden, zerfallen je in zwei Kegelschnitte, von denen der eine beiden gemeinsam ist, derjenige, der aus den involutorisch projectiven Punktreihen sich ergiebt.

einigen, dann erzeugen, wie wir wissen, die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Curve 3. Ordnung, welche einfach durch die Scheitel geht; und umgekehrt werden zwei Strahlenbüschel, deren Scheitel auf einer Curve 3. Ordnung liegen, durch dieselbe in eine solche Correspondenz gebracht. Nehmen wir nun an, dass einmal zwei Strahlen x, x' des einen Büschels dieselben 2 Strahlen x_1, x_1' im andern zu entsprechenden haben. Dann liegen die 4 Punkte $xx_1, xx_1', x'x_1, x'x'_1$ auf der erzeugten Curve 3. Ordnung und auch die Scheitel xx', x_1x_1' der Büschel, also zwei von den Diagonalpunkten des vollständigen Vierecks jener 4 Punkte. Mithin gehen die Tangenten in diesen 2 Punkten durch den Gegenpunkt der 4 Punkte auf der Curve und die beiden Scheitel sind conjugirte Punkte in einem der 3 Systeme conjugirter Punkte der Curve. Die Strahlenbüschel aber um zwei solche Punkte bilden, wenn in ihnen auf der Curve sich schneidende Strahlen als entsprechend angenommen werden, projective Involutionen (in halb-perspectiver Lage).*)

Wenn also bei zwei Gebilden, welche sich in einer Correspondenz [2, 2] *befinden, es einmal vorkommt, dass dieselben zwei Elemente, die einem Elemente des einen Gebildes im andern entsprechen, auch einem zweiten Elemente des ersten correspondiren, so geschieht dies durchweg; und die Correspondenz ist eine Projectivität zweier Involutionen.*

Von noch grösserer Specialität (Mannigfaltigkeit 6) ist eine Correspondenz (2, 2), welche in zwei Projectivitäten zwischen den bezogenen Gebilden zerfällt.

Die involutorischen Correspondenzen [n] — denn, weil bei ihnen die 18
Zahlen n und n_1 gleich sein müssen, so genügt diese Bezeichnung — bestehen zwischen zwei Gebilden auf demselben Träger, und zwei entsprechende Elemente ergeben sich jedes aus dem andern auf die nämliche Weise; *also fällt der Unterschied der beiden Gebilde weg: jedes Element hat dieselben entsprechenden Elemente, mag man es zu dem einen oder andern Gebilde rechnen*, also nicht $n + n$, wie bei einer nicht involutorischen Correspondenz [n, n] zweier Gebilde mit gemeinsamem Träger, sondern nur n.

Die Verwandtschafts-Gleichung, in der für x und x_1 dieselbe parametrische Bestimmung angenommen ist, ist daher symmetrisch**) nach x und x_1, so dass, wenn ein bestimmter Parameterwerth für x oder x_1

*) Man sehe hierzu: Schröter, Theorie der ebenen Curven 3. Ordnung (Leipzig 1888) § 3, 9, 15.

**) Wegen dieser Symmetrie wird die Correspondenz auch selbst symmetrisch genannt; Emil Weyr sagt: symmetrisches Elementensystem n^{ten} Grades.

eingesetzt wird, die Gleichung, in x_1, des einen Falles genau dieselbe ist wie die, in x, des andern Falles. Je zwei Coefficienten a_{ik} und a_{ki} dieser Gleichung, bei denen $i \gtrless k$ ist, sind einander gleich, und da die Zahl dieser Coefficienten in der allgemeinen Gleichung einer Correspondenz $[n, n]$ gleich $n(n+1)$ ist, so ist die Zahl der wesentlichen Constanten bei einer involutorischen Correspondenz um $\frac{1}{2}n(n+1)$ kleiner, also

$$n^2 + 2n - \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}n(n+3).$$

Die Mannigfaltigkeit der involutorischen Correspondenzen $[n]$ *in einem gegebenen Gebilde ist gleich derjenigen der Curven* n^{ter} *Ordnung oder Klasse in gegebener Ebene.**)

Z. B. sind in jedem Gebilde ∞^5 *involutorische Correspondenzen* $[2]$ *möglich.*

Wenn das Anfangselement, d. i. das, für welches der Parameter den Werth O hat, sich mit zwei von seinen entsprechenden Elementen vereinigt, so fallen in der Gleichung die Glieder $a_{10}(x + x_1)$ und a_{00} weg; also gilt das auch für die Gleichung $2n^{\text{ten}}$ Grades, welche die Coincidenzen liefert, und dieselbe hat zwei Wurzeln O. Da jenes Element ein beliebiges sein kann, so hat man:

Wenn in einer involutorischen Correspondenz $[n]$ *ein Element sich mit zwei von seinen* n *entsprechenden vereinigt, so ist es eine doppelt zu nehmende Coincidenz.*

19 Interessante Beispiele von involutorischen Correspondenzen liefern die Systeme 1. Stufe von Kegelschnitten und Flächen 2. Grades.

In einem (algebraischen) Systeme 1. Stufe von Kegelschnitten bezeichnet man als Charakteristiken die Zahlen μ, ν, ϱ *der Kegelschnitte, deren Ebenen durch einen gegebenen Punkt gehen, derjenigen, welche eine gegebene Gerade treffen, und derer, welche eine gegebene Ebene berühren.*

Im allgemeinen hat ferner ein einstufiges System nur zwei Ausartungen: *Geradenpaare und Punktepaare* (oder besser: Paare von Strahlenbüscheln in derselben Ebene); oder vielmehr, wir wollen nur solche Systeme betrachten, welche keine andern Ausartungen, als Geradenpaare mit getrennten Geraden, Punktepaare mit getrennten Punkten (in bestimmter Ebene), enthalten.

Den Inbegriff der ∞^2 Berührungsebenen eines Kegelschnitts stellt beim Geradenpaare der Bündel um den Schnittpunkt der beiden Geraden, doppelt gerechnet, dar; die beiden Berührungsebenen durch eine beliebige Gerade haben sich also vereinigt.

*) Aber die Correspondenz-Gleichung, mit x und x_1 als Coordinaten, ist nicht die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung.

Den Inbegriff der ∞^1 Punkte eines Kegelschnitts stellt beim Punktepaare die Verbindungsgerade der beiden Punkte, doppelt gerechnet, dar; die beiden Geraden in einem Strahlenbüschel, welche einen Kegelschnitt treffen, vereinigen sich, wenn er ein Punktepaar wird.

Es seien δ, η die Zahlen der Geraden-, bezw. Punktepaare im System.

In jedem Strahlenbüschel (O, ω) wird durch das System eine involutorische Correspondenz $[\nu]$ bewirkt, in der sich zwei Strahlen entsprechen, welche denselben Kegelschnitt des Systems schneiden; denn jeder Strahl des Büschels trifft ν Kegelschnitte des Systems und hat also ν entsprechende zweite Treffgeraden im Büschel. Die 2ν Coincidenzen rühren her von den ϱ Kegelschnitten, welche die Ebene ω tangiren, den η Punktepaaren und den μ Kegelschnitten, deren Ebenen durch O gehen. Der Strahl g von (O, ω), der, im letzten Falle, in die Ebene eines solchen Kegelschnitts fällt, ist eine doppelte Coincidenz, da er zwei Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte hat und als Strahl nach dem einen oder andern mit dem nach dem jeweiligen zweiten zusammenfällt; unter den ν Curven des Systems, welche g treffen, zählt der Kegelschnitt doppelt; so dass g sich mit zwei von den ν entsprechenden vereinigt hat.

Ebenso ruft das System in einem Ebenenbüschel eine involutorische Correspondenz $[\varrho]$ hervor, in der zwei denselben Kegelschnitt des Systems berührende Ebenen einander entsprechen. Zu den 2ϱ Coincidenzen führen die ν Kegelschnitte, welche die Axe des Büschels schneiden, und die δ Geradenpaare. *Also haben wir für ein System 1. Stufe von Kegelschnitten von der erwähnten — im allgemeinen eintreffenden — Eigenschaft:*

$$1) \qquad 2\nu = \varrho + 2\mu + \eta, \quad 2\varrho = \nu + \delta.$$

Handelt es sich um ein *ebenes* System, so erkennt man, indem man den Punkt der ersten Charakteristik beliebig, also ausserhalb der Ebene aller Curven annimmt, $\mu = 0$. Ferner wird man in diesem Falle besser nur die Spuren der vorkommenden räumlichen Gebilde in der festen Ebene in Betracht ziehen und deshalb ν, ϱ als die Zahlen der Kegelschnitte des Systems definiren, welche durch einen gegebenen Punkt der Ebene gehen, bezw. eine gegebene Gerade derselben berühren. Man hat also:

$$2) \qquad 2\nu = \varrho + \eta, \quad 2\varrho = \nu + \delta.\text{*)}$$

*) Chasles, Comptes rendus Bd. 58 S. 1173; Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven (deutsch von Curtze) S. 281.

20 *Bei einem Systeme 1. Stufe von Flächen 2. Grades sind die Charakteristiken die Zahlen μ, ν, ϱ der Flächen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, eine gegebene Gerade oder Ebene berühren.*

Ausartungen sind, im allgemeinen, der Kegelschnitt, der Kegel, das Ebenen-Punkte-Paar.

Die Ebene des Kegelschnitts, doppelt gerechnet, repräsentirt den Punktort 2. Stufe, und jede Gerade hat zwei vereinigte Schnitte mit ihr.

Der Bündel um den Scheitel, doppelt gerechnet, repräsentirt beim Kegel den Ebenenort 2. Stufe und von jeder Geraden kommen zwei vereinigte „Tangential"ebenen.

Das Ebenen-Punkte-Paar (ebenfalls von achtfach unendlicher Zahl im Raume, wie Kegelschnitt und Kegel, und deshalb in einem Systeme 1. Stufe von Flächen 2. Grades ebenso möglich, wie diese) besteht, als Punktort 2. Stufe, aus zwei Ebenen (Punktfeldern) σ_1, σ_2 und als Ebenenort 2. Stufe, aus zwei Bündeln, deren Scheitel S_1, S_2 auf der Schnittlinie $\sigma_1\sigma_2$ liegen. Jede Ebene schneidet in einem Geradenpaare; „Tangenten" desselben sind die Strahlen in der Ebene durch den Doppelpunkt. Der Berührungskegel aus jedem Punkte zerfällt in zwei Ebenenbüschel; Kanten sind die Strahlen aus dem Punkte in der Verbindungsebene der beiden Axen.

Aus beidem folgt, dass die Geraden, welche die Doppellinie $S_1 S_2 \equiv \sigma_1\sigma_2$ des Ebenen-Punkte-Paares treffen, als die Tangenten der ausgearteten Fläche anzusehen sind, und das von ihnen gebildete Strahlengebüsche, doppelt gerechnet, den Tangenten-Complex darstellt, so dass in jedem Strahlenbüschel die beiden Tangenten sich vereinigt haben.

Die Strahlenbüschel (S_1, σ_1), (S_2, σ_2) bilden (Nr. 10) die eine und die Büschel (S_1, σ_2), (S_2, σ_1) die andere Regelschaar. Durch jeden Punkt von σ_1, σ_2, d. h. durch jeden Punkt der Fläche, geht aus jeder Schaar eine Gerade, in jeder Ebene durch S_1 oder S_2, d. h. in jeder Berührungsebene, befindet sich aus jeder Schaar eine Gerade.

Wir setzen voraus, dass ein System vorliegt, in dem keiner von den Kegelschnitten oder Kegeln noch weiter ausgeartet ist und bei keinem der Ebenen-Punkte-Paare die Ebenen oder die Punkte sich vereinigt haben. *Die Anzahlen der Kegelschnitte, Kegel, Ebenen-Punkte-Paare im Systeme seien φ, χ, ψ.*

Das Flächensystem erzeugt nun in jeder Punktreihe, in jedem Ebenenbüschel und in jedem Strahlenbüschel eine involutorische Correspondenz $[\mu]$, $[\varrho]$, $[\nu]$, in der sich bezw. zwei derselben Fläche des Systems angehörige Punkte, zwei dieselbe Fläche berührende Ebenen oder Strahlen entsprechen.

Die 2μ Coincidenzen der ersten rühren her von den ν Flächen des Systems, welche den Träger der Punktreihe tangiren, und den φ Kegelschnitten, die 2ϱ der zweiten von den ν Flächen, welche die Axe des Ebenenbüschels berühren, und den χ Kegeln, die 2ν endlich der dritten Correspondenz von den μ Flächen, welche durch den Scheitel des Strahlenbüschels gehen, den ϱ, welche seine Ebene tangiren, und den ψ Ebenen-Punkte-Paaren. *Also bestehen für ein System 1. Stufe von Flächen 2. Grades von der vorausgesetzten im allgemeinen eintreffenden Eigenschaft folgende drei Beziehungen zwischen den 3 Charakteristiken und den 3 Ausartungszahlen:*

$$3)\quad 2\mu = \nu + \varphi, \quad 2\varrho = \nu + \chi, \quad 2\nu = \mu + \varrho + \psi.^{*)}$$

Die Correspondenz auf u_1, welche wir in Nr. 13 erhielten, zwischen 21
den Punkten X_1, X_1', die dem nämlichen Punkte X von u entsprechen, ist eine involutorische Correspondenz $[n(n_1 - 1)]$.

Bei jeder Correspondenz $[n, n_1]$ zwischen 2 Gebilden entsteht in jedem von denselben eine involutorische Correspondenz, in der sich zwei Elemente entsprechen, welche dem nämlichen Elemente des andern Gebildes correspondiren. In dem Gebilde u, von dem jedes Element in der gegebenen Correspondenz n_1 entsprechende im andern Gebilde u_1 hat, ist diese involutorische Correspondenz eine $[n_1(n - 1)]$, im andern Gebilde u_1 aber eine $[n(n_1 - 1)]$.

Wenn eine der beiden Zahlen, z. B. n, gleich 1 ist, dann ist diese Correspondenz auf u nicht vorhanden, auf u_1 ist sie eine involutorische Correspondenz $[n_1 - 1]$, jedoch von besonderer Art.

Dem Elemente X von u entsprechen nämlich n_1 Elemente von u_1:

$$X_1,\ X_1',\ \ldots X_1^{(n_1-1)};$$

und alle diese entsprechen nur dem Elemente X von u. Also entsprechen in der involutorischen Correspondenz auf u_1 dem X_1 die X_1', X_1'', $\ldots X_1^{(n-1)}$, aber auch je zwei dieser entsprechen einander. *Im allgemeinen ist es nicht der Fall, dass zwei Elemente, die in einer involutorischen Correspondenz dem nämlichen Elemente entsprechen, auch einander in derselben correspondiren. Ist dies aber durchweg der Fall, so entstehen bei einer involutorischen Correspondenz $[n_1 - 1]$ Gruppen von je n_1 Elementen, derartig, dass jedes die $n_1 - 1$ übrigen zu seiner entsprechenden hat: man nennt dies eine Involution n_1^{ten} Grades.*

Bei der involutorischen Correspondenz [1] ist keine Bedingung

*) Zeuthen, Nouv. Annales d. Mathém. Ser. II Bd. 5 S. 385. — Für die ganze Betrachtung von Nr. 19, 20 vergl. man Schubert's Kalkül der abzählenden Geometrie § 16, 20, 22.

dafür erforderlich; sie ist von selbst eine gemeine oder quadratische Involution.

Für die involutorische Correspondenz [2] werden wir bald die Bedingung aufsuchen, damit sie eine cubische Involution sei.

Bei einer Correspondenz $[1, n_1]$ *zwischen zwei Gebilden* u *und* u_1 *bilden die Gruppen der je* n_1 *Elemente von* u_1, *die je einem und demselben Elemente von* u *entsprechen, eine Involution* n_1^{ten} *Grades, bei* [1, 2] *also eine gemeine Involution.*

Eine Correspondenz $[1, n_1]$ *ist daher stets Projectivität zwischen einem einförmigen Gebilde und einer Involution* n_1^{ten} *Grades.*

Eine Correspondenz [2, 2] zwischen 2 Gebilden ruft in jedem derselben eine involutorische Correspondenz [2] hervor, in der sich die zwei Elemente entsprechen, welche demselben Elemente des andern correspondiren.

22 Bei einer involutorischen Correspondenz $[n]$ haben, weil der Unterschied der Reihen fortgefallen ist, die einen Verzweigungs- und die einen Doppelelemente mit den andern sich auch vereinigt.

Eine involutorische Correspondenz $[n]$ *hat daher* $2n(n-1)$ *Verzweigungselemente und ebenso viele Doppelelemente:* jene sind solche Elemente, von deren n entsprechenden 2 zusammengefallen sind, diese diejenigen, in denen dies Zusammenfallen statt hat.

Zwei so zusammengefallene sind aber im allgemeinen nicht entsprechend, und *daher sind die Doppelelemente wohl zu unterscheiden von den Coincidenz- oder vereinigten Elementen*, in denen sich zwei entsprechende Elemente vereinigt haben und deren Zahl nach Nr. 12 gleich $2n$ ist.

Wenn aber die involutorische Correspondenz $[n]$ eine Involution $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades ist, dann haben sich in einem Doppelelemente zwei entsprechende vereinigt, und zugehöriges Verzweigungselement ist jedes von den $n-1$ übrigen Elementen der Gruppe von $n+1$ Elementen, zu der jene beiden vereinigten Elemente gehören.

Eine Involution $(n+1)^{\text{ten}}$ *Grades hat* $2n(n-1)$ *Verzweigungselemente, aber nur* $2n$ *Doppelelemente, und diese sind zugleich Coincidenzelemente.*

23 *Es sei nun wiederum ein Kegelschnitt* K *der Träger einer involutorischen Correspondenz* $[n]$. Weil jetzt von jedem Punkte des K nur n Verbindungslinien ausgehen, so *ist die Directionscurve oder Einhüllungscurve der Verbindungslinien entsprechender Punkte nur* n^{ter} *Klasse;* wegen des involutorischen Entsprechens stellt jede Tangente dieser Curve $\mathfrak{K}$ zwei Tangenten der Curve der allgemeinen Correspondenz

$[n, n]$ dar und so die Curve doppelt gerechnet die frühere Curve $2n^{\text{ter}}$ Klasse.

Und umgekehrt jede in der Ebene von K gelegene Curve n^{ter} Klasse $\mathfrak{K}$ ruft auf K eine involutorische Correspondenz $[n]$ hervor, in der sich je die beiden Schnitte, mit K, einer Tangente von $\mathfrak{K}$ entsprechen; da beide auf gleiche Weise entstehen, so muss die Correspondenz involutorisch sein und jedem Punkte von K entsprechen ja auch nur die n zweiten Schnitte, mit K, der Tangenten aus ihm an $\mathfrak{K}$.

Damit ergiebt sich der Grund, warum die beiden Mannigfaltigkeiten in Nr. 18 gleichen Grad haben.

Die zu zwei verschiedenen involutorischen Correspondenzen $[n]$ und $[n']$ auf K gehörigen Directionscurven haben nn' Tangenten gemein. Also:

*Zwei involutorische Correspondenzen $[n]$ und $[n']$ auf dem nämlichen Träger haben nn' Paare entsprechender Punkte gemeinsam.**)

Es sei $n' = 1$; dann hat man:

In einer involutorischen Correspondenz $[n]$ giebt es stets n Paare entsprechender Punkte, die zugleich zu einer auf demselben Träger befindlichen (gemeinen) Involution gehören oder welche in Bezug auf zwei Elemente des Trägers von $[n]$ harmonisch sind.

In eine ebene unicursale Curve m^{ter} Ordnung (vom Geschlechte 0) schneidet ein Strahlenbüschel stets eine Involution m^{ter} Ordnung. Auf ihr befinde sich eine involutorische Correspondenz $[n]$, so hat diese $n(m-1)$ Paare entsprechender Punkte, welche zugleich in dieser Involution entsprechend sind. Demnach:

Wenn auf einer ebenen Curve m^{ter} Ordnung vom Geschlechte 0 eine involutorische Correspondenz $[n]$ liegt, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve von der Klasse $n(m-1)$.

Ist jene eine gemeine Involution, so ist diese Klasse $m-1$.

Die Directionscurve $\mathfrak{K}$ einer auf K gelegenen involutorischen Correspondenz $[n]$ hat mit K $2n$ gemeinsame Tangenten; die Punkte, in denen diese den K berühren, sind ersichtlich die Coincidenzpunkte der $[n]$.

*) Man überzeugt sich ebenso, dass bei einer Correspondenz $[n, n_1]$ und einer involutorischen Correspondenz $[m]$ die auf demselben Träger liegen, es $m(n+n_1)$ Paare entsprechender Punkte in der ersteren giebt, die auch in der zweiten entsprechen, also insbesondere, dass es in der ersteren $m(n+n_1)$ Paare entsprechender Punkte giebt, die zu einer Involution $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades desselben Trägers gehören. *Also erzeugen die Verbindungslinien entsprechender Punkte einer $[n, n_1]$, die von einer unicursalen Curve m^{ter} Ordnung getragen wird, eine Fläche $(m-1)(n+n_1)^{\text{ten}}$ Grades;* denn in eine solche Curve schneidet ein Ebenenbüschel eine Involution m^{ten} Grades ein.

Da jede beliebige Curve n^{ter} Klasse Directionscurve sein kann, so ist $\mathfrak{K}$ eine allgemeine Curve n^{ter} Klasse, also von der Ordnung $n(n-1)$.

Die gemeinsamen Punkte von K und $\mathfrak{K}$ sind die $2n(n-1)$ Verzweigungspunkte und die Tangenten in ihnen an $\mathfrak{K}$ schneiden in K die Doppelpunkte ein.

24 Wir wenden uns jetzt insbesondere zu den involutorischen Correspondenzen [2] und wollen zunächst die Frage erledigen, wann dieselbe eine cubische Involution ist. Dafür ist es geeigneter, als Träger eine cubische Raumcurve R anzunehmen.

Nun sei auf R eine beliebige involutorische Correspondenz [2] gegeben, dieselbe hat mit der durch einen Ebenenbüschel eingeschnittenen cubischen Involution 4 Paare entsprechender Punkte gemein; von den Verbindungslinien entsprechender Punkte der gegebenen Correspondenz treffen 4 eine Gerade und dieselben erzeugen eine Fläche 4. Grades, auf der R ersichtlich doppelt ist.

Nehmen wir nun an, dass einmal die beiden Punkte, die einem Punkte in der Correspondenz entsprechen, auch einander entsprechen, dann haben wir in einer Ebene 3 Erzeugende dieser Regelfläche; folglich ist der Restschnitt dieser Ebene mit der Fläche eine Gerade l; jede Gerade aber, welche l trifft und R zweimal schneidet, hat mit der Fläche 5 Punkte gemein und gehört ihr ganz an; die Fläche ist also nichts anderes als das Erzeugniss der Doppelsecanten von R, die sich auf l stützen. Betrachten wir die von irgend einem Punkte X der R ausgehenden Erzeugenden, so ist auch die 3. Doppelsecante in ihrer Ebene, die ja durch l geht, eine Erzeugende unserer Fläche und die durch sie verbundenen Punkte, welche in [2] dem X entsprechen, correspondiren auch einander.

Wenn also bei einer involutorischen Correspondenz [2] *einmal die beiden einem Elemente entsprechenden Elemente auch einander entsprechen, so geschieht es durchweg; die Correspondenz ist eine cubische Involution.**)

25 Wenn zwei Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$ so liegen, dass ein dem ersteren eingeschriebenes Dreieck dem zweiten umgeschrieben ist, dann rufen die Tangenten von $\mathfrak{K}$ auf K eine involutorische Correspondenz [2] hervor, bei der die Voraussetzung des vorangehenden Satzes eintrifft.

Im allgemeinen ist es bei zwei Kegelschnitten K und $\mathfrak{K}$ nicht möglich, dem einen K ein Dreieck einzuschreiben, das dem andern umgeschrieben ist; sind aber zwei Kegelschnitte in solcher Lage, dass ein derartiges Dreieck möglich ist, dann giebt es deren ∞^1; jeder Punkt von K ist Ecke, jede Tangente von $\mathfrak{K}$ Seite eines solchen Dreiecks.

*) Em. Weyr, Wiener Sitzungsberichte Bd. 87 S. 595.

Wenn $\mathfrak{K}$ gegeben ist, so enthält jeder Büschel von Kegelschnitten 2, welche diese Lage zu $\mathfrak{K}$ haben. Irgend eine Tangente t von $\mathfrak{K}$ wird von diesem Büschel in einer Involution J geschnitten; wir suchen den Ort des Schnittpunkts der beiden zweiten Tangenten, die von den beiden Punkten eines Paars der Involution an $\mathfrak{K}$ kommen. Die Tangentenpaare an $\mathfrak{K}$ aus den Punkten einer beliebigen Geraden bewirken auf t ebenfalls eine Involution; das einzige Paar, welches diese mit der ersteren gemein hat, beweist, dass jener Ort eine Gerade m ist. Die Punktreihe auf ihr befindet sich in eindeutiger Beziehung zu J, also auch zum Kegelschnittbüschel und zur Involution, die derselbe auf m einschneidet; demnach haben wir auf dieser Geraden eine Correspondenz [1, 2]; von den 3 Coincidenzpunkten ist einer der Schnitt tm, welcher in J dem Berührungspunkte von t mit $\mathfrak{K}$ gepaart ist; die beiden andern sind dritte Ecken von zwei dem $\mathfrak{K}$ umgeschriebenen Dreiecken, welche je auf denselben Kegelschnitt des Büschels fallen, wie die beiden ersten.

Bei einer involutorischen Correspondenz [2], welche eine cubische Involution ist, erhält man dreielementige Cyklen: man geht von einem beliebigen Elemente X_1 des Gebildes aus, nimmt das eine entsprechende Element X_2, dann das zweite diesem entsprechende X_3, so fällt das zweite wiederum diesem entsprechende X_4 mit X_1 zusammen, und wenn also *ein* derartiger Cyklus vorhanden ist, so führt, wie wir eben fanden, jedes Element zu einem solchen Cyklus. Geht man von X_1 zum zweiten ihm entsprechenden Elemente, so durchläuft man den Cyklus, dem X_1 angehört, im entgegengesetzten Sinne.

Verallgemeinern wir, d. h. gehen wir bei einer involutorischen Correspondenz [2] *bis zu X_{n+1} und sehen zu, was eintritt, wenn einmal X_{n+1} mit X_1 zusammenfällt, wenn also ein n — elementiger Cyklus vorhanden ist.* 26

Im allgemeinen fallen X_1 und X_{n+1} nicht zusammen und indem sie sich über den Träger bewegen, erzeugen sie auch eine involutorische Correspondenz [2], die, zur Unterscheidung von der gegebenen, $[2]_{n+1}$ genannt werde. In der That, von X_1, wie von X_{n+1} kann man ja in zweierlei Weise ausgehen, indem man zu dem einen oder andern entsprechenden Elemente fortschreitet; der weitere Fortgang ist dann eindeutig; man erhält also zu jedem X_1 zwei X_{n+1} und zu jedem X_{n+1} zwei X_1, und in gleicher Weise diese aus X_{n+1}, wie jene aus X_1.

Diese Correspondenz $[2]_{n+1}$ hat 4 Coincidenzen; aber wir werden uns überzeugen, dass dieselben nicht zu solchen Cyklen führen, wie wir sie wünschen.

Dazu müssen aber die beiden Fälle, dass n gerade und ungerade ist, unterschieden werden.

Wenn n gerade ist, so sei A_1 eins der 4 Verzweigungs-Elemente von [2], also ein Element, dessen beide entsprechenden sich vereinigt haben. In der Reihe $X_1, X_2, \dots X_{n+1}$ entsprechen jedem der inneren Elemente $X_2, \dots, X_n$ seine beiden Nachbarn.

Es sei nun A_2 das Element, in dem die beiden entsprechenden Elemente von A_1 sich vereinigt haben, A_3 das zweite A_2 entsprechende, ausser A_1, ferner A_4 das zweite A_3 entsprechende, ausser A_2, und so fort bis $A_{\frac{n}{2}+1}$. Nimmt man dieses als Ausgangselement X_1, so wird die Reihe $X_1 X_2 \dots X_{n+1}$

$$A_{\frac{n}{2}+1} A_{\frac{n}{2}} \dots A_2 A_1 A_2 \dots A_{\frac{n}{2}+1};$$

wir kommen also zum Ausgangspunkt zurück, aber derartig, dass mitten umgekehrt wird und die nämlichen Elemente rückwärts durchlaufen werden. Die Nachbarn des Ausgangselementes sind nicht seine beiden entsprechenden X_2 und X_n, wie wir es bei der Coincidenz $X_{n+1} \equiv X_1$ wünschen, die zu einem Cyklus führt, sondern dasselbe eine $A_{\frac{n}{2}}$.

Ist aber n ungerade, so sei B_1 eins der 4 Coincidenzelemente, also ein solches, das sich mit einem der beiden ihm entsprechenden vereinigt hat, das zweite ihm entsprechende sei B_2, und das zweite diesem entsprechende, ausser B_1, sei B_3 und so fort bis $B_{\frac{n+1}{2}}$. Nimmt man dieses als Ausgangselement X_1, so wird die Reihe $X_1 X_2 \dots X_{n+1}$

$$B_{\frac{n+1}{2}} B_{\frac{n-1}{2}} \dots B_2 B_1 B_1 B_2 \dots B_{\frac{n+1}{2}};$$

es ergiebt sich daher eine Rückkehr zum Ausgangselement, die nur wenig von der des ersten Falles abweicht.

Jedenfalls sind die 4 Elemente $A_{\frac{n}{2}+1}$ des ersten und die $B_{\frac{n+1}{2}}$ des zweiten Falles die 4 Coincidenzelemente von $[2]_{n+1}$. Weitere hat sie im allgemeinen nicht.

Also giebt es im allgemeinen keine Cyklen.

27 *Nehmen wir wieder an, dass die Correspondenz* [2] *von einem Kegelschnitte K getragen sei; $\mathfrak{K}$ sei ihr Directions-Kegelschnitt. Auch die Punkte X_1 und X_n bilden eine Correspondenz* [2], welche $[2]_n$ heisse, *und $\mathfrak{K}_n$ sei ihr Directions-Kegelschnitt.* Fällt X_1 in einen der Punkte $A_{\frac{n}{2}+1}$, bezw. $B_{\frac{n+1}{2}}$, so fällt X_2 sowohl wie X_n in $A_{\frac{n}{2}}$, bezw. $B_{\frac{n-1}{2}}$; und

demnach sind die 4 Geraden $A_{\frac{n}{2}+1} A_{\frac{n}{2}}$, bezw. $B_{\frac{n+1}{2}} B_{\frac{n-1}{2}}$ *die gemeinsamen Tangenten von* $\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{K}_n$.

Wenn die beiden X_2 eines Punktes X_1 zusammenfallen, so fallen, da der weitere Fortgang eindeutig ist, auch die beiden ihm zugehörigen X_n zusammen. Also, welchen Werth auch n habe, alle die Correspondenzen $[2]_n$ haben dieselben Verzweigungspunkte wie [2], oder *alle die den verschiedenen Werthen von n entsprechenden Kegelschnitte* $\mathfrak{K}_n$ *gehören zum Büschel* $K\mathfrak{K}$.

Es sei nun in [2] ein ordentlicher Cyklus vorhanden:

$$X_1', X_2', X_3', \ldots X_n', X_{n+1}' \equiv X_1',$$

der nicht aus einer Reihe von Elementen besteht, die in einer der obigen Weisen hin und zurück durchlaufen wird. Die beiden Directionskegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_n$ haben dann noch eine fünfte Tangente

$$X_{n+1}' X_n' \equiv X_1' X_n'$$

gemein und sind deshalb identisch. Construirt man nun aus irgend einem Punkte X_1 von K die Reihe $X_1 X_2 \ldots X_n$, so muss die zweite Tangente aus X_n (ausser $X_{n-1} X_n$) an diesen Kegelschnitt $\mathfrak{K} \equiv \mathfrak{K}_n$ den K zum zweiten Male in X_{n+1} treffen, weil sie Tangente von $\mathfrak{K}$ ist, in X_1 aber, weil sie Tangente von $\mathfrak{K}_n$ ist; also ist $X_{n+1} \equiv X_1$. Folglich ist der von jedem Punkte von K ausgehende Zug geschlossen.

Wenn also die beiden Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$ eine solche gegenseitige Lage haben, dass es ein ordentliches n-Eck giebt, das dem einen K ein-, dem andern $\mathfrak{K}$ umgeschrieben ist, dann giebt es ∞^1 derartige n-Ecke: jeder Punkt von K ist Ecke, jede Tangente von $\mathfrak{K}$ Seite eines derselben.

Zu einem ordentlichen Vielecke ist erforderlich, dass zwei benachbarte Seiten die *beiden* Tangenten sind, die von der gemeinsamen Ecke an $\mathfrak{K}$ gehen; das war bei den obigen ausgearteten Figuren nicht durchweg der Fall, wird es aber bei andern ausgearteten sein, mit denen wir uns sofort zu beschäftigen haben werden.

Im Vorangehenden sind die berühmten Sätze über die Poncelet'schen Polygone*) bewiesen.

*) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, 2. Auflage (Paris 1865) Bd. 1 S. 311, 347; Applications d'Analyse et de Géométrie (Paris 1862) Bd. 1 S. 348, 480. — Ueber diese Polygone hat Loria eine geschichtliche Monographie veröffentlicht: I poligoni di Poncelet (Turin 1889) mit einem Nachtrage in der Bibliotheca mathematica von Eneström, Neue Folge Bd. 3 S. 67. — Hinsichtlich der Methode vergl. man W. K. Clifford, Mathematical Papers (London 1882) S. 17, und Hurwitz, Math. Annalen Bd. 15 S. 8.

Wenn also bei einer involutorischen Correspondenz [2] *ein geschlossener Cyklus aus n Elementen, bei dem jedes Element seine beiden Nachbarn zu den beiden entsprechenden hat, vorhanden ist, so giebt es deren* ∞^1; *mit jedem Elemente kann man einen beginnen.*

Diese Ergebnisse sollen uns später zu analogen Sätzen über geschlossene Figuren bei den Strahlencongruenzen 2. Ordnung und 2. Klasse ohne singuläre Linien und bei den Complexen 2. Grades führen.

28 Wenn von jedem Punkte von K im Falle der erwähnten Lage der beiden Kegelschnitte ein Vieleck ausgeht, so gilt dies auch für die Verzweigungspunkte oder Schnittpunkte von K und $\mathfrak{K}$. Es sei X_1 einer derselben, so fallen seine beiden entsprechenden Punkte, also X_2 und X_n zusammen, mithin auch X_3 und X_{n-1}, u. s. f.

Ist nun n gerade, so fallen auch $X_{\frac{n}{2}}$ und $X_{\frac{n}{2}+2}$ zusammen, welche die Nachbarn und entsprechenden Punkte von $X_{\frac{n}{2}+1}$ sind; also ist dieser auch ein Verzweigungspunkt oder Schnitt $K\mathfrak{K}$. Das Polygon hat demnach folgende Gestalt: *ein Zug von* $\frac{n}{2}$ *Tangenten des* $\mathfrak{K}$ *geht von einem Schnitte der beiden Kegelschnitte* K *und* $\mathfrak{K}$ *bis zu einem andern* und wird hin und zurück durchlaufen.

Man erhält eine zu dieser duale ausgeartete Form, wenn X_1 in *den Berührungspunkt, mit* K, *einer der gemeinsamen Tangenten von* K *und* $\mathfrak{K}$ *fällt;* es ergiebt sich dann *ein Zug von* $\frac{n}{2} - 1$ *Tangenten von* $\mathfrak{K}$, *der von diesem Punkte nach einem zweiten Punkte derselben Art geht;* dieser Zug, hin und zurück durchlaufen, aber mit Einschaltung der beiden gemeinsamen Tangenten als Seiten von der Länge 0, bildet das Polygon.

Wenn aber n ungerade ist, so fallen, sobald X_1 wieder in einen der Schnitte $K\mathfrak{K}$ gelegt wird, $X_{\frac{n+1}{2}}$ und $X_{\frac{n+3}{2}}$ zusammen, also zwei benachbarte und einander entsprechende Punkte: folglich in einen der 4 Coincidenzpunkte oder Berührungspunkte, mit K, der gemeinsamen Tangenten. Das Vieleck ist mithin folgendermassen ausgeartet: *ein Zug von* $\frac{n-1}{2}$ *Tangenten des* $\mathfrak{K}$ *geht von einem der Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte zu dem Berührungspunkte, mit* K, *einer ihrer gemeinsamen Tangenten;* dies sind die $\frac{n-1}{2}$ ersten Seiten des Polygons, dann folgt eine von der Länge 0 auf dieser gemeinsamen Tangente und darauf wird der erste Zug zurück durchlaufen. Diese Figur ist in sich dual.

Umgekehrt ist das Vorhandensein eines der beiden vorhin beschriebenen Züge, bei geradem n, oder eines, wie er eben beschrieben ist, bei ungeradem n, ein Kennzeichen, dass die Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$ Poncelet'sche n-Ecke zulassen oder, allgemeiner, dass die Correspondenz [2] ∞^1 *Cyklen* $X_1, X_2, \ldots X_{n+1} \equiv X_1$ *hat.**)

Es genügt, den Fall eines Zuges zu betrachten, der von einem Schnittpunkte beider Curven nach einem zweiten, bezw. nach einem Berührungspunkt einer gemeinsamen Tangente geht. An jeder Ecke hat das ausgeartete Polygon die *beiden* Tangenten von $\mathfrak{K}$, die von ihr ausgehen, zu Seiten; an der Schnittpunkts-Ecke X_1 sind nicht blos, wie früher, die Seiten, sondern auch die Tangenten zusammengefallen. Von diesen beiden Seiten berührt die eine als erste Seite $X_1 X_2$ den Directions-Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, die andere als letzte Seite $X_n X_1$ den $\mathfrak{K}_n$; folglich tangirt diese Linie $X_1 X_n \equiv X_1 X_2$, die durch den gemeinsamen Punkt X_1 von K und $\mathfrak{K}$ geht, der auch gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_n$ ist, beide in ihm; sie haben daher 4 Punkte und die Tangente in einem von ihnen gemein und sind identisch; woraus dann das Weitere wie oben (Nr. 27) gefolgert wird.

Für die involutorische Correspondenz [2] *lautet das Kennzeichen dafür, dass sie cyklisch vom* n^{ten} *Grade ist:*

Ist n gerade, so muss man, mit X_1 *von einem Verzweigungselemente ausgehend,***) *mit* $X_{\frac{n}{2}+1}$ *ebenfalls zu einem Verzweigungselemente, oder, von einem Coincidenzelemente ausgehend,****) *mit* $X_{\frac{n}{2}}$ *ebenfalls zu einem Coincidenzelemente gelangen.*

Ist aber n ungerade, so muss man, mit X_1 *von einem Verzweigungs-*

*) Dieses Kennzeichen wurde zuerst von Cayley angegeben: Philos. Transactions Bd. 151 Th. 1 (1861) S. 225. — Da die 4 Schnittpunkte zweier *Kreise* in zwei wesentlich verschiedene Gruppen, die unendlich fernen und die endlichen, zerfallen, (und ebenso die dem einen Kreise angehörigen Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten), so ergeben sich, wenn n gerade ist, zwei wesentlich verschiedene Fälle — die nicht immer aus einander gehalten worden sind —, je nachdem nämlich der Zug von $\frac{n}{2}$ Tangenten zwei gleichartige oder zwei ungleichartige Schnittpunkte verbindet (oder derjenige von $\frac{n}{2} - 1$ Tangenten zwei gleichartige oder zwei ungleichartige Berührungspunkte). Steiner z. B. (Gesammelte Werke Bd. 1 S. 159) berücksichtigt nur den zweiten Fall.

**) was, da die beiden entsprechenden Elemente sich vereinigt haben, nur auf eine Weise möglich ist.

***) so dass X_2 das zweite vom Coincidenzelemente verschiedene ihm entsprechende Element ist.

elemente ausgehend, mit $X_{\frac{n+1}{2}}$ *in ein Coincidenzelement gelangen, oder umgekehrt.*

29 Während aber in der Theorie der Poncelet'schen Vielecke die Fälle $n = 1, 2$ ohne Interesse sind, werden wir auch mit ihnen in unsern liniengeometrischen Anwendungen zu thun haben.

Bei $n = 2$ hat eine „cyklische" involutorische Correspondenz [2] Cyklen von der Form

$$X_1, \; X_2, \; X_3 \equiv X_1;$$

d. h. die beiden dem X_2 entsprechenden Elemente X_1 und X_3 vereinigen sich und zwar durchweg. Es sind also jedem Elemente zwei vereinigte zugeordnet, mithin an sich nur eins und wir haben es mit einer gemeinen Involution zu thun. *Die Correspondenz ist durch diese Involution, doppelt gerechnet, dargestellt;* die beiden einem Elemente in der Correspondenz entsprechenden sind in demjenigen zusammengefallen, das ihm in dieser Involution gepaart ist.

Der Directions-Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist ein doppelter Strahlenbüschel.

Wenn zwischen zwei verschiedenen Gebilden eine Involutions-Projectivität besteht (Nr. 17), so ist die involutorische Correspondenz in jedem der Gebilde, in der zwei Elemente desselben einander entsprechen, welche demselben Elemente des andern Gebildes correspondiren (Nr. 21), eine „Doppel-Involution", wie wir sie eben beschrieben haben.

Bei $n = 1$ müssen die Cyklen, wenn solche vorhanden sind, die Form haben:

$$X_1, \; X_2 \equiv X_1;$$

jedes Element fällt mit seinen beiden entsprechenden Elementen zusammen. Obwohl dabei alles Charakteristische einer involutorischen Correspondenz [2] verloren zu sein scheint, so werden wir doch bei den Congruenzen und Complexen 2. Grades diesem Specialfalle der [2] begegnen.

30 Wir erhielten eben eine involutorische Correspondenz [2], die, wenn sie von einem Kegelschnitt K getragen wird, eine Directionscurve $\mathfrak{K}$ hat, welche in einen doppelten Strahlenbüschel ausgeartet ist. Etwas allgemeiner ist der Fall, wenn $\mathfrak{K}$ in zwei verschiedene Strahlenbüschel zerfällt; [2] besteht dann aus zwei verschiedenen gemeinen Involutionen: jedem Elemente entsprechen die beiden Elemente, die ihm in denselben gepaart sind. —

Im allgemeinen berührt $\mathfrak{K}$ *den* K *nicht. Nehmen wir an, er thue es und zwar in zwei Punkten* T', T''; *dann sind in diese beiden Punkte alle Verzweigungs-, Doppel- und Coincidenzpunkte der* [2] *gerückt.*

Projicirt man entsprechende Punkte von [2] aus den Punkten O', O'' von K, so ergiebt sich, wie in Nr. 16, durch die Schnitte entsprechender Strahlen eine Curve 4. Ordnung, welche O', O'' zu Doppelpunkten hat. T', T'' liegen auf ihr, weil sie Coincidenzpnnkte von [2] sind. Da sie aber auch Verzweigungspunkte sind, so haben sich die beiden $O'T'$ entsprechenden Strahlen in $O''T'$ und ebenso die beiden $O''T'$ entsprechenden in $O'T'$ vereinigt; jeder dieser Strahlen trifft die Curve 4. Ordnung in zwei in T' vereinigten Punkten; d. h. T' und T'' sind Doppelpunkte der Curve 4. Ordnung, und dieselbe zerfällt in zwei Kegelschnitte, welche sich in O', O'', T', T'' begegnen.

Jeder Strahl aus O' (oder O'') trifft seinen einen entsprechenden aus O'' (oder O') auf dem einen und den zweiten auf dem andern von diesen beiden Kegelschnitten. Das sagt aus, dass [2] in zwei Projectivitäten zerfallen ist.

Wenn dieselben verschieden und dann nicht beide involutorisch sind, so würden jedem Punkte 4 (oder mindestens 3) andere entsprechen, diejenigen, die ihm bei der einen und der andern in jedem der beiden Sinne entsprechen. Also wäre [2] nicht involutorisch. Wären aber beide involutorisch, so würde zwar auch [2] involutorisch sein; aber $\mathfrak{K}$ zerfiele in zwei Strahlenbüschel, was wir jetzt nicht vorausgesetzt haben.

Also kann es sich nur um *eine und dieselbe Projectivität* handeln: *jedem Punkte correspondiren diejenigen beiden Punkte, die ihm in dieser projectiven Beziehung in beiderlei Sinne homolog sind*, oder die beiden von einem Punkte von K an $\mathfrak{K}$ kommenden Tangenten schneiden die ihm in beiderlei Sinne entsprechenden Punkte in K ein.*)

Auch *das Steiner'sche Schliessungs-Problem bei einer ebenen Curve* 31 *3. Ordnung***) lässt sich leicht auf die Betrachtung einer involutorischen Correspondenz [2] zurückführen, und es möge deshalb, obwohl wir im Folgenden desselben nicht bedürfen, gestattet sein, die Behandlung dieses Problems kurz anzudeuten.***)

Auf einer ebenen Curve 3. Ordnung C^3 sind zwei feste Punkte P, Q gegeben; A_1 sei ein beliebiger Punkt derselben, B_1 der dritte Schnitt von PA_1 mit C^3, A_2 derjenige von QB_1, B_2 der von PA_2, u. s. f., bis man zu A_{n+1} gelangt.

*) Steiner-Schröter's Vorlesungen über synthetische Geometrie S. 347 der zweiten Auflage (Leipzig 1876).

**) Steiner, Gesammelte Werke Bd. 2 S. 369; Schröter, Theorie der ebenen Curven 3. Ordnung § 31, wo auch die weitere Literatur angegeben ist.

***) Vergl. Hurwitz a. a. O.

Steiner's Satz sagt dann:

Wenn für irgend eine Lage von A_1 auf C^3 der Punkt A_{n+1} mit A_1 nicht zusammenfällt oder zusammenfällt, so geschieht dasselbe für jede Lage von A_1.

Man erkennt leicht, dass die beiden von PB_1 und PA_{n+1} beschriebenen Strahlenbüschel in einer involutorischen Correspondenz [2] sich befinden. Die 4 Coincidenzstrahlen ergeben sich in folgender Weise. Es sei, im Falle n gerade ist, $A_{\frac{n}{2}+1} \equiv B_{\frac{n}{2}+1}$ der Berührungspunkt einer der 4 von P kommenden Tangenten, oder, wenn n ungerade ist, $B_{\frac{n+1}{2}} \equiv A_{\frac{n+3}{2}}$ der Berührungspunkt einer der 4 von Q kommenden Tangenten. Die zugehörigen Punkte B_1 und A_{n+1} fallen zusammen und damit ergeben sich Coincidenzen unserer Correspondenz, aber, eben nicht, wie wir wünschen, durch Zusammenfallen von A_1 mit A_{n+1}. Auf andere Weise kann jedoch B_1 mit A_{n+1} nicht zusammenfallen. Wenn also doch — bei geeigneter Lage von P und Q — einmal A_{n+1} sich mit A_1 deckt, so hat die Correspondenz mehr als 4 Coincidenzen und dies Decken findet jedesmal statt.

Als Kennzeichen ergiebt sich, dass, wenn A_1 in den Berührungspunkt einer von P kommenden Tangente gelegt wird, im Falle eines geraden n dann der Punkt $A_{\frac{n}{2}+1}$ in den Berührungspunkt einer zweiten von P kommenden Tangente, wenn aber n ungerade ist, $B_{\frac{n+1}{2}}$ in den Berührungspunkt einer von Q kommenden Tangente fallen muss.

II.

32 Im Anschluss an das für einstufige und auf eine gerade Punktreihe projectiv beziehbare Gebilde geltende Chasles'sche Correspondenz-Princip (Nr. 12) sollen *die Correspondenz-Principien für das Punktfeld und den Punktraum oder allgemeiner für solche zwei- oder dreistufige Gebilde* abgeleitet werden, *welche collinear auf ein Punktfeld oder den Punktraum bezogen werden können.**) Wir wollen uns jedoch hier auf den allgemeinen Fall beschränken, dass bei den vorausgesetzten Cor-

*) Die Möglichkeit einer eindeutigen, aber nicht collinearen Beziehung berechtigt noch nicht zur Uebertragung; weil bei den höheren eindeutigen Transformationen stets Elemente — sogenannte Hauptelemente — vorhanden sind, denen unendlich viele Elemente entsprechen, und dadurch Coincidenzen in dem einen Gebilde sich ergeben können, welchen keine im andern correspondiren. Man vergleiche die in Nr. 206 vorgenommene Uebertragung des Correspondenz-Princips im Punktraum auf den linearen Complex.

respondenzen nur eine endliche Zahl von Coincidenz-Elementen, also nur sogenannte volle Coincidenzen vorkommen.*)

In einer Ebene seien also zwei Punktfelder Σ, Σ_1 so auf einander bezogen, dass jedem Punkte von Σ n_1 Punkte von Σ_1, jedem von Σ_1 n Punkte von Σ entsprechen und auf zwei gegebenen Geraden von Σ, bezw. Σ_1 m Paare entsprechender Punkte liegen, also einer Geraden von Σ oder Σ_1 eine Curve m^{ter} Ordnung in dem andern Felde correspondirt und jede Gerade der Ebene m Paare entsprechender Punkte enthält. *Ist die Correspondenz derartig, dass es nur eine endliche Zahl von Coincidenzen entsprechender Punkte giebt, so ist diese Zahl*

$$n + n_1 + m.$$

Wir suchen zunächst den Ort der Punkte X von Σ auf, die mit einem ihrer entsprechenden Punkte X_1 in Σ_1 auf einer Geraden durch einen gegebenen Punkt O der Ebene liegen. Bewegt X sich auf einer Geraden l und beschreiben die entsprechenden X_1 infolge dessen eine Curve l_1^m m^{ter} Ordnung, so entsteht im Strahlenbüschel um O eine Correspondenz $[m, n_1]$; jedem Strahl $x \equiv OX$ entsprechen die n_1 Strahlen x_1 von O nach den n_1 dem Punkte X von l entsprechenden Punkten X_1 auf l_1^m; jeder Strahl x_1 hat m Schnitte X_1 mit l_1^m, von denen jeder zwar an und für sich n entsprechende Punkte in Σ hat, aber nur einen auf l liegenden; also correspondiren jedem x_1 nur m Strahlen x. Die $n_1 + m$ Coincidenzstrahlen beweisen, dass es auf l so viele Punkte X giebt, die mit einem ihrer entsprechenden X_1 auf einer Geraden durch O liegen. Bei den ∞^1 Paaren entsprechender Punkte, deren Verbindungslinien durch O gehen, — auf jedem Strahle durch O liegen m Paare — bilden also die Punkte X eine Curve $(n_1 + m)^{\text{ter}}$, die Punkte X_1 eine Curve $(n + m)^{\text{ter}}$ Ordnung, für welche O n_1-, bezw. n-fach ist.

Lässt man nun in einem Strahlenbüschel der Ebene zwei solche Strahlen einander entsprechen, die nach entsprechenden Punkten dieser beiden Curven gehen, so entsteht in ihm eine Correspondenz

$$[n + m, \quad n_1 + m];$$

unter den $n + n_1 + 2m$ Coincidenzen, die sie nach Chasles' Correspondenz-Princip hat, befindet sich m-fach der Strahl nach O wegen der m Paare entsprechender Punkte, die er enthält. Die übrigen Coincidenzstrahlen lehren, dass es $n + n_1 + m$ Punkte X giebt, die

*) Hinsichtlich der allgemeinen Correspondenz-Principien, bei denen auch Coincidenzen niedrigerer Gattung (die dann Coincidenz-Curven, bezw. -Flächen erzeugen) berücksichtigt werden, sehe man Schubert Math. Annalen Bd. 10 S. 50—83 und Kalkül der abzählenden Geometrie (Leipzig 1879) 3. Abschnitt.

mit einem ihrer entsprechenden Punkte X_1 zusammenfallen, weil eben beide auf einem Strahle durch O und einem davon verschiedenen Strahle des Büschels liegen.

33 *Es seien zweitens Σ, Σ_1 zwei räumliche Systeme. Jedem Punkt X von Σ mögen n_1 Punkte X_1 in Σ_1, jedem X_1 von Σ_1 aber n Punkte X von Σ correspondiren; ferner möge es m Paare entsprechender Punkte geben, von denen der X auf einer gegebenen Geraden und der X_1 auf einer gegebenen Ebene liegt,* so dass einer Geraden in Σ eine Curve m^{ter} Ordnung und einer Ebene in Σ_1 eine Fläche m^{ter} Ordnung je im andern Systeme entspricht; *endlich gebe es m_1 Paare, von denen der X auf einer gegebenen Ebene, der X_1 auf einer gegebenen Geraden liegt. Lässt diese Correspondenz nur eine endliche Zahl von Coincidenzen zu so ist diese Zahl*

$$n + n_1 + m + m_1.$$

X durchlaufe eine Ebene Π; die Strahlen aus dem festen Punkte O je nach dem Punkte X und nach seinen entsprechenden Punkten X_1 erzeugen im Strahlenbündel O eine zweistufige Correspondenz von folgender Art. Jedem Strahle $x \equiv OX$ entsprechen n_1 Strahlen $x_1 \equiv OX_1$; jeder Strahl x_1 hat m_1 Schnittpunkte mit der Fläche m_1^{ter} Ordnung der Punkte X_1, die den Punkten X von Π correspondiren, und jedem derselben entspricht nur ein Punkt in Π; also entsprechen m_1 Strahlen x jedem x_1. Bewegt sich x in einem Strahlenbüschel von O, also X auf einer Geraden in Π, so beschreibt x_1 den Kegel m^{ter} Ordnung, der aus O die Curve projicirt, welche in Σ_1 dieser Geraden entspricht.

Nach dem auf den Strahlenbündel übertragenen vorangehenden Satze hat diese Correspondenz $n_1 + m_1 + m$ Coincidenzstrahlen, oder in Π giebt es so viele Punkte X, die mit einem ihrer entsprechenden X_1 auf einer Geraden durch O liegen. Wir haben demnach ∞^1 Paare entsprechender Punkte, deren Verbindungslinien durch O gehen: die zu Σ gehörigen Punkte derselben bilden eine Curve von der Ordnung $n_1 + m_1 + m$, die zu Σ_1 gehörigen eine von der Ordnung $n + m + m_1$. In einem Ebenenbüschel rufen also diese Punktepaare eine Correspondenz

$$[n + m + m_1, \; n_1 + m_1 + m]$$

hervor.

Eine Ebene durch O hat mit den beiden Curven, ausser dem n_1-, bezw. n-fachen Punkte O, noch je $m + m_1$ Punkte gemein; dies sagt aus, dass es in ihr so viele Paare entsprechender Punkte giebt, deren Verbindungslinien durch O gehen. Folglich ist die nach O gehende Ebene des Ebenenbüschels eine $(m + m_1)$-fache Coincidenz der Correspondenz; die $n + n_1 + m + m_1$ übrigen Coincidenzen gehören

zu Paaren entsprechender Punkte, die sowohl in einer Ebene des Büschels, als auch auf einer nicht in dieselbe fallenden Geraden durch O liegen, folglich sich im Schnitte beider vereinigen müssen.*)

Wir schliessen weiter hieran den Nachweis der Sätze *über die* 34
Anzahl der Strahlen, welche zwei Strahlenörtern mit der Stufensumme 4 gemeinsam sind, also entweder zwei Congruenzen, oder einem Complexe und einer Regelfläche, sowie den Beweis des *Correspondenz-Princips im Strahlenraume* an.

In einer Congruenz m^{ter} Ordnung und n^{ter} Klasse oder in einer Congruenz (m, n), bei welcher abkürzenden Bezeichnung immer die Ordnung zuerst genannt werden soll, *bilden stets die Strahlen, welche einer Geraden l begegnen, eine Regelfläche vom Grade $m + n$.*

Denn die Gerade l ist ersichtlich eine m-fache Leitlinie auf dieser Fläche und jede Ebene durch sie enthält n Erzeugende; demnach ist ihr Schnitt mit der Fläche von der Ordnung $m + n$. Ferner sind, wegen dieser n Erzeugenden, alle Ebenen durch l n-fache Berührungsebenen.

Es seien nun zwei Congruenzen (m, n) und (m', n') gegeben. Wir haben dann ∞^2 Paare von sich schneidenden Geraden g, g', von denen g zur ersten, g' zur zweiten Congruenz gehört und deren Schnittpunkt D sich auf einer festen Ebene E befindet; jeder Punkt von E ist Schnittpunkt von mm' solchen Paaren. Aus ihnen werden ∞^1 Paare ausgeschieden, bei denen auch die Verbindungsebene δ durch einen festen Punkt E geht. Zu diesen ∞^1 Paaren muss jedes Paar gg' gehören, das aus den in einem gemeinsamen Strahle der beiden Congruenzen vereinigten Strahlen besteht, weil bei ihm D und δ unbestimmt sind.

Die beiden Regelflächen vom Grade $m + n$, bezw. $m' + n'$, welche durch die einer Geraden l begegnenden Strahlen von (m, n) und (m', n') gebildet werden, haben, ausser dem Büschel n-facher, bezw. n'-facher Berührungsebenen um l, noch einen Torsus (abwickelbare Fläche) von Tangentialebenen gemein, dessen Klasse

$$(m + n)(m' + n') - nn' = mm' + mn' + nm'$$

*) Diese Beweise hat Zeuthen gegeben: Comptes rendus Bd. 78 (1874) S. 1553. Mit dem Beweise des ersteren Satzes vergleiche man den etwas anderen und nur für diesen besondern Fall geeigneten, welchen 1865 Cremona für die Zahl $m + 2$ der sich selbst entsprechenden Punkte eindeutig verwandter Felder derselben Ebene ($n = n_1 = 1$) gegeben hat: Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane Nota II (Memorie dell' Istituto di Bologna Ser. II Bd. 5 und Giornale di Matematiche Bd. 3 S. 269, 363).

ist. Die beiden Erzeugenden g, g' in jeder dieser Berührungsebenen gehen durch den Punkt, in welchem dieselbe die l trifft; $mm'+mn'+nm'$ von diesen Ebenen gehen durch E. Lässt man nun noch l in E fallen, so hat man:

Die Schnittpunkte D unserer ∞^1 Paare bilden in E eine Curve (D) von der Ordnung $mm'+mn'+nm'$, und, dual, die Verbindungsebenen δ umhüllen einen Kegel (δ) mit der Spitze E, dessen Klasse $nn'+mn'+nm'$ ist.

Die Regelfläche der Geraden g unserer Paare aus der Congruenz (m, n) hat zum Grade die Summe der Ordnung der eben gefundenen Curve, welche auf ihr einfache Leitcurve ist, und die Anzahl der Paare, deren g in E liegt; da in E n Gerade g liegen und jede derselben mit den n' Geraden g' gepaart ist, die in ihrer Verbindungsebene mit E sich befinden, so ist diese Anzahl nn'. Demnach hat die Regelfläche der Strahlen g unserer Paare und ebenso diejenige der Strahlen g' den Grad $(m+n)(m'+n')$.

In einem beliebigen Strahlenbüschel (O, ω) bewirkt nun dies einfach unendliche System (∞^1-System) von Strahlenpaaren eine Correspondenz, in der solche Strahlen des Büschels sich entsprechen, welche gepaarte Strahlen treffen. Ersichtlich ist dieselbe eine

$$[(m+n)(m'+n'),\ (m+n)(m'+n')].$$

Die Coincidenzen derselben kommen auf dreierlei Weise zu stande. Wenn zwei verschiedene sich schneidende Geraden g, g' von demselben Strahle von (O, ω) getroffen werden, so muss er entweder in ihre Ebene fallen, so dass diese durch O geht, oder durch ihren Schnittpunkt gehen, so dass dieser in ω fällt. Wegen der Klasse von (δ) und der Ordnung von (D) geschieht jenes $(nn'+mn'+nm')$-mal, dieses $(mm'+mn'+nm')$-mal. Nach Abzug der dadurch sich ergebenden Coincidenzen bleiben von den $2(m+n)(m'+n')$, welche die Correspondenz in (O, ω) hat, noch $mm'+nn'$ übrig, welche von solchen unserer Paare herrühren, deren beide Gerade sich vereinigt haben. Also:

Zwei Congruenzen (m, n) und (m', n'), d. h. m^{ter} Ordnung und n^{ter} Klasse, bezw. m'^{ter} Ordnung und n'^{ter} Klasse haben

$$mm'+nn'$$

Strahlen gemeinsam. (Satz von Halphen)

Den vorangehenden einfachen Beweis verdankt man Schubert.*)

*) Mathem. Annalen Bd. 10 S. 95, 96; Kalkül der abzählenden Geometrie S. 62. Der leitende Gedanke des Beweises von Halphen, der den Satz zuerst

Ist die eine Congruenz ein Strahlennetz: $m' = n' = 1$, so erhält man den obigen dem Beweise vorangeschickten Satz über die Regelfläche der Strahlen einer Congruenz, welche eine Gerade treffen.

Zwei Complexe von den Graden p und p_1 haben eine Congruenz 35
vom Grade (d. h. von der Ordnung und der Klasse) pp_1 gemein (Nr. 7).

Liegen vier Complexe vor, so sind ihre gemeinsamen Strahlen diejenigen, welche der Schnittcongruenz zweier und derjenigen der beiden andern gemeinschaftlich sind. Also:

Vier Complexe, deren Gradzahlen bezw. p, p_1, p_2, p_3 *sind, haben*

$$2pp_1p_2p_3$$

Gerade gemein.

In Nr. 9 wurde dies schon für den Specialfall von 4 Complexen gewonnen, welche durch die Treffgeraden von je einer Curve gebildet werden; insbesondere ist Steiner's Satz über die beiden Treffgeraden von 4 Geraden (Nr. 4) der einfachste Specialfall.

Ist einer der 4 Complexe, etwa der vierte, ein Strahlengebüsche ($p_3 = 1$), so hat man: Von den Strahlen, welche den drei ersten Complexen gemein sind, treffen $2pp_1p_2$ die Axe des Gebüsches. Oder:

Drei Complexe von den Graden p, p_1, p_2 *haben eine Regelfläche gemein, deren Grad*

$$2pp_1p_2$$

ist.

Es sei ein Complex vom Grade p und eine Congruenz (m, n) gegeben; ihre gemeinsamen Geraden erzeugen eine Regelfläche. Von derselben treffen so viele eine Gerade l, als die Congruenz (m, n) mit der Congruenz (p, p) Strahlen gemein hat, in welcher der gegebene Complex und das Strahlengebüsche, dessen Leitgerade l ist, sich schneiden, also $pm + pn$. Demnach:

Ein Complex vom Grade p *und eine Congruenz, deren Ordnung* m *und deren Klasse* n *ist, haben eine Regelfläche vom Grade*

$$p(m + n)$$

gemeinsam.

Wir wenden uns nun zum zweiten Falle. Ein Complex Γ vom 36
p^{ten} Grade und eine Regelfläche ϱ vom Grade q sind gegeben. Wir paaren ebenfalls solche sich schneidende Geraden g von Γ und g' von ϱ, deren Schnittpunkt D in E liegt und deren Verbindungsebene δ

ausgesprochen hat (Comptes rendus Bd. 74 S. 41), weshalb er *Satz von Halphen* genannt wird, ist im Grunde derselbe; nur ist dieser Beweis durch Hereinziehen von der Sache fremden metrischen Betrachtungen complicirt worden. Man vergl. auch Zeuthen Comptes rendus Bd. 78 S 1553.

durch E geht. Die Curve (D) der Punkte D ist die Schnittcurve q^{ter} Ordnung der Fläche ϱ mit der Ebene E, aber p-fach gerechnet, weil der Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Spurpunkt einer Geraden g' von ϱ in E ist und dessen Ebene g' mit E verbindet, p Strahlen von Γ enthält und folglich g' mit p Geraden g gepaart ist. Ebenso ist der Kegel (δ) der Ebenen δ der p-fach gerechnete Berührungskegel q^{ter} Klasse von E an ϱ. Die Regelfläche der Geraden g' der Paare ist die ϱ selbst, ebenfalls p-fach gerechnet. Die Regelfläche aber der Geraden g der Paare ist vom Grade $2pq$. Denn der Punkt E ist ein pq-facher Punkt derselben, weil der von ihm ausgehende Complexkegel von Γ die Curve $\varrho\mathsf{E}$ pq-mal trifft und also durch E pq Gerade g von Γ gehen, die sich mit Geraden g' von ϱ auf E schneiden. Eine beliebige Gerade aber durch E trifft q Erzeugende von ϱ und wird von den pq Geraden g, welche denselben gepaart sind, getroffen, und ersichtlich muss sie, weil sie durch E geht, wenn sie die Gerade g eines Paares trifft, auch der g' begegnen.

Die Correspondenz im Strahlenbüschel (O, ω) ist mithin im jetzigen Falle so beschaffen, dass einem Strahle l (d. h. welcher eine g zu treffen hat) $2pq$ Strahlen l', einem l' aber pq Strahlen l entsprechen. Von den $3pq$ Coincidenzen rühren pq von den Paaren her, deren D in ω liegt, pq von denen, deren δ durch O geht, die pq übrigen von solchen, deren beide Geraden zusammengefallen sind. Also:

*Ein Complex p^{ten} Grades und eine Regelfläche q^{ten} Grades haben pq Gerade gemein.**)

Ist die Regelfläche der Durchschnitt dreier Complexe (Nr. 35), so haben wir wieder den obigen Satz über die gemeinsamen Strahlen von 4 Complexen.

37 In ganz ähnlicher Weise, wie diese Halphen'schen Sätze, kann das Correspondenz-Princip im Strahlenraume bewiesen werden.

Zwischen zwei Strahlenräumen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ bestehe eine Correspondenz ihrer Strahlen x und x_1: Jedem Strahle x von $\mathfrak{S}$ entsprechen n_1 Strahlen x_1 von $\mathfrak{S}_1$, jedem x_1 aber n Strahlen x. Ferner, wenn x einen Strahlenbüschel beschreibt, so erzeugen die entsprechenden Strahlen x_1 eine Regelfläche vom Grade m_1 oder, was dasselbe ist, wenn x_1 sich in einem Strahlengebüsche bewegt, so beschreiben die entsprechenden Strahlen x einen Complex vom Grade m_1. *Durchläuft aber x_1 einen Strahlenbüschel, so erzeugen die entsprechenden Strahlen eine Regelfläche vom Grade m* und einem Strahlengebüsche in $\mathfrak{S}$ entspricht also ein Com-

*) Vergl. Halphen Comptes rendus Bd. 73 S. 1441 und Schubert an beiden angef. Orten.

plex m^{ten} Grades. *Endlich gebe es p Paare entsprechender Strahlen x und x_1, welche durch zwei gegebene Punkte bezw. gehen, und p' Paare, welche in gegebene Ebenen fallen*, oder wenn der Strahl in dem einen der beiden Räume einen Bündel, bezw. ein Feld durchläuft, so erzeugen die entsprechenden Strahlen im andern Raume eine Congruenz p^{ter} Ordnung, bezw. eine Congruenz p'^{ter} Klasse.

Die Klasse der ersteren, die Ordnung der zweiten Congruenz bedürfen wir nicht.

Wir scheiden aus unsern ∞^4 Paaren entsprechender Strahlen x und x_1 die ∞^1 Paare aus, bei denen die beiden Strahlen sich schneiden, ihren Schnittpunkt D in einer gegebenen Ebene E haben und ihre Verbindungsebene δ durch einen gegebenen Punkt E senden.

Nehmen wir an, dass es t Paare mit sich schneidenden entsprechenden Strahlen gebe, bei denen der Schnittpunkt sowohl wie die Verbindungsebene mit derselben gegebenen Geraden l incidiren. Von jedem Punkte dieser Geraden gehen p Paare in ihm sich schneidender entsprechender Strahlen aus; denn dem Bündel aus ihm, zu dem einen Raume gerechnet, entspricht im andern Raume eine Congruenz p^{ter} Ordnung, zu der p Strahlen vom Punkte kommen. Folglich ist die Klasse des Torsus der Verbindungsebenen der Paare in den verschiedenen Punkten von l sich schneidender entsprechender Strahlen $p + t$, da durch einen beliebigen Punkt von l so viele gehen, nämlich p, deren Strahlen in ihm selbst sich schneiden, t, deren Strahlen es in einem andern Punkte von l thun. Folglich gehen auch so viele von den genannten Verbindungsebenen durch E. Also, wenn wir nun l in der Ebene E liegend annehmen, haben wir:

Die in E gelegene Curve (D) der Schnittpunkte D unserer ∞^1 Paare ist von der Ordnung $p + t$.

Ebenso dual:

Der von E ausgehende Kegel (δ) der Verbindungsebenen δ dieser Paare ist von der Klasse $p' + t$.

Untersuchen wir nun den Grad der Regelfläche der Strahlen x der Paare. Er ist gleich der Summe aus der Ordnung von (D) und der Anzahl von Geraden x dieser Paare, welche in die Ebene E fallen. Die Curve (D) ist nämlich auf dieser Regelfläche einfach, da in unsern Paaren, im allgemeinen, einem Strahle nur ein anderer gepaart ist. Um die zweite Zahl zu ermitteln, haben wir die Klasse der Congruenz der Strahlen x aufzusuchen, die mit einem ihrer entsprechenden Strahlen x_1 sich so schneiden, dass die Verbindungsebene durch E geht. Es sei ξ eine beliebige durch E gehende Ebene. Den in sie fallenden Strahlen x entspricht eine Congruenz p'^{ter} Klasse von

Strahlen x_1; also haben wir in ξ p' Paare entsprechender Strahlen. Unter den Strahlen durch E in ξ giebt es aber auch solche, die sich mit einem ihrer entsprechenden Strahlen schneiden und deshalb auch zu unserer Congruenz gehören. Dem Strahlenbüschel (E, ξ), gebildet von Strahlen x, entspricht eine Regelfläche vom Grade m_1 in $\mathfrak{S}_1$; nennen wir x_1' den Strahl von (E, ξ), der eine der Erzeugenden dieser Regelfläche trifft, die einem Strahle x entspricht, so erhalten wir im Strahlenbüschel (E, ξ) eine Correspondenz $[m_1, n_1]$, denn jedem Strahle x entsprechen die n_1 Strahlen x_1', die den n_1 entsprechenden Strahlen x_1 begegnen; jeder x_1' aber trifft m_1 Erzeugende x_1 der Regelfläche, von denen jede nur einen entsprechenden x im Strahlenbüschel hat. Die $n_1 + m_1$ Coincidenzen beweisen, dass so viele Strahlen x dieses Büschels einem ihrer entsprechenden Strahlen begegnen. Folglich enthält die Congruenz $p' + n_1 + m_1$ Strahlen in ξ und ist von dieser Klasse.

Die Regelfläche der Strahlen x unserer Paare hat daher den Grad

$$p + t + p' + n_1 + m_1,$$

und die der Strahlen x_1 den Grad

$$p + t + p' + n + m.$$

In einem beliebigen Strahlenbüschel (O, ω) rufen diese Regelflächen eine Correspondenz hervor, in der sich zwei Strahlen entsprechen, welche zwei zusammengehörige x und x_1 treffen. Dieselbe ist, da zu jeder Erzeugenden der einen Regelfläche, im allgemeinen, nur eine von der andern gehört, eine

$$[p + t + p' + n + m, \; p + t + p' + n_1 + m_1].$$

Von den Coincidenzen rühren $p + t$ von den Begegnungspunkten der Curve (D) mit der Ebene ω, $p' + t$ von den Berührungsebenen des Kegels (δ) her, die durch O gehen; die übrigen weisen auf Coincidenzstrahlen der beiden Räume hin; *folglich ist die Zahl der Strahlen des einen Raumes, die sich mit einem ihrer entsprechenden Strahlen im andern Raume vereinigt haben:*

$$n + m + p + p' + m_1 + n_1.$$

Vorausgesetzt ist dabei wiederum, dass die Correspondenz nur eine endliche Zahl von Coincidenzen besitzt.*)

Im Falle das Entsprechen durch eine Collineation hervorgebracht

*) Hinsichtlich des allgemeineren Correspondenz-Princips sehe man Schubert, Math. Annalen Bd. 10 S. 68 und Kalkül der abzählenden Geometrie S. 63 Formel (33).

wird, sind alle sechs Zahlen gleich 1, und die Zahl der Coincidenz-Strahlen 6: die 6 Kanten des sich selbst entsprechenden Tetraeders.

Liegt aber eine Correlation oder Reciprocität zu Grunde, so ist nur $n = n_1 = m = m_1 = 1$, hingegen $p = p' = 0$; denn einem Bündel oder Felde des einen Raumes entspricht ein Feld, bezw. Bündel im andern. Also giebt es 4 sich selbst entsprechende Strahlen, die 4 Seiten des Vierseits, in dem sich die beiden Kernflächen der Correlation durchschneiden.*)

*) Schröter, Journal für Mathematik Bd. 77 S. 105 Theil B.

Die Regelflächen dritten und vierten Grades.

38 Eine Regelfläche ist, wie schon in Nr. 5 bemerkt wurde, gleichzeitig ein Ort 1. Stufe von Strahlen, ein Ort 2. Stufe von Punkten und ein Ort 2. Stufe von Ebenen; Rang, Ordnung und Klasse dieser 3 Oerter sind alle gleich dem Grade der Regelfläche.

Die Punkte und Ebenen der beiden letzten Oerter sind die Punkte auf den Erzeugenden, die Ebenen durch dieselben. Ist n der Grad der Regelfläche, so hat eine Ebene ξ durch eine Erzeugende g noch einen Restschnitt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; von den $n-1$ Schnittpunkten desselben mit g zeichnet sich einer X aus. Diese Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist nämlich der Ort der Spuren der Erzeugenden in ξ, und X ist derjenige Punkt, welcher in der stetigen Folge dieser Spuren der in die Ebene ξ fallenden Erzeugenden g zukommt. Man erhält X, wenn man die Verbindungslinie der Spuren der beiden der g benachbarten Erzeugenden g', g'' mit g schneidet. Diese Gerade, die Tangente der Restschnittcurve im Punkte X, ist die zweite dreipunktig berührende oder Haupttangente der Fläche in X, ausser g, und ξ die Berührungsebene der Fläche in X.

Zieht man also, umgekehrt, aus einem Punkte X von g die Gerade, welche g' und g'' trifft, so bestimmt dieselbe mit g die Tangentialebene ξ von X.

Das durch die 3 auf einander folgenden Erzeugenden g, g', g'' gehende Hyperboloid — welches die Fläche „längs g osculirt“ — hat daher in jedem Punkte von g dieselbe Berührungsebene wie die Regelfläche, und die Punktreihe der X, der Ebenenbüschel der ξ sind, wie beim Hyperboloide, projectiv, indem jeder Punkt X seiner Berührungsebene ξ entspricht.

Die $n-2$ übrigen Schnittpunkte der g mit der Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind Spuren von Erzeugenden, welche der g nicht benachbart sind, und also Doppelpunkte, ev. mehrfache Punkte der Fläche.

Jede Regelfläche von höherem als 2. Grade hat also mindestens eine vielfache Curve; ist dieselbe nur eine Doppelcurve, so begegnet jede Erzeugende derselben $(n-2)$-mal. Ist eine μ-fache Curve vorhanden, so

geht der Restschnitt $(n - 1)^{ter}$ Ordnung durch den Stützpunkt einer Erzeugenden auf dieselbe $(\mu - 1)$-mal.

Eine Ebene durch μ' Erzeugende ist eine μ'-fache Berührungsebene. Wenn $n > 2$ ist, so muss mindestens ein Torsus von vielfachen Berührungsebenen vorhanden sein.

Wird eine Erzeugende g von ihrer benachbarten g' getroffen, so ist die Ebene beider die Berührungsebene für jeden beliebigen Punkt X von g; denn die von X ausgehende und g', g'' treffende Gerade fällt in sie hinein. Die Ebene gg' berührt also die Fläche längs g, wie die Berührungsebene einer abwickelbaren Fläche oder eines Torsus, „torsal" und g heisst deshalb eine *Torsallinie* der Fläche (Nr. 14). *Jeder andern Ebene ξ durch g gehört als Berührungspunkt der Punkt gg' zu*, denn die in ihr befindliche und g', g'' treffende Gerade geht durch gg'. Die Projectivität zwischen den Punkten X und Berührungsebenen ξ ist also in diesem Falle ausgeartet, so dass der Punkt gg' und die Ebene gg' die singulären Elemente sind.

Der Punkt gg' muss einer vielfachen Linie angehören und ist auf ihr ein *Cuspidal-* oder *Rückkehrpunkt* (pinchpoint) und die g heisst deshalb auch Cuspidal-Erzeugende.

In eine beliebige Ebene fällt kein Cuspidalpunkt und ebenso geht, dual, durch einen beliebigen Punkt keine Berührungsebene mit zwei unendlich nahen Erzeugenden, weil die Zahl der Cuspidalpunkte und der torsal berührenden Ebenen eine endliche ist. Folglich hat der ebene Schnitt n^{ter} Ordnung im allgemeinen nur doppelte, keine Rückkehrpunkte und der Berührungskegel n^{ter} Klasse nur doppelte, nicht Wende-Berührungsebenen; wobei mehrfache Punkte oder Berührungsebenen in doppelte umgerechnet sind.

Ist nun r der Grad des Tangentencomplexes der Fläche, also zugleich Klasse des ebenen Schnitts und Ordnung des Berührungskegels — gewöhnlich Rang der Fläche genannt —, so hat der ebene Schnitt $\frac{1}{2}[n(n-1)-r]$ Doppelpunkte und der Berührungskegel ebenso viele doppelte Tangentialebenen.

*Daher ist bei einer Regelfläche stets die Ordnung der Doppelcurve gleich der Klasse des Torsus der doppelten Berührungsebenen.**)

Die Erzeugenden rufen auf allen ebenen Schnitten eindeutige Be- 39
ziehungen hervor, in denen sich je die Spuren der nämlichen Erzeugenden entsprechen, und zwar nicht blos auf den vollständigen,

*) Cremona, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen, deutsch von Curtze (Berlin 1870) Nr. 56.

sondern auch auf den durch eine oder mehrere Erzeugende ergänzten von der $(n-1)^{\text{ten}}, \ldots$ Ordnung.

Also sind, nach dem bekannten Satze*), *alle diese Schnitte von gleichem Geschlechte*, welches deshalb als *Geschlecht der Fläche* bezeichnet wird.

*Die Regelflächen 3. Grades***) enthalten nun in ihren Berührungsebenen Kegelschnitte, deshalb *sind alle ebenen Schnitte vom Geschlechte* 0 *oder unicursal.*

Jeder volle ebene Schnitt hat also einen Doppelpunkt, und *die Fläche ϱ^3 enthält eine Doppelgerade.**)

Jede Ebene durch diese Gerade schneidet noch eine Gerade aus; also *macht eine doppelte Gerade eine Fläche 3. Ordnung zur Regelfläche*, und ferner *ist dieselbe jedenfalls Leitlinie*, und wir haben zwei Fälle zu unterscheiden: *entweder ist die doppelte Gerade doppelte Leitlinie oder zugleich einfache Leitlinie und einfache Erzeugende.*

Wenn d eine doppelte Leitgerade ist, die von jedem ihrer Punkte zwei Erzeugende aussendet, so besteht zwischen der Punktreihe auf ihr und derjenigen auf dem Kegelschnitte C^2 in irgend einer Tangentialebene eine Correspondenz [1, 2].***) Daher befindet sich (Nr. 21) auf C^2 eine Involution und die Verbindungslinien gepaarter Punkte, d. h. die Spuren, in der Ebene von C^2, der Verbindungsebenen der je von demselben Punkte von d kommenden Erzeugenden bilden einen Strahlenbüschel. Folglich geht durch jeden Punkt der genannten Ebene, also durch jeden Punkt des Raumes eine solche Verbindungsebene und alle diese Ebenen bilden einen Büschel, dessen Axe eine zweite und zwar einfache Leitgerade ist und den Schnitt 3. Ordnung in allen diesen Ebenen vervollständigt.

Die Regelfläche ϱ^3 hat demnach, ausser der doppelten Leitgeraden d, noch eine einfache e.

*) Vergl. z. B. Cremona, a. eben a. O. Nr. 57; Zeuthen, Mathem. Annalen Bd. 3 S. 150; Schubert, ebenda Bd. 16 S. 180; Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie Bd. 1 S. 681; Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curven, Abschnitt VI.

**) Cremona, Atti dell' Istituto lombardo 1861; Journal für Mathematik Bd. 60 S. 313; Em. Weyr, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse einzweideutiger Gebilde (Leipzig 1870); sowie: Fiedler's Darstellende Geometrie, Art. 114 und Salmon-Fiedler's Raumgeometrie Bd. 2 S. 365 der 3. Aufl.

***) Wir halten uns bei dem Zeichen $[m, n]$ für eine Correspondenz an die Reihenfolge, so dass jedem Elemente des *zuerst* genannten Gebildes n Elemente im zweiten entsprechen und jedem von diesem m von jenem; in unserem Falle also correspondiren jedem Punkte von d 2 Punkte von C^2, jedem von C^2 einer auf d.

*)

n	k	d	p	r
3	6	0	1	0
3	4	1	0	0

In dualer Beziehung vertauschen d und e ihre Rolle; indem jede Ebene durch d nur eine, jede durch e aber zwei Erzeugende enthält, *ist d Axe eines Büschels einfacher, und e Axe eines Büschels doppelter Berührungsebenen.*

Die obige Correspondenz [1, 2] hat auf d zwei Verzweigungspunkte (Nr. 13), denen die Doppelpunkte der Involution auf C^2 entsprechen; jene sind *die beiden Cuspidalpunkte auf d* und die Fläche ϱ^3 hat *2 Torsallinien.*

C^2 trifft d in dem Punkte, in dem die ergänzende Gerade g_0 von C^2 sich auf d stützt; als Punkt von d hat er sich mit einem von seinen beiden entsprechenden Punkten auf C^2 vereinigt, weil die eine der von ihm ausgehenden Erzeugenden nicht in die Ebene von C^2 fällt. Ohne diesen sich selbst entsprechenden Punkt würde die Projectivität der Punktreihe von d zur Involution auf C^2 zu einer Regelfläche 4. Grades führen; wie die Correspondenz [2, 2] in einem beliebigen Ebenenbüschel lehrt, in welcher Ebenen nach entsprechenden Punkten von d und C^2 einander correspondiren.

Von e wird C^2 nicht getroffen und *zwischen den Punktreihen von e und C^2 besteht eine Projectivität, und durch eine solche Projectivität kann die ϱ^3 in der einfachsten Weise erzeugt werden.*

Von jedem Punkt der ϱ^3 kommt, nach Abscheidung des Ebenenbüschels um die ihn enthaltende Erzeugende, ein Tangentialkegel 2. Grades, dessen Berührungsebenen nach den verschiedenen Erzeugenden gehen; dieser Ebenenbüschel 2. Klasse steht zu dem von d in Projectivität und zu dem um e in einer Correspondenz [2, 1].

Ferner befinden sich auch die Punktreihen auf den beiden Leitgeraden d und e in einer Correspondenz [1, 2], *und ebenso die Ebenenbüschel um e und d.* Die Verzweigungspunkte der ersteren auf d sind die Cuspidalpunkte, die Verzweigungsebenen der letzteren im Büschel e die torsal berührenden Ebenen.

Auch zwischen den Punktreihen auf d oder e und auf einem vollen ebenen Schnitte findet eine Correspondenz [1, 2], bezw. [1, 1] statt.

Zwei gegebene Geraden sind Leitgerade für ∞^5 cubische Regelflächen (Nr. 12).

Im zweiten Falle, in dem d zugleich einfache Leitlinie und Erzeugende ist, besteht zwischen den Punktreihen auf d und dem Kegelschnitte C^2 in einer Berührungsebene, welcher, wie von jeder Erzeugenden, so auch von d getroffen wird, *eine Projectivität, jedoch ohne sich selbst entsprechenden Punkt im Begegnungspunkte. Die Erzeugende d ist eine Torsallinie,* denn wie von jeder, so wird sie auch von der unendlich nahen Erzeugenden getroffen und zwar in dem Punkte, welcher in der

eben erwähnten Projectivität dem Punkte dC^2, insofern er zu C^2 gehört, entspricht.

Von jedem Punkte der Leitlinie d gehen auch hier 2 Erzeugende aus, von denen aber die eine sich stets mit d vereinigt; dadurch hat d die Eigenschaft der doppelten Leitgeraden d des vorigen Falles.

In jeder Ebene durch d liegen ebenfalls zwei Erzeugende, von denen aber wiederum die eine stets mit d zusammenfällt; der zugehörige Berührungspunkt der Ebene, als Doppel-Berührungsebene, ist der Cuspidalpunkt. Damit hat d die Eigenschaft der Leitlinie e des vorigen Falls.

Also ist der jetzige Fall aus dem vorigen dadurch entstanden, dass die beiden Leitgeraden d und e sich vereinigt haben; nach Cayley, der zuerst auf diesen Fall aufmerksam gemacht*), wird diese Regelfläche 3. Grades benannt.

Beide Regelflächen 3. Grades sind in sich dual.

40 Bei einer *Regelfläche 4. Grades***) sind die Restcurven in den Tangentialebenen 3. Ordnung, also vom Geschlechte 1 oder 0. *Daher zerfallen die Regelflächen dieses Grades in solche vom Geschlechte* 1 *und in unicursale.*

Die ersteren haben also ebene Schnitte 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten, mithin *eine Doppelcurve 2. Ordnung.* Jede Erzeugende muss ihr zweimal begegnen (Nr. 38); also kann die Doppelcurve kein Kegelschnitt sein, sondern *sie muss aus 2 windschiefen Geraden bestehen, welchen beiden alle Erzeugenden begegnen.*

Zwei windschiefe Doppelgeraden machen, umgekehrt, *eine Fläche 4. Ordnung zur Regelfläche*, weil aus jedem Punkte derselben eine Gerade kommt, welche beide trifft und, wegen der 5 gemeinsamen Punkte, der Fläche vollständig angehört.

Jedenfalls aber sind beide Geraden d_1, d_2 *Leitlinien* und eine doppelte Erzeugende ist bei den Regelflächen 4. Grades vom Geschlechte 1 ausgeschlossen.

Es seien nun erstens d_1, d_2 *doppelte Leitlinien (Art I).* Dann geht die Verbindungsebene der beiden Erzeugenden aus einem Punkte der einen Leitgeraden durch die andere; *beide Leitlinien sind zugleich Axen von Büscheln doppelter Berührungsebenen* und die ϱ^4 ist in sich dual.

*) Philos. Transactions Bd. 154 (1864) S. 559.

**) Chasles, Comptes rendus Bd. 53 (1861) S. 888; Cayley a. eben a. O. und Philos. Transactions Bd. 159 (1869) S. 111; Cremona, Memorie dell' Istituto di Bologna Ser. II Bd. 8 (1868) S. 15; Salmon-Fiedler's Raumgeometrie Bd. 2 S. 430 der 3. Auflage und K. Rohn, Math. Annalen Bd. 24 S. 145 und Bd. 28 S. 284.

m	K	d	p	r
4	12	0	3	0
4	10	1	2	0
4	8	2	1	0
4	6	3	0	0

Zwischen den Punktreihen auf d_1, d_2 *sowohl, wie zwischen den Ebenenbüscheln um diese Geraden besteht eine Correspondenz* [2, 2]. Die Verzweigungspunkte der ersteren Correspondenz zeigen (Nr. 13, 14), dass *jede der beiden Doppelgeraden 4 Cuspidalpunkte hat,* und aus Nr. 15 wissen wir, dass die beiden Würfe der Cuspidalpunkte, sowie die zu ihnen perspectiven Würfe der torsal berührenden Ebenen gleiches Doppelverhältniss haben.

Zwei gegebene Geraden sind Leitgerade für ∞^8 *von Regelflächen dieser Art* (Nr. 12).

Zwischen einer der beiden Leitgeraden und der Curve 3. Ordnung C^3 (ohne Doppelpunkt) in einer Berührungsebene besteht, vermittelt durch die Erzeugenden, eine Correspondenz [1, 2], bei welcher die Involution auf C^3 durch die Strahlen eines Büschels eingeschnitten wird, der seinen Scheitel im Begegnungspunkte der C^3 mit der anderen Leitgeraden hat.

Umgekehrt, wenn eine Gerade d_1 und eine ebene C^3 ohne Doppelpunkt gegeben sind, welche einander in D_1 begegnen, so beziehe man die Punktreihe auf d_1 so projectiv auf eine Involution, die in C^3 durch einen Strahlenbüschel eingeschnitten wird, dessen Scheitel D_2 auf dieser Curve liegt, dass dem D_1 als Punkte von d_1 das Paar entspricht, zu dem D_1 gehört. Erzeugniss der Verbindungslinien entsprechender Punkte ist eine ϱ^4, für welche d_1 doppelte Leitgerade ist. Der genannte Strahlenbüschel und derjenige, der aus D_2 die Punktreihe auf d_1 projicirt, sind so perspectiv, dass der Strahl D_2D_1 sich selbst entspricht; also erzeugen sie einen Ebenenbüschel und dessen Ebenen verbinden die von den Punkten der d_1 kommenden Paare der Erzeugenden. Also ist seine Axe d_2 die zweite Leitgerade: durch jeden Punkt von ihr gehen die beiden Erzeugenden, welche von den Schnitten, mit C^3, der Ebene, die ihn mit d_1 verbindet, nach den entsprechenden Punkten auf d_1 gehen.

Lassen wir aber D_2 in D_1 rücken und dem Punkte D_1 von d_1 die Tangente in ihm an C^3 und das auf ihr befindliche Paar der Involution, zu welchem D_1 gehört, entsprechen, so liegen nun alle gepaarten Punkte der Involution mit d_1 in einer Ebene; folglich geht die Ebene jedes Erzeugenden-Paares aus einem Punkte von d_1 durch diese Gerade, d. h. d_2 *hat sich mit* d_1 *vereinigt (Art II).* In dieser Ebene aber haben sich die beiden Berührungsebenen des Punktes vereinigt. Die erwähnte Tangente ist die in die Ebene von C^3 fallende Erzeugende. Folglich berührt in jeder Tangentialebene die Curve 3. Ordnung die ergänzende Erzeugende in dem Punkte, in dem

diese sich auf die Leitgerade $d_1 \equiv d_2$ stützt; der dritte Schnitt ist der Berührungspunkt.

Diese Leitgerade ist nicht zugleich Erzeugende.

Alle ebenen (und nicht zerfallenden) Schnitte haben auf der Leitgeraden eine Selbstberührung. —

Dass eine der beiden doppelten Geraden d_1, d_2 nicht doppelte Leitgerade, sondern einfache Leitgerade und zugleich Erzeugende ist, ist nicht möglich, weil sie als Erzeugende der andern Leitgeraden begegnen müsste, d_1, d_2 aber windschief sind.

41 Bei *den unicursalen Flächen* ϱ^4 haben die ebenen Schnitte entweder, im allgemeinen, 3 Doppelpunkte oder durchweg einen dreifachen; also haben wir zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

a) *Regelflächen* ϱ^4 *mit einer Doppelcurve 3. Ordnung* D^3,

b) *Regelflächen* ϱ^4 *mit einer dreifachen Geraden* d^3.

Die Curven C^3 in den Berührungsebenen haben einen Doppelpunkt; im Falle b) ist er der Stützpunkt der ergänzenden Erzeugenden g auf d^3. Im Falle a) aber liegt er ausserhalb der g und die beiden andern Schnitte der Ebene von C^3 mit der D^3 sind die beiden Stützpunkte von g auf D^3.

Im Falle a) *treffen also,* entsprechend dem Satze von Nr. 38, *alle Erzeugenden die Doppelcurve* D^3 *zweimal.*

Es sei nun erstens die Doppelcurve eine nicht zerfallende cubische Raumcurve (*Art III*).

Durch eine doppelte cubische Raumcurve wird eine Fläche 4. Ordnung zur Regelfläche, weil aus jedem ihrer Punkte eine Doppelsecante an die Curve kommt.

Auf D^3 *entsteht durch die Erzeugenden eine involutorische Correspondenz* [2] und umgekehrt, wenn auf einer cubischen Raumcurve eine solche Correspondenz sich befindet, so erzeugen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine ϱ^4, welche die Curve zur Doppelcurve hat (Nr. 24).

Also ist eine gegebene cubische Raumcurve für ∞^5 *von solchen Regelflächen Doppelcurve* (Nr. 18).

Es sind 4 Cuspidalpunkte und 4 Torsallinien vorhanden.

Die Ebene, welche einen Punkt X von D^3 mit seinen beiden entsprechenden X' verbindet, enthält 2 Erzeugende und ist also *doppelte Berührungsebene* der ϱ^4. *Diese Ebenen umhüllen einen Torsus 3. Klasse;* denn durch jeden Punkt von D^3 gehen 3; in einer ist er der X, in den beiden andern einer von den X'.

Durch jede Erzeugende gehen 2 Ebenen dieses Torsus, und in ihm entsteht ebenfalls eine involutorische Correspondenz [2], in der

zwei durch die nämliche Erzeugende gehenden Ebenen einander entsprechen.

In einer solchen doppelten Berührungsebene befindet sich ein *Kegelschnitt* C^2. Zwei derartige Kegelschnitte C^2, C_1^2 begegnen einander nicht, vielmehr trifft jeder die beiden Erzeugenden in der Ebene des andern. im allg. außer in besondern Fällen in Punkten v. D_3

Die Fläche macht diese beiden Curven C^2, C_1^2 *projectiv zu einander* und umgekehrt, *zwei projective Kegelschnitte führen durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte zu einer Regelfläche 4. Grades;* denn sie bewirken wieder in einem Ebenenbüschel eine Correspondenz [2, 2], deren 4 Coincidenzebenen die 4 Erzeugenden in sich aufnehmen, welche die Axe des Büschels schneiden.

Durch die projectiven Kegelschnitte werden die Felder in ihren Ebenen collinear;*) folglich umhüllen die Ebenen, welche entsprechende Geraden dieser Felder zugleich enthalten, einen Torsus 3. Klasse. Zwei solche Geraden schneiden C^2 und C_1^2 in entsprechenden Punkten und folglich fallen in ihre Ebene 2 Erzeugende; der Torsus ist daher der der doppelten Berührungsebenen.

Aus den Punkten der D^3 kommen an die Fläche ϱ^4, ausser je zwei Ebenenbüscheln, noch Berührungskegel 2. Klasse: jede Gerade aus dem Scheitel trifft noch 2 Erzeugende. Zwei solche Kegel werden durch die Erzeugenden projectiv gemacht und machen ihrerseits die Bündel um ihre Scheitel collinear; Erzeugniss ist die D^3.

Die Doppelsecanten-Congruenz der D^3 ist (Nr. 7) 1. Ordnung und 3. Klasse und hat mit einem Complexe 1. Grades eine Regelfläche 4. Grades gemein (Nr. 35); auf ihr ist D^3 doppelt, da der Büschel des Complexes, der von einem Punkte von D^3 ausgeht (Nr. 5), 2 Strahlen enthält, welche D^3 nochmals treffen.

Die Umkehrung wird in Nr. 58 bewiesen werden.

Wenn auf einer cubischen Raumcurve D^3 zwei projective Punktreihen sich befinden, so entsprechen jedem Punkte der Curve in beiderlei Sinne 2 andere und wir haben einen Specialfall der involutorischen Correspondenz [2] (Nr. 30); die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden also eine ϱ^4 von der Art III.

Geht die Projectivität in Identität über, so erhält man *die abwickelbare Regelfläche der Tangenten der cubischen Raumcurve*, bekanntlich die einzige Regelfläche 4. Grades, welche abwickelbar ist. Beim 3. Grade giebt es keine.

Wichtiger aber ist der Specialfall, wenn *die involutorische Corre-*

*) Reye, Geometrie der Lage Bd. 2 S. 10.

spondenz [2] *auf* D^3 *eine cubische Involution ist.* Wir haben in Nr. 24 erkannt, dass *dann alle Erzeugenden der* ϱ^4 *eine Gerade treffen, welche damit eine einfache Leitlinie der* ϱ^4 *wird.* Jede Ebene durch sie enthält 3 Erzeugende, und *an Stelle des Torsus 3. Klasse von doppelten ist ein Büschel von dreifachen Berührungsebenen getreten. Die Fläche ist in diesem speciellen Falle also nicht mehr in sich dual* und wird daher als besondere *Art IV* angesehen.

Sie enthält keine Kegelschnitte mehr.

42 *Die Doppelcurve 3. Ordnung bestehe aus einem doppelten Kegelschnitte* D^2 *und einer doppelten Geraden* d, *welche dem* D^2, als vollem Schnitte, *begegnen muss. Auch zwei solche Doppellinien machen eine Fläche 4. Ordnung stets zur Regelfläche.*

In Bezug auf d sind wiederum zwei Fälle möglich; *entweder ist d,* wie D^2, *doppelte Leitlinie oder einfache Leitlinie und zugleich Erzeugende. In beiden Fällen treffen alle Erzeugenden* D^2 *und d.*

Im ersteren Falle (*Art V*) gehen von jedem Punkte der einen wie der andern Leitlinie 2 Erzeugende aus und *wir haben zwischen* D^2 *und d eine Correspondenz* [2, 2]. Weil beide vom Punkte $D^2 d \equiv U$ ausgehenden Erzeugenden nicht in die Ebene von D^2 fallen, so hat dieser Punkt, als Punkt von D^2 sowohl wie von d, sich mit beiden entsprechenden Punkten vereinigt und ist Verzweigungspunkt beider Reihen (und zwar doppelter), aber nicht Cuspidalpunkt für die eine oder andere Doppellinie.

Wir haben hier zweierlei doppelte Berührungsebenen: die einen haben den Schnittpunkt ihrer Erzeugenden auf D^2 *und gehen durch d, bilden also einen Büschel; bei den andern liegt der Schnittpunkt auf d und sie umhüllen einen Kegel 2. Grades* $\mathfrak{D}^2$.

In der That, ordnet man auf D^2 zwei Punkte einander zu, die dem nämlichen Punkte von d entsprechen, so ergiebt sich (Nr. 21) eine involutorische Correspondenz [2]. Die Directionscurve (Nr. 23], welche von den Verbindungslinien zugeordneter Punkte umhüllt wird, ist 2. Klasse und ist so projectiv zur Punktreihe auf d, dass die Tangente, welche dem Punkte U von d entspricht, durch diesen Punkt geht. Also zerfällt das Erzeugniss 3. Klasse der Verbindungsebenen entsprechender Punkte und Tangenten in den Ebenenbüschel um jene Tangente und einen Kegel 2. Grades, den $\mathfrak{D}^2$.

Die Fläche ist daher zu sich selbst dual.

Der Schnitt einer doppelten Berührungsebene der zweiten Art wird durch einen Kegelschnitt C^2 vervollständigt, welcher d nicht trifft. *Jeder von diesen* C^2 *befindet sich zur Punktreihe auf d in einer Correspondenz* [2, 1], *ohne sich selbst entsprechendes Element,* oder, was

dasselbe, trägt eine Involution, die zur genannten Punktreihe projectiv ist. In dieser Beziehung liegt die einfachste Erzeugung der Fläche.

Den Doppelpunkten der Involution auf C^2 entsprechen *die 2 Cuspidalpunkte auf d.*

Die Punktreihe auf C^2 steht aber auch zu derjenigen auf D^2 in einer Correspondenz [2, 1], so aber, dass die beiden Begegnungspunkte von C^2 und D^2 sich selbst entsprechend sind.

Die Verzweigungspunkte der jetzigen Correspondenz sind *die 2 Cuspidalpunkte der Doppellinie* D^2.

Aus jedem Punkte von D^2 kommt ein Berührungskegel 2. Grades, der sowohl zu dem Ebenenbüschel um d, als zum Kegel $\mathfrak{D}^2$ in eine Correspondenz [2, 1] durch die Erzeugenden gebracht wird.

Heben wir noch den besonderen Fall hervor, dass die Correspondenz [2, 2] zwischen d und D^2 die Projectivität zweier Involutionen ist.

Es sei nun zweitens d einfache Leitgerade und einfache Erzeugende (Art VI). Dann besteht zwischen den Punktreihen auf d und D^2 *eine Correspondenz* [2, 1] *und zwar von der Art, dass von den beiden Punkten, welche dem U als Punkte von* D^2 *entsprechen, der eine sich mit ihm vereinigt hat;* der andere U' macht die d als Verbindungslinie UU' zur Erzeugenden. Nun haben wir auf d die Involution, die zur Punktreihe auf D^2 projectiv ist, und also *2 Cuspidalpunkte auf* D^2.

Der U' wird, wie in Nr. 39, *Cuspidalpunkt der d als Torsallinie,* und die torsal berührende Ebene geht durch die Tangente an D^2 in U. Jede Ebene durch d enthält, ausser dieser, 2 Erzeugende und berührt in ihren Schnitten mit d, ausserdem aber noch im Cuspidalpunkte U'. Mithin stellt der Büschel um d *einen Büschel dreifacher Berührungsebenen* dar. Blos doppelte giebt es nicht und daher auch keine einfachen Kegelschnitte auf der Fläche.

Dieselbe ist nicht in sich dual.

Die Curven 3. Ordnung in den Berührungsebenen haben nur einen 43
Doppelpunkt. Folglich kann zur Doppelcurve 3. Ordnung höchstens eine doppelte Erzeugende gehören.

Ist eine solche vorhanden, so muss der Restbestandtheil 2. Ordnung der Doppelcurve von jeder Erzeugenden zweimal getroffen werden, also, wie in Nr. 40, aus (getrennten oder vereinigten) windschiefen Leitgeraden bestehen. Wir haben *die Specialität von I, II, die eben durch das Vorhandensein einer doppelten Erzeugenden bewirkt wird;* wir bezeichnen sie als *Art VII* und *VIII.*

In den Ebenen durch die doppelte Erzeugende befinden sich wiederum Kegelschnitte (welche bei I, II nicht vorhanden sind). Sie treffen die beiden Leitgeraden, sowie auch je zwei einander nicht. Jeder von

diesen C^2 befindet sich zu der einen oder andern Leitgeraden in einer Correspondenz [2, 1], bei welcher einmal die beiden einem Punkte der Leitgeraden entsprechenden Punkte von C^2 mit ihm in einer Geraden liegen, welche dadurch die doppelte Erzeugende wird.

C^2 trägt eine Involution und *jede von den Leitgeraden hat nur noch 2 Cuspidalpunkte.*

Zwei von den Kegelschnitten C^2 der ϱ^4 werden durch die Erzeugenden projectiv gemacht und zwar so, dass die auf der Schnittlinie beider Ebenen liegenden Punkte des einen denen des andern entsprechen.

Die Ebenen der C^2 sind doppelte Berührungsebenen, und zu den beiden Büscheln doppelter Berührungsebenen um die Leitgeraden — welche in II und VIII sich vereinigt haben — tritt noch der Büschel um die doppelte Erzeugende hinzu, den Torsus 3. Klasse, den eine unicursale ϱ^4 haben muss, vervollständigend.

Beide Flächen VII und VIII sind in sich dual.

44 Wir wenden uns zu den *unicursalen Regelflächen ϱ^4 mit einer dreifachen Geraden d^3.*

In jeder Ebene durch d^3 liegt eine Erzeugende. *Daher ist eine Fläche 4. Ordnung mit einer dreifachen Geraden nothwendig eine Regelfläche. Und ferner ist die d^3 jedenfalls eine Leitgerade. Als solche ist sie entweder dreifach oder zweifach oder einfach und demnach ist sie in den beiden letzten Fällen zugleich einfache, bezw. doppelte Erzeugende.*

Es sei nun erstens d^3 eine dreifache Leitgerade, so dass aus jeden von ihren Punkten 3 Erzeugende kommen. Diese liegen im allgemeinen nicht in einer Ebene (*Art IX*), sondern sind zu je zweien durch 3 Ebenen verbunden.

Diese Doppelberührungsebenen umhüllen einen Torsus 3. Klasse. In der That, jede von ihnen enthält einen Kegelschnitt C^2, welcher durch den Schnittpunkt der Ebene mit d^3 geht, der auf ihr die Spur der dritten Erzeugenden ist, die von ihm kommt. *Auf C^2 entsteht durch die je von dem nämlichen Punkte von d^3 ausgehenden Erzeugenden eine cubische Involution;* denn jeder Punkt von C^2 bestimmt eindeutig den Punkt auf d^3 und die Spuren der beiden andern Erzeugenden. Diese Involution ist zur Punktreihe auf d^3 so projectiv, dass der Punkt d^3C^3 als Punkt von d^3 mit einem von den 3 entsprechenden Punkten zusammenfällt. Die Directionscurve 2. Klasse dieser cubischen Involution auf C^2 (Nr. 23) lehrt, dass durch jeden Punkt der Ebene von C^2, ausser dieser Ebene, noch 2 andere Ebenen mit zwei Erzeugenden oder zwei doppelte Berührungsebenen der Fläche gehen.

Nach den 4 Doppelpunkten der cubischen Involution laufen *die 4 Torsallinien* der Fläche.

Ebenso entsteht auf der Curve 3. Ordnung C^3 in einer einfachen Tangentialebene oder auf der Curve 4. Ordnung C^4 in einer beliebigen Ebene durch die Erzeugenden, die je von demselben Punkte von d^3 kommen, eine cubische Involution; im Doppelpunkte der C^3 sind 2, im dreifachen der C^4 sind 3 Punkte einer Gruppe der Involution vereinigt, welche Gruppe demselben Punkte, insofern er zu d^3 gehört, in der Projectivität der Involution zur Punktreihe auf d^3 entspricht. Daher löst sich von der Directionscurve 4. bezw. 6. Klasse der von C^3 oder C^4 getragenen Involution ein einfacher oder dreifacher Strahlenbüschel und es bleibt die Spur 3. Klasse des Torsus der doppelten Berührungsebenen.

Diese Regelfläche, welche eine dreifache Leitgerade und einen allgemeinen Torsus 3. Klasse von doppelten Tangentialebenen hat, *ist dual zur Art IV,* welche einen Büschel dreifacher Berührungsebenen und eine allgemeine Doppelcurve 3. Ordnung besitzt. Sie entsteht also auch durch die Tangenten eines Torsus 3. Klasse, welche eine Gerade treffen. —

Eine cubische Involution auf einer C^3 mit Doppelpunkt, welche so beschaffen ist, dass in demselben 2 Punkte einer Gruppe vereinigt sind, ist auch diejenige, die durch einen Strahlenbüschel eingeschnitten wird, der seinen Scheitel in einem beliebigen Punkte der Ebene hat, und zu denen auf einer Curve C^4 mit dreifachem Punkte, bei welchen alle 3 Punkte einer Gruppe in diesem Punkte sich vereinigt haben, gehören auch diejenigen, welche in die Curve durch einen Büschel eingeschnitten werden, dessen Scheitel auf ihr liegt. Die Directionscurve ist in beiden Fällen ein dreifacher Büschel geworden.

Nehmen wir nun das eine oder andere an, so fallen die 3 Erzeugenden der ϱ^4 durch die Punkte einer Gruppe oder, was dasselbe ist, aus demselben Punkte von d^3 durchweg in eine Ebene, welche *dreifache Berührungsebene* der Fläche wird.

Durch einen beliebigen Punkt der Ebene von C^3 oder C^4, d. i. durch einen beliebigen Punkt des Raumes, geht nur eine von diesen Ebenen; folglich bilden sie einen Büschel, dessen Axe eine einfache Leitgerade der ϱ^4 ist.

Wir haben *Art X* der Regelfläche 4. Grades *mit zwei Leitgeraden d^3, d^1, von denen d^3 dreifach, d^1 einfach, jene Axe eines Büschels einfacher, diese Axe eines Büschels dreifacher Tangentialebenen ist,* also mit analoger Eigenschaft wie die allgemeine cubische Regelfläche. Diese Fläche ist in sich dual. Sie enthält keine Kegelschnitte mehr. Zwischen

den Punktreihen auf d^3 und d^1 bewirkt sie eine Correspondenz [1, 3], zwischen den Ebenenbüscheln um diese Geraden aber eine [3, 1].

45 *Es sei d^3 eine doppelte Leitgerade und einfache Erzeugende (Art XI).* Auf der C^3 in irgend einer Berührungsebene entsteht durch ϱ^4 eine Involution, welche zur Punktreihe auf d^3 so projectiv ist, dass die beiden im Doppelpunkte D vereinigten Punkte D_1, D_2 zu verschiedenen Paaren der Involution gehören, und dem einen, zu welchem D_2 gehört, der D als Punkt von d^3 entspricht. Nach dem andern Punkte dieses Paares geht die in der Ebene von C^3 befindliche Erzeugende; das zweite Paar, zu dem D_1 gehört und das einem andern Punkte D' auf d^3 entspricht, führt zu d^3 als Erzeugenden $D_1 D'$ von ϱ^4. *Die d^3 ist wiederum Torsallinie mit D' als Cuspidalpunkt* und die torsal tangirende Ebene berührt in D den Ast von C^3, zu dem D_1 gehört.

Nach den Doppelpunkten der Involution gehen *die beiden weiteren Torsallinien der Fläche.*

Weil D_1, D_2 zu verschiedenen Paaren der Involution gehören, so kann dieselbe nicht in die C^3 durch einen Büschel aus einem ihrer Punkte eingeschnitten werden. Also ist ihre Directionscurve ein Kegelschnitt, dessen Tangentenbüschel so projectiv zur Punktreihe auf d^3 ist, dass dem Punkte D von d^3 eine durch ihn gehende Tangente entspricht. Folglich ist *der Torsus der Doppel-Berührungsebenen, deren beide Erzeugende sich auf d^3 schneiden,* weil dieselben entsprechende Punkte und Tangenten verbinden, *ein Kegel 2. Grades.* Zur 3. Klasse wird er durch *den Büschel um d^3 vervollständigt, dessen Ebenen alle zweimal berühren, davon einmal im Cuspidalpunkte D'. Diese Fläche ist also zu VI dual.*

In den zuerst genannten doppelten Berührungsebenen befinden sich *Kegelschnitte C^2*, welche die d^3 treffen. *Zwischen einem von ihnen und der d^3 bewirkt die Fläche ebenfalls eine Correspondenz* [2, 1], *jedoch ohne sich selbst entsprechenden Punkt.* Dies giebt die einfachste Erzeugung.

46 *Endlich sei d^3 eine einfache Leitgerade und doppelte Erzeugende* (*Art XII*). *Die Punktreihe auf der C^3 in einer Tangentialebene ist nun zu derjenigen auf d^3 projectiv und zwar so, dass den beiden Punkten D_1, D_2, die in den Doppelpunkt von C^3* (durch welchen d^3 geht) *fallen, zwei andere Punkte D_1', D_2' auf d^3 entsprechen. Die Gerade d^3 ist nun doppelte Torsallinie mit den Cuspidalpunkten D_1', D_2'* und torsalen Ebenen, welche in D die beiden Aeste von C^3 berühren. *Jede Ebene durch d^3 berührt dreimal, davon zweimal in den Cuspidalpunkten.* Diese Fläche ist wiederum in sich dual.

Wir können sie *als Specialfall von X* ansehen, *indem die beiden Leitgeraden d^3 und d^1*, von denen die eine dreifache Punkte, die andere dreifache Berührungsebenen trägt, *zusammengefallen sind*, ähnlich wie bei der Cayley'schen Regelfläche 3. Grades. In der That, lässt man den Scheitel des Büschels, der die cubische Involution in C^3 einschneidet, in den Doppelpunkt dieser Curve fallen, so geht die Involution in eine einfache zu der Punktreihe auf d^3 projective Punktreihe über.

Zur Vergleichung stellen wir unter unsere römische Numerirung diejenige von Cremona und die von Cayley.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Cremona	11	12	1	7	2	4	5	6	8	9	3	10
Cayley	1	4	10	8	7		2	5	9	3		6

Die Arten 1 bis 8 finden sich in Cayley's erstem Aufsatze, 9 und 10 fügte er im zweiten zu, die beiden weiteren hat Cremona gefunden.

Nicht in sich dual sind IV, VI, IX, XI, sondern IV zu IX, VI zu XI. Eine dreifache Gerade haben IX bis XII, einen Büschel dreifacher Berührungsebenen IV, VI, X, XII.

Der lineare Complex und die linearen Systeme von linearen Complexen.

Der lineare Complex oder das Strahlengewinde.

I.

47 Das Strahlengebüsche, den Inbegriff aller Strahlen, welche eine feste Gerade treffen, haben wir als Strahlencomplex 1. Grades erkannt, aber auch schon bemerkt, dass es nicht der einzige oder vielmehr der allgemeine Complex 1. Grades ist. Um zu demselben zu gelangen, müssen wir uns zur Betrachtung des (gemeinen) Nullsystems wenden, mit dem er, wie wir sehen werden, innig verbunden ist.

Die räumliche Correlation oder Reciprocität, deren allgemeine Eigenschaften ich als bekannt voraussetze,*) hat zwei Fälle, in denen sie involutorisch wird, d. h. in denen die jedem Punkte (jeder Ebene) in beiderlei Sinne entsprechenden Ebenen (Punkte) durchweg zusammenfallen. Der eine ist der Fall des Polarsystems (der Polar-Reciprocität), in welchem zwei entsprechende Elemente Pol und Polarebene in Bezug auf eine Fläche 2. Grades sind. Er wird bekanntlich am besten daran erkannt, dass es Tetraeder giebt, deren Ecken als Punkten des einen Raumes die Gegenebenen im andern entsprechen.

Der zweite hier für uns wichtigere Fall ist der *des Nullsystems, bei welchem jeder Punkt in seine entsprechende Ebene fällt.***)

*) Vergl. Reye, Geometrie der Lage, Abtheilung II (Hannover 1. Aufl. 1868, 2. Aufl. 1880) die ersten Vorlesungen. Ich ziehe das Wort Correlation vor, weil es einen bequemeren Plural hat und überhaupt sich glätter aussprechen lässt. Auch ist es von Vortheil, das Wort „reciprok“ nicht auf den Fall der linearen reciproken Beziehung — bei welcher einer geraden Punktreihe ein Ebenenbüschel entspricht — beschränken zu müssen.

**) Die erste Untersuchung des Nullsystems geschah durch Giorgini (Memorie della Società italiana delle Scienze Bd. 20, 1827), dann durch Möbius, Chasles, von Staudt. In Bezug auf Möbius sehe man Gesammelte Werke Bd. 1 S. 487 (oder Journal für Mathematik Bd. 10 (1833) S. 317) und Bd. 3 S. 112 ff. (Lehrbuch der Statik, 1837, § 81 ff.), in Bezug auf Staudt, Geometrie

Machen wir uns zunächst klar, dass, *wenn die Punkte des einen Raumes Σ durchweg in ihre entsprechenden Ebenen im andern Raume Σ_1 fallen, dann nothwendig die Correlation involutorisch ist.* Dem Punkte X entspreche also die durch ihn gehende Ebene ξ_1; es sei dann y ein Strahl des Büschels (X, ξ_1); die ihm entsprechende Gerade y_1 muss in ξ_1 liegen. Wenn sie von y verschieden wäre, so würde es durch y_1 nur 2 Ebenen geben, welche ihren entsprechenden Punkt auf y enthielten, nämlich die Ebene $yy_1 \equiv \xi_1$ und die dem Punkte $Z \equiv yy_1$ entsprechende; während n. V. jede Ebene von Σ_1 durch ihren homologen Punkt in Σ geht.

Folglich ist jede Gerade von (X, ξ_1) mit ihrer entsprechenden identisch; daraus ergiebt sich aber, dass die Ebene, welche, in Σ_1, irgend einem Punkte von ξ_1, als Punkte von Σ, entspricht, durch die Gerade geht, welche ihn mit X verbindet, und also durch X; d. h. X, als Punkt von Σ_1, entspricht der ξ_1, wenn sie zu Σ gerechnet wird.

Wir haben jedoch noch festzustellen, dass *eine solche Correlation mit durchweg incidenten entsprechenden Punkten und Ebenen überhaupt möglich ist.*

Eine Correlation ist bekanntlich eindeutig festgelegt durch 5 Punkte des einen Raumes und ihre homologen Ebenen im andern. Wenn nun $ABCDE$ ein räumliches Fünfeck ist, so lassen wir jeder der Ecken, als einem Punkte von Σ, die Ebene der beiden in ihr zusammenstossenden Seiten, die Winkelebene der Ecke, entsprechen, also der A die EAB, der B die ABC u. s. f. In A, als Punkt von Σ_1, schneiden sich die Ebenen DEA, EAB, ABC, also muss ihm in Σ die Ebene correspondiren, welche deren entsprechende Punkte verbindet, die Ebene EAB.

Hinsichtlich der 5 Punkte $A, \ldots E$ haben wir also schon involutorisches Verhalten; daraus folgt durchgängiges derartiges Verhalten. Denn durch die gegebenen Paare entsprechender Elemente sind die übrigen correspondirenden Elemente bestimmt; die Vertauschung der beiden Räume ändert jene nicht, mithin auch nicht diese.

Wie bei den gegebenen, so findet aber auch bei den weiteren entsprechenden Elementen durchweg Incidenz statt. Ersichtlich entsprechen die 5 Seiten des Fünfecks sich selbst; aber auch der Strahl im Büschel

der Lage (Nürnberg 1847) § 24 und Beiträge zur Geometrie der Lage, 3 Hefte (ebenda 1856—60) § 34. — Eine interessante Ueberführung eines Polarsystems in ein Nullsystem hat G. Hauck bemerkt: Zeitschr. für Mathem. Bd. 31 S. 362. Das Polarsystem ist dasjenige eines Rotationsparaboloids und die Ueberführung geschieht durch Spiegelung in der Scheitel-Berührungsebene und Drehung um die Axe.

(A, EAB), welcher die Gegenseite CD von A trifft, entspricht sich selbst, weil sein entsprechender auch zu (A, EAB) gehören und CD treffen muss. Folglich hat dieser Büschel 3 sich selbst entsprechende Strahlen.

Alle Strahlen der 5 Büschel (A, EAB), (B, ABC), ... entsprechen sich selbst. Jeder Punkt in einer dieser 5 Ebenen EAB, ... liegt daher in seiner entsprechenden Ebene; mithin incidiren auf jeder Geraden 5 Punkte mit ihren entsprechenden Ebenen im correspondirenden Büschel, und demnach müssen es alle thun.

Damit ist die Möglichkeit des Nullsystems nachgewiesen.*)

48 Im Vorangehenden hat sich ergeben, dass *jeder Strahl eines durch Punkt und entsprechende Ebene bestimmten Büschels sich selbst entspricht.* Obwohl wir ∞^3 solche Strahlenbüschel haben, umfassen ihre Strahlen doch nicht ∞^4, sondern nur ∞^3 Strahlen, indem für jeden Punkt eines solchen Strahles auch die entsprechende Ebene durch ihn geht und er also zu ∞^1 derartigen Strahlenbüscheln gehört.

Mithin erzeugen diese ∞^3 Strahlen, welche man *die Leit- oder Nullstrahlen des Nullsystems* nennt, *einen Complex. Derselbe ist 1. Grades,* denn jeder beliebige Strahlenbüschel (X, η) enthält einen, nämlich die Schnittlinie von η mit der X entsprechenden Ebene ξ,**) die ja durch X geht. Da auch η durch X geht, so muss, nach der Eigenschaft der Correlation, der η entsprechende Punkt Y in ξ und, wegen des Nullsystems, auch in η liegen, also auf $\xi\eta$, so dass der Strahl $\xi\eta$ sich auch auf die duale Weise als XY ergiebt.

So sind wir zu einem Complexe 1. Grades gelangt, der allgemeiner ist als das Strahlengebüsche.

Wir nennen die im Nullsysteme einem Punkte X zugehörige Ebene ξ seine *Nullebene* und X den *Nullpunkt* von ξ; vielfach werden dieselben Benennungen: Pol und Polarebene, wie bei dem Polarsysteme und der allgemeinen Correlation, gebraucht; Chasles sagt: foyer und plan focal.

Der Complexkegel des linearen Complexes der Nullstrahlen aus einem beliebigen Punkte X ist der Strahlenbüschel (X, ξ) in der X zugehörigen

*) Vergl. Staudt, Geometrie der Lage Nr. 325; Reye, Geometrie der Lage 2. Abth. 10. Vortrag der 2. Aufl.; unter „Reye, G. d. L. II" ist stets diese Auflage verstanden.

**) Weil die Beziehung involutorisch und es also gleichgiltig ist, zu welchem Raume ein Element gehört, ist der Zeiger 1 überflüssig geworden; entsprechende Punkte und Ebenen bezeichnen wir deshalb durch entsprechende lateinische und griechische Buchstaben, entsprechende Geraden durch denselben Buchstaben, bei der einen accentuirt.

Nullebene $\mathfrak{x}$, *die Complexcurve einer Ebene* $\mathfrak{x}$ *ist der Strahlenbüschel in ihr um ihren Nullpunkt.*

Bewegt sich X *auf einer Geraden* g, *so dreht sich die Nullebene* $\mathfrak{x}$ *um die entsprechende Gerade* g'.

Da jeder Punkt von g' auf allen diesen $\mathfrak{x}$ liegt, so geht seine Nullebene durch alle X, also durch g; *folglich haben die beiden Geraden* g *und* g' *reciprokes Verhalten.*

Sie sind windschief gegen einander, weil sonst nicht möglich wäre, dass jede Ebene durch die eine ihren Nullpunkt auf der andern hat. *Sobald sie einen Punkt gemein haben, fallen sie ganz zusammen;* denn die Nullebene des gemeinsamen Punktes geht durch beide, also werden sie Leitstrahlen; diese aber entsprechen sich selbst.

Wir nennen zwei solche im Nullsysteme einander entsprechende Geraden am einfachsten und richtigsten *Polaren* von einander in Bezug auf das Nullsystem, ebenso wie man entsprechende Geraden der allgemeinen Correlation Polaren nennt; bisweilen werden sie zugeordnete oder conjugirte Geraden genannt.

Ist also ein Punkt mit der einen von zwei Polaren incident, so ist seine Nullebene mit der andern incident; und umgekehrt.

Die Polaren der Geraden in *der unendlich fernen Ebene* $\mathfrak{E}$ heissen die *Durchmesser* des Nullsystems; *sie sind alle unter einander parallel,* da sie nach dem Nullpunkte von $\mathfrak{E}$ hingehen. *Die Nullebenen der verschiedenen Punkte eines Durchmessers sind unter einander parallel.*

Der Durchmesser, zu dem die Nullebenen seiner Punkte normal sind, dessen Polare (in Bezug auf das Nullsystem) also zum Nullpunkte von $\mathfrak{E}$ nach dem unendlich fernen Kugelkreis oder nach der absoluten Curve $\mathfrak{K}^2$*) polar ist, heisst *die Axe* (oder Hauptaxe) des Nullsystems.

Jeder Leitstrahl des Nullsystems, welcher die eine von zwei Polaren trifft, schneidet auch die andere.

Jede Gerade, welche zwei Polaren trifft, ist ein Leitstrahl.

Folglich trifft jeder der ∞^1 Strahlen, welche zwei Polaren und von einem weiteren Paare von Polaren die eine schneiden, auch die andere.

Demnach sind zwei Paare von Polaren des Nullsystems immer 4 Gerade einer Regelschaar. Die verbundene Regelschaar besteht aus lauter Leitstrahlen. Jede weitere Gerade aber der ersteren Regelschaar hat ihre Polare ebenfalls in derselben, weil die Polare diese Leitstrahlen auch treffen muss.

*) *The Absolute* nennt ihn Cayley in dem Sixth Memoir upon Quantics (Philos. Transactions für 1859 Bd. 149) Nr. 209—230; bei Staudt heisst er Normalkreis (Beitr. zur Geom. der Lage Nr. 194), courbe ombilicale bei französischen Schriftstellern.

Wegen des reciproken Verhaltens polarer Geraden folgt weiter, dass *die erstere Schaar durch die Paare der Polaren involutorisch wird und in den Doppelstrahlen dieser Involution zwei Leitstrahlen enthält.*

Beide Regelschaaren sind durch 3 Strahlen der zweiten Schaar bestimmt; also:

Die durch 3 Leitstrahlen eines Nullsystems bestimmte Regelschaar besteht aus lauter Leitstrahlen und gehört daher ganz zum linearen Complexe; die verbundene Schaar besteht aus einer Involution von zusammengehörigen Polaren und enthält zwei Leitstrahlen.

Jede zwei Polaren sind die Leitlinien eines Strahlennetzes (Nr. 7) *von lauter Leitstrahlen, das also vollständig zum Complexe gehört; solcher Strahlennetze giebt es also* ∞^4.

Hingegen giebt es ∞^6 *Regelschaaren von Leitstrahlen;* denn man kann aus den ∞^3 Leitstrahlen des Nullsystems auf ∞^9 Weisen drei zur Bestimmung einer Regelschaar herausnehmen, jede dieser Regelschaaren aber kann auf ∞^3 Weisen aus 3 ihrer Geraden abgeleitet werden.

49 *Vier beliebige Punkte A, B, C, D und ihre Nullebenen α, β, γ, δ geben 2 Tetraeder T und T', von denen jedes dem andern um- und eingeschrieben ist.**)

Denn nicht nur gehen α, β, γ, δ bezw. durch A, B, C, D, sondern, da $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$, ... die Nullpunkte von ABC, ABD, ... sind, so liegen auch jene bezw. in diesen.

Sind aber die Gegenkanten AB und CD polar, so fallen beide Tetraeder zusammen, und jede zwei Gegenkanten sind polar.

Die Ebenen BCD, CDA, DAB, ABC seien mit α', β', γ', δ' bezeichnet und ihre Nullpunkte $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$ mit A', B', C', D'. In $\alpha' \equiv BCD$ liegen B, C, D, A', in $\alpha \equiv B'C'D'$ liegen B', C', D', A; folglich enthält das Ebenenpaar $\alpha\alpha'$ alle 8 Ecken der beiden Tetraeder und ebenso liegen sie in $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$.

Die 8 Ecken der beiden Tetraeder sind also die Grundpunkte eines Flächennetzes 2. Ordnung oder 8 associirte Punkte, die 8 Ebenen 8 associirte Ebenen.

Die für das Folgende wichtige Vertheilung der 8 Punkte in den 8 Ebenen ist:

α: B', C', D', A; β: C', D', A', B; γ: D', A', B', C; δ: A', B', C', D;
α': B, C, D, A'; β': C, D, A, B'; γ': D, A, B, C'; δ': A, B, C, D'.

*) Die Möglichkeit solcher zwei Tedraeder erkannte zuerst Möbius, weshalb wir sie *Möbius'sche Tetraeder* nennen wollen: Gesammelte Werke Bd. 1 S. 439 (Journal für Mathem. Bd. 3 S. 273, 1828); vergl. auch Steiner, Systematische Entwickelung Nr. 58 (Gesammelte Werke Bd. 1 S. 405).

Die 3 ersten Punkte sind je die Ecken des Tetraeders, zu dem die Ebene gehört, der vierte ist ihr Nullpunkt.

Zwei Ecken, wie A und A', zu verschiedenen Tetraedern gehörig, von denen jede der Nullebene der andern gegenüberliegt, sollen *entsprechend* heissen, ebenso ihre Nullebenen α und α'.

Bei einem Tetraeder, wie $ABCD$, besteht nun der folgende Satz:*)

Der Punktwurf, in welchem eine beliebige Gerade die Seitenflächen eines Tetraeders schneidet, ist stets zu dem Ebenenwurfe projectiv, durch welchen aus derselben Geraden die Gegenecken projicirt werden.

Die Gerade g schneide die Ebenen $\alpha' \equiv BCD$, β', γ', δ' in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$; dieser Punktwurf $\mathfrak{ABCD}$ werde aus D auf δ' projicirt nach $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ liegen auf BC, CA, AB.

Diesen neuen Punktwurf projicirt man aus A auf BC in $\mathfrak{A}'CB\mathfrak{D}''$; also ist:

$$g(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \equiv \mathfrak{ABCD} \barwedge \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D} \barwedge \mathfrak{A}'CB\mathfrak{D}''.$$

Aus dem Ebenenwurf $g(A, B, C, D)$ entsteht durch Schnitt mit δ' der Strahlenwurf $\mathfrak{D}(A, B, C, \mathfrak{A}')$; denn $D\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ liegt in gD. Sein Schnitt mit BC ist $\mathfrak{D}''BC\mathfrak{A}'$, da $\mathfrak{D}''$ auf $A\mathfrak{D}$ liegt. Also ist:

$$g(A, B, C, D) \barwedge \mathfrak{D}(A, B, C, \mathfrak{A}') \barwedge \mathfrak{D}''BC\mathfrak{A}' \barwedge \mathfrak{A}'CB\mathfrak{D}'';$$

und demnach:

$$g(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \barwedge g(A, B, C, D).$$

Kehren wir zu unsern beiden Tetraedern zurück und nehmen an, dass g ein Leitstrahl des Nullsystems sei; so sind $g(\alpha', \beta', \gamma' \delta')$ die Nullpunkte von $g(A', B', C', D')$, also, infolge der Correlations-Eigenschaft: $g(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \barwedge g(A'; B', C', D')$.

Demnach:

$$g(A, B, C, D) \barwedge g(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \barwedge g(A', B', C', D') \barwedge g(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Die Ecken unserer beiden Tetraeder T und T' werden also aus den Leitstrahlen des Nullsystems oder den Strahlen des Complexes 1. Grades durch projective Ebenenwürfe projicirt, wobei entsprechende Ebenen der Würfe nach entsprechenden Ecken gehen.

Dual, die Ebenen der beiden Tetraeder schneiden die nämlichen Geraden in projectiven Punktwürfen, wobei ebenfalls entsprechende Punkte in entsprechenden Ebenen liegen.

Alle vier Würfe, die sich bei einem Leit- oder Complexstrahle ergeben, sind projectiv.

Nun ist aber der vollständige Ort der Strahlen, auf welchen die beiden Tetraeder T und T' mit ihren Ebenen projective Punktwürfe ein-

*) Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage Nr. 35.

schneiden und welche, wegen des Staudt'schen Satzes, *nach den Ecken derselben projective Ebenenwürfe senden, ein Complex 4. Grades.*

Denn bekanntlich umhüllen alle Strahlen einer Ebene, welche von einem in der Ebene gelegenen Vierseite in einem Punktwurfe geschnitten werden, der zu einem gegebenen Wurfe projectiv ist, einen Kegelschnitt. Also entsteht in einem Strahlenbüschel (P, π), dessen Ebene π die beiden Tetraeder in den Vierseiten $abcd$, $a'b'c'd'$ schneide, eine Correspondenz [2, 2], in der zwei Strahlen x und x' einander entsprechen, bei denen $x(a, b, c, d) \barwedge x'(a', b', c', d')$. Die 4 Coincidenzen (Nr. 12) beweisen den Grad des genannten Complexes.

Zu diesem Complexe 4. Grades gehört in unserem Falle der lineare Complex der Leitstrahlen des Nullsystems. Weil beide in sich dual sind, so muss es auch der verbleibende Complex 3. Grades sein.

Eine gerade Linie auf einer Fläche F eines Flächennetzes 2. Ordnung wird von einer andern Fläche des Netzes in zwei Punkten geschnitten, die auf allen Flächen des beide verbindenden Büschels des Netzes liegen; also wird die Gerade von allen Flächen des Netzes in derjenigen Involution geschnitten, in der irgend ein Büschel des Netzes, welcher die F nicht enthält, ihr begegnet.

Folglich wird jede Gerade u auf einer Fläche des Netzes durch die 8 Punkte $A, B, \ldots D'$ von den 4 Ebenenpaaren $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, die ja zum Netze gehören, in 4 Punktepaaren geschnitten, die in Involution sind; also:

$$u(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \barwedge u(\alpha', \beta', \gamma', \delta').$$

D. h. *der cubische Complex der Geraden auf den Flächen unseres Netzes* $(A, B, \ldots, D')$ (Nr. 6) *ist der ergänzende Complex 3. Grades.*

Und da er in sich dual ist, so ist er zugleich der cubische Complex der Geraden auf den Flächen der Schaarschaar $(\alpha, \beta, \ldots, \delta')$.

Das Netz der Flächen 2. Grades F, die durch die 8 Ecken unserer beiden Möbius'schen Tetraeder gehen, und die Schaarschaar der Flächen 2. Grades Φ, welche deren 8 Ebenen berühren, haben auch die Beziehung, dass jede Gerade, welche auf einer Fläche des einen Systems sich befindet, auch einer Fläche des andern angehört; oder kürzer: *der cubische Complex ihrer Geraden ist ihnen gemeinsam.*

50 Zu den beiden Systemen der F und der Φ gehören drei leicht nachweisbare einmantelige Hyperboloide.

AB und $\alpha\beta \equiv C'D'$, CD und $\gamma\delta \equiv A'B'$ sind zwei Paare von Polaren des Nullsystems; also gehören die beiden Paare von entsprechenden Gegenkanten AB, CD; $A'B'$, $C'D'$ von T und T' zu einer Regelschaar; die Trägerfläche geht durch alle 8 Ecken und be-

rührt alle 8 Ebenen. Die andere Schaar besteht daher aus lauter Leitstrahlen; der durch A gehende muss in α liegen und die Spur B' von $A'B'$ in α enthalten und deshalb in die β' fallen. Folglich gehören zur andern Schaar:

$$AB',\ BA',\ CD',\ DC',$$

welche wir auch als $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\delta'$, $\delta\gamma'$ bezeichnen können.

Die 3 Hyperboloide enthalten daher in ihren beiden Schaaren je die Geraden:

(H_1) $AB,\ CD,\ A'B',\ C'D';\quad AB',\ BA',\ CD',\ DC';$

(H_2) $AC,\ BD,\ A'C',\ B'D';\quad AC',\ CA',\ BD',\ DB';$

(H_3) $AD,\ BC,\ A'D',\ B'C';\quad AD',\ DA',\ BC',\ CB'.$

Weil das Vierseit $ABA'B'$ auf H_1 liegt, so sind seine Diagonalen AA', BB' polar in Bezug auf H_1, und ebenso CC', DD'.

Es seien nun q, q' *die Treffgeraden dieser 4 Verbindungslinien* $a \equiv AA'$, $b \equiv BB'$, $c \equiv CC'$, $d \equiv DD'$ *entsprechender Ecken der beiden Tetraeder.*

Die Polarebenen, in Bezug auf H_1, der vier Punkte $q(a, b, c, d)$ gehen durch b, a, d, c; d. h. die Polare von q nach H_1 ist q'; ebenso sind q und q' polar nach H_2 und H_3.

Die beiden Treffgeraden sind daher gemeinsame Polaren für alle Flächen F *und* Φ; *sie theilen also alle 4 Strecken* AA', BB', CC', DD' *harmonisch.*

Sie treffen aber auch die 4 Schnittlinien $a_1 \equiv \alpha\alpha'$, $b_1 \equiv \beta\beta'$, $c_1 \equiv \gamma\gamma'$, $d_1 \equiv \delta\delta'$ *und trennen die Ebenenpaare* $\alpha\alpha'$, ... *harmonisch.*

Denn weil diese Ebenenpaare zum Netze der F gehören, so müssen die Polarebenen irgend eines Punktes von q, welche sich ja in q' schneiden, bezw. durch a_1, b_1, c_1, d_1 gehen, also schneidet q' und ebenso q diese 4 Geraden.*)

Zwei Tetraeder, deren Ecken 8 associirte Punkte bilden, sind, nach Hesse's Satz, stets Polartetraeder einer und derselben Fläche 2. Grades.**)

Demnach führen die 4 Tetraeder-Paare:

$$ABCD,\quad A'B'C'D',$$
$$ABC'D',\quad A'B'CD,$$
$$AB'CD',\quad A'BC'D,$$
$$AB'C'D,\quad A'BCD',$$

*) Vergl. Schröter, Journal für Mathematik Bd. 93 S. 143.

**) Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes S. 198 der 3. Auflage; synthetische Beweise des Umkehrungs-Satzes, aus denen leicht der

von denen das erste aus unsern Tetraedern T, T' besteht und welche durch ihre Ebenen bezeichnet

$$\alpha'\beta'\gamma'\delta', \quad \alpha\beta\gamma\delta,$$
$$\beta\alpha\delta'\gamma', \quad \beta'\alpha'\delta\gamma,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

heissen, zu vier Flächen 2. Grades S, S_1, S_2, S_3.

Auch die 3 neuen Paare bestehen aus zwei Möbius'schen Tetraedern; denn z. B. in den Ebenen β, α, δ', γ' des linken Tetraeders des zweiten Paares liegen die Ecken A', B', C, D des rechten und in den Ebenen β', α', δ, γ des rechten die Ecken A, B, C', D' des linken.

Sie haben dieselben entsprechenden Ecken und Ebenen, wie T und T', führen also zu denselben Verbindungs- und Schnittlinien $a, \ldots, d_1$ und denselben Treffgeraden q und q'.

In Bezug auf S sind $a \equiv AA'$ und $a_1 \equiv \alpha'\alpha$ polar, ebenso b und b_1, c und c_1, d und d_1. Der Punkt $a_1\,\beta$ hat $aB' \equiv AA'B'$ zur Polarebene; in ihr liegt $AB' \equiv \alpha\beta'$ und damit der Punkt $\alpha\alpha'\beta' \equiv a_1\beta'$. Demnach sind $a_1\beta$ und $a_1\beta'$, $a_1\gamma$ und $a_1\gamma'$, $a_1\delta$ und $a_1\delta'$ in Bezug auf S conjugirt; da aber die Treffpunkte von a_1 mit q, q' zu denen mit β, β'; γ, γ'; δ, δ' harmonisch sind, so liegen jene und ebenso $b_1 q$, $b_1 q'$, ... auf S und folglich die ganzen Geraden q, q'.

Die beiden Geraden q, q' sind allen 4 Flächen S, S_1, S_2, S_3, gemeinsam; in Bezug auf S_1 sind a und b_1, b und a_1, ... polar; zum Punkte $a_1\,\beta$ ist polar die Ebene $bA \equiv BB'A$, welche auf $B'A \equiv \alpha\beta'$ den Punkt $\alpha\alpha'\beta' \equiv a_1\beta'$ enthält, der also auch hier zum $a_1\beta$ conjugirt ist.

In der geschaart-involutorischen Collineation, von welcher q und q' die Axen (Ordnungslinien, Involutionsaxen) sind und zwei Punkte einander entsprechen, die auf einer die Axen treffenden Geraden liegen und durch die Axen harmonisch getrennt werden,*) sind A und A', ..., α und α', ... entsprechend. Lassen wir dieser Collineation das Polarsystem in Bezug auf S folgen (oder vorangehen), in dem dem A' die α entspricht, so erhält man eine Correlation, in welcher den 8 Ecken ihre Nullebenen in unserm Nullsystem correspondiren, also das Nullsystem selbst.

Beweis für den obigen Satz abgeleitet werden kann, sehe man: Bischoff, Annali di Matematica Ser. II Bd. 6 S. 232; Schröter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung S. 707.

*) Staudt, Geometrie der Lage § 17; Reye, G. d. L. II 17. Vortrag. — Ich will diese Collineation, die bei Reye „geschaart-involutorisches System" heisst, kürzer, nach dem Beispiele italienischer Geometer, *windschiefe Involution* (involuzione gobba oder rigata) nennen.

Eine Gerade von S, die zur andern Schaar gehört, als q und q', wird sowohl durch die windschiefe Involution, als auch durch das Polarsystem, mithin auch durch das Nullsystem in sich selbst transformirt. *Folglich gehört die q und q' nicht enthaltende Schaar von S zum Complexe der Leitstrahlen des Nullsystems.*

Ich beschränke mich hier darauf, blos noch zu erwähnen, dass von den drei andern Flächen S_1, S_2, S_3 gerade die q, q' enthaltenden Regelschaaren zum genannten Complex gehören und dass jede der 4 Flächen S zu sich selbst polar ist nach jeder der drei andern, so wie nach den 3 Hyperboloiden H_1, H_2, H_3.*)

Behufs *der Bestimmung eines Nullsystems* kann man zu zwei 51
Punkten A, B die Nullebenen α, β beliebig durch sie hindurchgehend geben. Ist nun C ein dritter Punkt, so ist der Strahl c aus ihm, welcher AB und $\alpha\beta$ trifft, weil diese polar sind, ein Leitstrahl, also müssen wir die Nullebene γ von C so geben, dass sie durch c geht.

Weil c in die Ebene $\omega \equiv ABC$ fällt, so kommt diese Bedingung für γ darauf hinaus, dass der Punkt $O \equiv \alpha\beta\gamma$ der Ebene ω angehört, welche ja seine Nullebene werden muss.

Sind nun A, B, C und ihre Nullebenen α, β, γ so gegeben, dass der Punkt $\alpha\beta\gamma$ in die Ebene ABC fällt, so ist das Nullsystem vollständig und eindeutig bestimmt.

Wenn E, F die Schnitte von α, β mit einem beliebigen Strahle des Büschels (C, γ) sind und D ein beliebiger Punkt auf $\alpha\beta$ ist, so bestimmen wir, nach Nr. 47, das Nullsystem vermittelst des Fünfecks $ADBFE$. Die Punkte A und B haben dann in der That $EAD \equiv \alpha$, $DBF \equiv \beta$ zu Nullebenen, AB und $\alpha\beta$ sind polar, also ist der Strahl c aus C, welcher beide trifft, ein Leitstrahl; EF, der durch C geht, ist es als Seite des Fünfecks ebenfalls, und demnach ist γ, welche beide verbindet, Nullebene von C.**) *Jedem weiteren Punkte X ist eine einzige Ebene zugeordnet:* sie enthält die 3 Strahlen aus X, welche bezw. BC und $\beta\gamma$, CA und $\gamma\alpha$, AB und $\alpha\beta$ schneiden, und ist durch zwei von ihnen bestimmt.

Die 3 Strahlen fallen in der That in eine Ebene. Wenn nämlich A', B', C' ihre Schnittpunkte mit $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sind, so sind die beiden Tetraeder $ABCX$ und $A'B'C'O$ einander ein- und umgeschrieben. Von den Ecken des zweiten liegt O in ABC, A' in BCX, da XA'

*) Man sehe zum Beweise den Aufsatz von Caporali und Del Pezzo, dem ich Nr. 49, 50, mit einigen Aenderungen, entnommen habe: Introduzione alla teoria dello spazio rigato (Caporali, Memorie di Geometria, Neapel 1888, S. 270); ich werde ihn künftighin kurz Caporali-Del Pezzo citiren.

**) Reye, G. d. L. II S. 72.

die BC trifft, ebenso B' und C' in CAX und ABX; von den Ecken des ersten liegen A, B, C in $B'C'O$, $C'A'O$, $A'B'O$ bezw., d. h. in α, β, γ. Es bleibt noch darzuthun, dass X in A' B' C' liegt, womit dann auch unsere Behauptung bezüglich der 3 Strahlen bewiesen ist.

Auf der Schnittlinie s der beiden Seitenflächen $\omega \equiv ABC$ und $A'B'C'$ liegen die Schnittpunkte der 6 Kanten, welche sich in diesen Ebenen befinden,

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C} \text{ mit } BC,\ CA,\ AB,$$
$$\mathfrak{A}',\ \mathfrak{B}',\ \mathfrak{C}' \text{ mit } B'C',\ C'A',\ A'B'.$$

B', C' liegen beide in α, welche ω in OA schneidet; also sind $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die Schnittpunkte von $O(A, B, C)$ mit s, und

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}';\quad \mathfrak{B},\ \mathfrak{B}';\quad \mathfrak{C},\ \mathfrak{C}'$$

sind, als Schnittpunkte der Gegenseiten des vollständigen Vierecks $OABC$, involutorisch gepaart.

Folglich müssen in der Ebene $A'B'C'$, weil $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die Schnitte von s mit den Seiten von $A'B'C'$ sind, die 3 Verbindungslinien der zu ihnen gepaarten Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ je mit den Gegenecken A', B', C' in einen Punkt zusammenlaufen, der A' B' C' zum Vierecke vervollständigt.

$A'\mathfrak{A}$, $B'\mathfrak{B}$, $C'\mathfrak{C}$ sind aber die Spuren, in $A'B'C'$, der Ebenen BCX, CAX, ABX; folglich ist der Schnittpunkt X dieser 3 Ebenen der erwähnte Concurrenzpunkt, also, wie behauptet, in $A'B'C'$ gelegen.*)

Ebenso laufen, dual, in jeder Ebene ξ die Verbindungslinien der Spuren von BC und $\beta\gamma$, CA und $\gamma\alpha$, AB und $\alpha\beta$ in einen Punkt zusammen: den Nullpunkt von ξ.

Wenn also das Tetraeder $A'B'C'D' \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ gegeben ist, so legen wir A, B, C so in die Ebenen α, β, γ, dass die Ebene ABC durch D' geht. In dem durch A, B, C; α, β, γ bestimmten Nullsysteme sei D der Nullpunkt von δ, dann ist $ABCD$ ein Tetraeder, das dem gegebenen zugleich ein- und umgeschrieben ist. —

Da nun, wenn A, B, C gegeben sind, α, β je in ∞^2, γ dann aber nur in ∞^1 Lagen gewählt werden kann, so folgt:

Es giebt ∞^5 Nullsysteme und zu ihnen gehörige lineare Complexe.

Zu dem nämlichen Ergebnisse gelangen wir auch vermittelst der Fünfecke, bei denen jeder Eckpunkt seine Winkelebene zur Nullebene hat (Nr. 47). Jedes Nullsystem besitzt deren ∞^{10}; denn die erste Ecke kann in ∞^3 Lagen gewählt werden, für 3 weitere ist eine Ebene, die Nullebene der vorangehenden, vorgeschrieben, in der sie

*) Vergl. Caporali-Pezzo.

liegen soll, für die letzte zwei Ebenen, die Nullebenen der vierten und der ersten; also sind jene in ∞^2, diese in ∞^1 Lagen wählbar, und jedes Nullsystem lässt sich also auf ∞^{10} Weisen nach Anleitung von Nr. 47 herstellen. Da es nun $\infty^{3.5}$ Fünfecke im Raume giebt, so folgt, dass ∞^{15-10} Nullsysteme möglich sind. —

Es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6 sechs beliebige Punkte; durch das Fünfeck 1 2 3 4 5 denken wir ein Nullsystem bestimmt; in Bezug auf dasselbe sind 2 5 und (1 2 3, 4 5 1) polar und demnach hat die Ebene 5 2 6 den Punkt (1 2 3, 4 5 1, 5 2 6) zum Nullpunkt, welcher in der Nullebene von 6 liegt.

Construirt man also aus 6 beliebigen Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 die 5 Punkte:

(1 2 3, 4 5 1, 5 2 6), (2 3 4, 5 1 2, 1 3 6), (3 4 5, 1 2 3, 2 4 6),
(4 5 1, 2 3 4, 3 5 6), (5 1 2, 3 4 5, 4 1 6),

*so liegen diese alle in einer durch 6 gehenden Ebene.**)

Durch 4 Gerade der nämlichen Regelschaar, welche zwei Paare Po- 52
laren l, l'; m, m' bilden sollen, ist das Nullsystem ebenfalls eindeutig bestimmt. Wir legen A, B auf l, die Nullebenen α, β also durch l', C auf m; dann gehört die Gerade c aus C, welche $AB \equiv l$ und $\alpha\beta \equiv l'$ trifft, der andern Schaar an und wird von der Ebene Cm' in sich aufgenommen, so dass diese die Nullebene γ sein kann. Das durch A, α; B, β; C, γ bestimmte Nullsystem hat l, l' zu Polaren; die Polare von m muss in γ liegen, andererseits aber der Regelschaar $(l l' m)$**) angehören, folglich muss sie m' sein.

Durch die Paare ll', mm' ist die Involution in der Regelschaar (Nr. 48) vollständig bestimmt. Jede Ebene schneidet sie in einer conischen, d. h. auf einem Kegelschnitte gelegenen Involution, die Verbindungslinien gepaarter Punkte derselben sind, weil sie zwei polare Geraden zugleich treffen, die in die Ebene fallenden Leitstrahlen, und das Centrum dieser conischen Involution ist also der Nullpunkt; die duale Construction führt zur Nullebene eines Punktes.

Damit ist die Eindeutigkeit der jetzigen Bestimmung dargethan. Auch aus ihr ist es leicht, die Mannigfaltigkeit 5 der Nullsysteme abzuleiten.

Jedes Nullsystem hat, wie wir wissen, ∞^6 Regelschaaren von

*) Den dualen Satz hat Schröter durch elementar stereometrische Betrachtungen bewiesen: Journal f. Mathematik Bd. 100 S. 241.

**) Die Regelschaar, zu welcher die Geraden a, b, c gehören, soll künftig durch (abc), diejenige aber, zu deren Leitschaar a, b, c gehören, durch $[abc]$ bezeichnet werden, die gemeinsame Trägerfläche ebenfalls mit (abc).

Leitstrahlen, also ebenso viele involutorische Regelschaaren von Polaren-Paaren. Dies ergiebt sich auch daraus, dass es auf $\infty^{2.4}$ Weisen möglich ist, zwei Polaren-Paare zusammenzustellen, jede durch zwei solche Paare definirte Involution aber in ∞^2 Weisen so bestimmt werden kann.

Auf jedem Gebilde, das eine Involution tragen kann, kann man ferner ∞^2 Involutionen herstellen; also giebt es ∞^{9+2} involutorische Regelschaaren, und demnach ∞^{11-6} Nullsysteme.

Ein Specialfall der nun betrachteten Bestimmung ist der, bei welchem in dem einen Paare von Polaren die beiden Geraden zusammenrücken, also *die Bestimmung des Nullsystems durch ein Paar von Polaren und einen Leitstrahl.* Die 3 Geraden bestimmen noch die Regelschaar; was nicht mehr der Fall ist, wenn auch die beiden andern Polaren sich vereinigen.

Statt zweier Polaren kann man 2 Punkte und ihre Nullebenen oder zwei Strahlenbüschel des Complexes geben.

53 *Die interessanteste Bestimmung aber des Nullsystems ist die durch 5 Leitstrahlen.*

Wenn a, b, c, d, e dieselben sind, so bilden wir aus ihnen zwei Quadrupel $abcd$, $abce$; jedes hat 2 Treffgeraden l, l'; m, m'; dieselben gehören alle 4 zur Regelschaar $[abc]$, also ist durch sie als 2 Paare von Polaren das Nullsystem bestimmt, und alle Strahlen, welche l und l' oder m und m' treffen, darunter die 5 gegebenen Geraden, sind Leitstrahlen desselben.

Oder man benutzt blos das eine Quadrupel $abcd$ und seine Treffgeraden l, l', legt A, B auf l, α, β durch l', C auf e und γ so durch e, dass $\alpha\beta\gamma$ auf ABC fällt.

Will man die etwaige Imaginarietät von l und l' umgehen, so verbinde man zwei reelle Punkte der Flächen (abc), (cde) durch die Gerade r, welche von jeder der Regelschaaren (abc), (cde) zwei reelle Geraden a_1, b_1; c_1, d_1 trifft; durch diese ersetzt man a, b, c, d und hat dann ein Quadrupel mit zwei reellen Treffgeraden r, r'. Zu dem durch a_1, b_1, c_1, d_1, e bestimmten Nullsystem gehören die Regelschaaren (a_1, b_1, e), (c_1, d_1, e) von Leitstrahlen und in ihnen die gegebenen Geraden.*)

Jedes Nullsystem hat $\infty^{3.5}$ Quintupel von Leitstrahlen, an sich enthält der Raum $\infty^{4.5}$ Quintupel von Geraden; folglich haben wir ∞^{20-15} Nullsysteme.

*) Reye, G. d. L. II S. 72.

Die 5 Geraden a, b, c, d, e bilden insgesammt 5 Quadrupel:

$$bcde,\ cdea,\ deab,\ eabc,\ abcd;$$

nennen wir die zugehörigen Paare von Treffgeraden:

$$a_1, a_2;\quad b_1, b_2;\quad c_1, c_2;\quad d_1, d_2;\quad e_1, e_2.$$

Ist nun X ein beliebiger Punkt, so sind die 5 Strahlen

$$a', b', c', d', e',$$

welche von ihm ausgehen und diese Paare bezw. treffen, Leitstrahlen und müssen also in eine Ebene, die Nullebene von X, fallen. Suchen wir dies direct zu beweisen.

a_1, a_2, b_1, b_2 befinden sich in der Regelschaar $[cde]$, ebenso a_1, a_2, c_1, c_2 in $[bde]$ und b_1, b_2, c_1, c_2 in $[ade]$. Die beiden Geraden f, g, welche a_1, b_1, c_1, c_2 treffen, befinden sich also in den Schaaren (bde) und (ade), treffen auch a_2, b_2 und gehören also auch zu (cde). Die Ebene $a'b'$ schneide nun die Flächen (ade), (bde), (cde) in den Kegelschnitten S_a, S_b, S_c. Bezeichnen wir die Schnitte der Ebene mit den Geraden durch die entsprechenden grossen Buchstaben, so liegen auf S_a: F, G, B_1, B_2, C_1, C_2, auf S_b: F, G, C_1, C_2, A_1, A_2, auf S_c: F, G, A_1, A_2, B_1, B_2. Weil diese Kegelschnitte also 2 Punkte F, G gemeinsam haben, so laufen die Verbindungslinien je der beiden übrigen Punkte, die ihnen zu je zweien gemeinsam sind, in einen Punkt zusammen:*) das sind A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Die beiden ersten sind a', b', folglich ist X dieser Punkt und CC_1 ist eine in der Ebene $a'b'$ durch ihn gezogene Gerade, welche c_1 und c_2 trifft, also die c', und ebenso fallen d', e' in die Ebene $a'b'$.**)

Damit ist auch die *eindeutige* Bestimmung des Nullsystems durch 5 Leitstrahlen dargethan.

Ein specieller Fall dieser Bestimmung ist diejenige durch ein Fünfeck $ABCDE$, denn dessen Seiten sind Leitstrahlen; die 5 Paare Polaren sind gebildet durch je eine Diagonale und die Schnittlinie der Winkelebenen der Endpunkte.

Wenn die 5 Geraden so liegen, dass sie alle von der nämlichen 54
Geraden l getroffen werden, dann fällt aus jedem der 5 Paare $a_1, a_2; \ldots$ eine Gerade nach l und folglich treffen auch a', b', ... die l; d. h. die jedem beliebigen Punkte zugehörige Nullebene geht durch l, sie wird sogar unbestimmt, wenn X auf l liegt, jede beliebige Ebene durch ihn.

Die Leitstrahlen treffen alle die Gerade l, ihr Complex wird das Gebüsche der sich auf l stützenden Strahlen, welches wir, ebenso wie

*) Steiner-Schröter's Vorlesungen über synth. Geometrie 2. Aufl. S. 246.

**) Ed. Weyr, Nouv. Annales de Mathématiques Ser. II Bd. 9 S. 324.

die Regelschaar $[lmn]$ und das Strahlennetz $[lm]$ mit den Leitgeraden l, m, n, bezw. l, m, durch $[l]$ bezeichnen wollen.

Beim Fünfeck $ABCDE$ erhalten wir diesen Fall, wenn wir zwei Ecken auf ihrer Seite zusammenrücken lassen.

Wir gelangen ebenso zum Strahlengebüsche, wenn wir, bei der Bestimmung des Nullsystems durch 2 Paare von Polaren, dieselben die eine Gerade gemein haben lassen, oder wenn wir 3 beliebigen Punkten A, B, C 3 Ebenen α, β, γ als Nullebenen zuordnen, welche durch dieselbe Gerade l gehen (von deren Punkten ja einer in ABC fällt) oder, dual, 3 Punkten A, B, C, die in gerader Linie liegen, 3 beliebige Ebenen. Im ersteren dieser beiden Fälle haben sich nämlich die Geraden $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ in die l vereinigt und diese wird also von den 3 Geraden aus einem Punkte X getroffen, welche BC und $\beta\gamma$, ... schneiden; d. h. die Nullebene von X geht durch l.

Wie ist aber das Nullsystem, als Correlation, beschaffen, wenn seine Leitstrahlen ein Gebüsche bilden?

Da jede Ebene durch die Leitgerade l des Gebüsches alle ihre Punkte zu Nullpunkten hat, so kann die Correlation nur eine ausgeartete sein, und zwar von den Ausartungen erster Ordnung (Typus): mit je einem singulären Punkte oder einer singulären Ebene oder einer singulären Axe in jedem der beiden Räume (central, planar, axial Correlation)*) nur die letzte. Eine solche Correlation mit zwei singulären Axen l und l_1 hat folgende Eigenschaften: Die Punktreihen auf ihnen, sowie auch die Ebenenbüschel um sie sind projectiv bezogen. Jedem Punkte X von Σ, der nicht auf l liegt, entspricht in Σ_1 diejenige Ebene durch l_1, die in der Projectivität der Ebenenbüschel l und l_1 zu der Ebene lX homolog ist. Einem Punkte aber auf l correspondirt jede beliebige Ebene durch denjenigen Punkt auf l_1, welcher jenem in der Projectivität der Punktreihen l und l_1 entspricht.

Nur diese von den 3 Ausartungen ermöglicht durchgängige Incidenz von Punkt und Ebene, die sich entsprechen, also ein Nullsystem, und zwar müssen dazu nicht blos die singulären Axen in eine Gerade l zusammenfallen, sondern auch beide Projectivitäten in Identitäten übergehen: jeder beliebige Punkt hat dann zur Nullebene die

*) Hirst, Proceed. London Math. Society Bd. 6 S. 7 und ausführlicher Bd. 21 S. 92; vergl. auch Fiedler, Darstellende Geometrie 2. Auflage § 167, 7. S. — Man erhält diese drei ausgearteten Correlationen, wenn man den Raum in Bezug auf einen Kegel 2. Grades, einen Kegelschnitt oder ein Ebenen-Punkte-Paar (als Ausartungen *einer Fläche 2. Grades*) polarisirt und dieser Transformation noch eine Collineation folgen lässt.

Ebene, die ihn mit l verbindet, jeder Punkt auf l jede beliebige durch ihn gehende Ebene.

Die Mechanik bietet zwei interessante Beispiele des Auftretens eines 55
Nullsystems.

1) Bei einem räumlichen Systeme von Kräften.

Dasselbe kann bekanntlich auf ∞^2 Weisen auf eine Resultirende und ein resultirendes Paar zurückgeführt werden. Lässt man jene durch einen beliebigen Punkt X gehen, so ist unter den ∞^1 parallelen Ebenen, in welchen das resultirende Paar liegen kann, die durch X gehende die Nullebene dieses Punktes. Das Kräftesystem kann ferner auf ∞^4 Weisen auf 2 windschiefe Kräfte zurückgeführt werden; die beiden Wirkungslinien sind stets Polaren des Nullsystems. Die Durchmesser desselben sind die Wirkungslinien der verschiedenen Resultirenden, die, wie eben gesagt, mit einem Paare zusammen dem Systeme äquivalent sind. Die Axe des Nullsystems ist die Wirkungslinie derjenigen von diesen Resultirenden, welche mit einem Paare in zu ihr senkrechter Ebene (und vom kleinsten Momente) zusammengehört (Poinsot's Centralaxe, Möbius' Hauptlinie des Kräftesystems).

Die Leitstrahlen endlich des Nullsystems haben die Eigenschaft, dass in Bezug auf sie das Moment des Kräftesystems null ist. Die Nullebene eines Punktes ist also diejenige Ebene durch ihn, welche alle durch ihn gehenden Geraden in sich aufnimmt, in Bezug auf welche das Moment null ist; der Nullpunkt einer Ebene der Punkt in ihr, in den alle in sie fallenden derartigen Geraden zusammenlaufen. So sind die Namen: Nullsystem, Nullpunkt u. s. w. entstanden.*)

2) Bei der unendlich kleinen Bewegung eines räumlichen starren Systems.

Nullebene (plan focal) jedes Punktes ist die Normalebene in ihm an sein (unendlich kleines) Bahnelement, Nullpunkt (foyer) einer Ebene derjenige einzige Punkt in ihr, dessen Bahnelement zu ihr senkrecht ist.

Die Leitstrahlen des Nullsystems haben die Eigenschaft, zu den Bahnelementen aller ihrer Punkte senkrecht zu sein, so dass die Orthogonal-Projectionen dieser Elemente auf sie 0 ist und also auch durch diesen Specialfall die Benutzung des Wortes „null“ gerechtfertigt wird.

Die infinitesimale Bewegung kann auf ∞^4 Weisen in zwei Drehungen zerlegt werden, deren Axen polar in Bezug auf das Nullsystem sind, in ∞^2 Weisen in eine Drehung und eine Verschiebung; die Axe der Drehung ist ein Durchmesser des Nullsystems. Geschieht die Drehung

*) Möbius, Lehrbuch der Statik, a. in Nr. 47 a. O.

um die Axe des Nullsystems, so geschieht die zugehörige Verschiebung — welche eine Drehung um die unendlich ferne Gerade der zur Verschiebungsrichtung senkrechten Ebenen ist — längs derselben: wir haben die unendlich kleine Schraubenbewegung, als welche jede unendlich kleine Bewegung ja aufgefasst werden kann.*)

II.

56 *Wir verallgemeinern den Begriff des Nullsystems.*

Als Elemente, welche in Correspondenz gesetzt werden, nehmen wir nach wie vor Punkte und Ebenen und halten daran fest, dass entsprechende Elemente durchweg incident sind, geben aber, im allgemeinen, das gegenseitig eindeutige Entsprechen auf. Wir haben dann zunächst *zwei Charakteristiken eines höheren Nullsystems:***)

1) die Zahl α der Ebenen, die einem Punkte,

2) die Zahl β der Punkte, die einer Ebene entsprechen.

Beim gemeinen Nullsysteme, wo $\alpha = \beta = 1$, fanden wir, dass die ∞^3 Strahlenbüschel, die durch entsprechende Elemente bestimmt werden, nur ∞^3 Strahlen haben, weil jeder Strahl, der zu einem von ihnen gehört, in ∞^1 sich befindet.

Bei den höheren Nullsystemen erfüllen diese ∞^3 Strahlenbüschel den ganzen Strahlenraum, und eine beliebige Gerade gehört zu einer endlichen Zahl von diesen Büscheln. *Diese Zahl γ, welche angiebt, wie oft eine beliebige Gerade mit einem Punkte und einer von seinen Nullebenen zugleich incidirt, nehmen wir als dritte Charakteristik des Nullsystems.*

Es empfiehlt sich, einige *Beispiele* von höheren Nullsystemen vorzuführen, bei denen wir jedoch den Nachweis der angegebenen Charakteristiken dem Leser überlassen.

1) Jeder Ebene des Raumes wird der Mittelpunkt des Kegelschnitts zugeordnet, welchen sie aus einer gegebenen Fläche 2. Grades schneidet; $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

2) Jedem Punkte wird die Ebene zugeordnet, die in ihm senkrecht steht auf dem von ihm ausgehenden Strahle des Strahlennetzes $[l, m]$; $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$.

*) Möbius, Lehrbuch der Statik § 183; Journal f. Mathem. Bd. 18 S. 189 (1838) (Gesammelte Werke Bd. 1 S. 545); Chasles, Comptes rendus Bd. 16 S. 1420 (1843); Jonquières, Mélanges de Géométrie pure (Paris 1856), Kap. I.

**) Das älteste Beispiel eines höheren Nullsystems ist wohl dasjenige, auf welches Cremona bei der Besprechung der abwickelbaren Fläche 4. Klasse 5. Ordnung aufmerksam machte: Comptes rendus Bd. 54 S. 604, (1862). — Sodann sehe man Math. Annalen Bd. 28 S. 277 (mit weiterer Literatur-Angabe).

3) Ein Dreiflach ist gegeben; jeder Ebene ist der Schwerpunkt des Dreiecks zugeordnet, in dem sie das Dreiflach schneidet; auch hier ist $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$.

4) Jedem Punkte des einen von 3 collinearen Räumen ordnen wir die Ebene zu, welche ihn mit den beiden entsprechenden Punkten verbindet; wir haben ebenfalls $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$.

Bei diesen Nullsystemen besteht also noch gegenseitige Eindeutigkeit, vom gemeinen Nullsysteme unterscheiden sie sich durch den von 0 verschiedenen Werth von γ.

5) Wenn ein Raum auf zwei andere correlativ bezogen ist, so ordnen wir jedem seiner Punkte die Ebene zu, die ihn mit der Schnittlinie der beiden homologen Ebenen verbindet; $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$.

6) Jedes einfach unendliche System von Flächen, in welchem μ Flächen durch einen Punkt gehen, ϱ eine Ebene und ν eine Gerade berühren, giebt ein höheres Nullsystem, wenn jedem Punkte seine Berührungsebenen an die durch ihn gehenden Flächen des Systems zugeordnet werden; $\alpha = \mu$, $\beta = \varrho$, $\gamma = \nu$.

Zum Flächenbüschel 2. Ordnung gehört also ein Nullsystem mit den Charakteristiken: $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$; wenn aber die Flächen des Büschels sich längs eines Kegelschnitts berühren, dann ist auch $\beta = \gamma = 1$ (hiervon ist 1) ein Specialfall); durchschneiden sie sich in einem Vierseite, dann $\beta = 1$, $\gamma = 2$.

7) Jedes zweifach unendliche System von Raumcurven führt zu einem Nullsysteme, in welchem jedem Punkte die Ebenen entsprechen, die in ihm sich an die durchgehenden Curven des Systems schmiegen.

Das einfachste System 2. Stufe von cubischen Raumcurven entsteht durch alle diejenigen, welche durch 2 gegebene Punkte gehen, in ihnen zwei gegebene Tangenten und zwei gegebene Schmiegungsebenen haben; beim zugehörigen Nullsysteme ist $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$.*)

8) Bei einem Strahlencomplexe 2. Grades können wir jeder Ebene den Pol der Spur einer festen Ebene in Bezug auf den in jener befindlichen Complex-Kegelschnitt, beispielsweise dessen Mittelpunkt zuordnen. Wir werden später sehen, dass für das so entstehende Nullsystem $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = 1$ ist.

9) *Zu den für uns interessantesten Nullsystemen führen die Strahlencongruenzen.* Ist m die Ordnung und n die Klasse einer Congruenz, so sind jedem Punkte die $\frac{1}{2}m(m-1)$ Verbindungsebenen der m von

*) E. Heinrichs, Ueber den Bündel derjenigen cubischen Raumcurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder haben. Dissertation von Münster 1887.

ihm ausgehenden, jeder Ebene die $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ Schnittpunkte der n in sie fallenden Congruenzstrahlen zugeordnet.*)

Die dritte Charakteristik giebt eine dritte Zahl für eine Congruenz, die Zahl, wie oft eine gegebene Gerade mit zwei Strahlen der Congruenz zu dem nämlichen Strahlenbüschel gehört, eine Zahl, die von Wichtigkeit für die Charakterisirung einer Congruenz ist. —

Jedes Nullsystem giebt unmittelbar Veranlassung zu 4 Oertern, deren Gradzahlen — zu je zweien gleich — sich einfach durch die Charakteristiken ausdrücken lassen.

Die Klasse der abwickelbaren Fläche, welche von den Nullebenen der Punkte einer Geraden l eingehüllt wird, ist $\alpha + \gamma$, denn durch jeden Punkt der l gehen zunächst seine α Nullebenen und dann die Ebenen der γ Strahlenbüschel des Nullsystems, in denen sich l befindet; *also γ Ebenen des Torsus gehen durch l.*

Da durch einen beliebigen Punkt P $\alpha + \gamma$ Ebenen dieser Fläche gehen, so folgt sofort:

Der Ort der Nullpunkte der Ebenen eines Bündels T ist eine Fläche (T) von der Ordnung $\alpha + \gamma$, welche den Scheitel T zum α-fachen Punkte hat.

Dual dazu haben wir:

Der Ort der Nullpunkte der Ebenen eines Büschels ist eine Curve von der Ordnung $\beta + \gamma$, welche der Axe des Büschels in γ Punkten begegnet.

Die Nullebenen der Punkte eines Feldes ε umhüllen eine Fläche (ε) von der Klasse $\beta + \gamma$, für welche die Trägerebene des Feldes β-fache Berührungsebene ist.

In den Fällen, wo $\alpha = \beta = 1$, $\gamma > 0$, haben wir also eine eindeutige reciproke Beziehung *von höherem Grade,* nicht Correlation (oder Reciprocität im engeren Sinne).

Zwischen den Flächen (T) und den Flächen (ε) findet folgende Beziehung statt:

Die Fläche (ε) ist der Ort der Punkte T, deren Flächen (T) die Ebene ε berühren.

Die Fläche (T) wird von denjenigen Ebenen ε tangirt, deren Flächen (ε) durch den Punkt T gehen.

Es genügt, das erstere zu beweisen. Die Berührungsebenen von (ε), die durch T gehen, haben ihre in ε gelegenen Nullpunkte auf der Schnittcurve von (T) mit ε; fällt T auf (ε), so wird die Berührungs-

*) R. Schumacher, Untersuchungen über das Strahlensystem 3. Ordnung und 2. Klasse, Dissertation von München, 1885.

ebene in ihm an diese Fläche doppelte Berührungsebene des Tangentialkegels aus T an (ε), also ihr in ε gelegener Nullpunkt Doppelpunkt des Schnitts von (T) mit ε; d. h. (T) berührt ε.

III.

Wir haben im Vorangehenden gesehen, dass das (gemeine) Null- 57
system durch den Inbegriff seiner Leit- oder Nullstrahlen zu einem Strahlencomplexe 1. Grades führt; wir haben nun noch darzulegen, dass es keine andern linearen Complexe giebt, als die auf diese Weise entstehenden.

Die Definitions-Eigenschaft des linearen Complexes*) ist, dass in einem beliebigen Strahlenbüschel sich nur ein Strahl von ihm befindet, dass also ein Strahlenbüschel, der zwei Strahlen des Complexes enthält, ganz demselben angehört.

Daraus folgt, dass von jedem Punkte des Raumes ein Strahlenbüschel an den Complex kommt, jede Ebene einen zum Complexe gehörigen Strahlenbüschel enthält. Infolge dessen wird durch den Complex jedem Punkte eine durch ihn gehende Ebene, jeder Ebene ein in ihr befindlicher Punkt zugeordnet; mit jedem linearen Complexe ist also ein in beiderlei Sinne eindeutiges Nullsystem verbunden.

Es seien X_1, X_2 zwei Punkte auf einer Geraden l und l' die Schnittlinie der zugehörigen Ebenen ξ_1, ξ_2. Durch einen beliebigen Punkt Y von l' gehen also zwei Complexstrahlen nach X_1, X_2; folglich ist die sie verbindende Ebene, welche durch l geht, die Ebene η des Complex-Strahlenbüschels aus Y. Demnach geht durch jeden Punkt von l ein von Y und ebenso ein von jedem andern Punkte von l' kommender Complexstrahl; d. h. die Nullebene jedes Punktes von l geht durch jeden Punkt von l', und umgekehrt.

Wenn also ein Punkt X sich auf einer Geraden bewegt, so dreht sich die ihm im Nullsysteme des Complexes entsprechende Ebene ξ um eine Gerade, und durchläuft der Punkt diese Gerade, so dreht sich die Nullebene um jene.

Demnach ist die Beziehung zwischen X und ξ Correlation (lineare Reciprocität) und das Nullsystem ein gemeines.

Mit jedem linearen Strahlencomplexe ist daher ein gemeines Nullsystem verbunden, für welches die Complexstrahlen Leitstrahlen sind.

*) Die erste synthetische Behandlung des linearen Complexes erfolgte durch Reye (Journal f. Mathem. Bd. 69 S. 365, Bd. 74 S. 1, G. d. L. II 10. Vortrag), und Silldorf (Zeitschrift für Mathem. Bd. 20 S. 118). Ich verweise auf diese Schriften zur Vergleichung, sowie auf de Paolis, Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari (Memorie dell' Accademia dei Lincei Ser. IV Bd. 1).

Es giebt keine andern linearen Strahlencomplexe als die, welche durch gemeine Nullsysteme geliefert werden.

Wir behalten auch für den linearen Complex die bequemen Namen *Nullebene* und *Nullpunkt* bei; zwei solche Gerade, wie l und l', von denen jede eine Punktreihe, die andere den zu ihr perspectiven Ebenenbüschel der zugehörigen Nullebenen trägt, nennen wir *polare Geraden* oder *Polaren* in Bezug auf den Complex.*)

Wir halten es nicht für überflüssig, Sätze, die wir für das Nullsystem gefunden haben, nun für den linearen Complex zu wiederholen, indem wir sie zugleich vervollständigen.

Jeder Strahl des Complexes, welcher die eine von zwei Polaren trifft, schneidet auch die andere.

Jeder Strahl, welcher zwei Polaren zugleich trifft, ist ein Strahl des Complexes.

Zwei Polaren sind windschief zu einander oder sie fallen zusammen und zwar in einen Strahl des Complexes.

Jeder Strahl des Complexes ist zu sich selbst polar und kein anderer. (Vergl. Nr. 48).

Wenn zwei Strahlen g_1 und g_2 des Complexes mit zwei Polaren l und l' in einer Regelschaar sich befinden, so sind sie zu ihnen harmonisch.

In der That, es sei g eine Gerade der Leitschaar, welche also, weil sie l und l' trifft, zum Complexe gehört; der Ebenenwurf $g(ll'\, g_1g_2)$ ist projectiv zum Punktwurfe $g(ll'\, g_1g_2)$ der Berührungspunkte seiner Ebenen mit der Trägerfläche beider Schaaren, andererseits aber auch projectiv zum Punktwurfe $g(l'l\, g_1g_2)$ der Nullpunkte seiner Ebenen in Bezug auf den Complex; also: $g(ll'\, g_1g_2) \barwedge g(l'l\, g_1g_2)$.

Dreht sich die eine von zwei Polaren um einen Punkt, so bewegt sich die andere in einer Ebene, der Nullebene des Punktes; und um-

*) Plücker hat sie „conjugirte (zugeordnete) Polaren" genannt, woraus dann „conjugirte Geraden" entstanden ist. Es scheint aber doch empfehlenswerth, ihnen im Complexe und im Nullsysteme denselben Namen zu geben. Im Nullsysteme, als einem Specialfalle der Correlation, sind sie *nicht conjugirt*, sondern *polar*. In einer Correlation sind zu einem Punkte, einer Ebene, einer Geraden polar eine Ebene, ein Punkt, eine Gerade, und conjugirt sind zwei solche Elemente, von denen eines und dann jedes mit dem polaren des andern incident ist; conjugirt zu einer Geraden ist also jede Gerade, welche die Polare derselben schneidet. Vergl. die massgebende Staudt'sche Definition (Geometrie der Lage Nr. 318—320) polarer und conjugirter Elemente beim Polarsystem, die sofort auf die allgemeine Correlation und also auch auf das Nullsystem übertragen werden kann. — Auch ist es erwünscht, wenn es möglich wird, die grosse Zahl von Bedeutungen, welche das Wort „conjugirt" nachgerade schon hat, zu vermindern.

gekehrt. Der Bündel und das Feld, die so einander zugeordnet werden, sind, als entsprechende Figuren des Nullsystems, correlativ. Sie haben einen Büschel von Complexstrahlen gemein, welche alle in dieser Correlation sich selbst entsprechen.

Beschreibt ferner die eine von zwei Polaren einen Strahlenbüschel (X, η), *so beschreibt die andere einen zu ihm projectiven Strahlenbüschel* (ξ, Y) *in der Nullebene* ξ *von* X *um den Nullpunkt* Y *von* η. *Der Complexstrahl* $XY \equiv \xi\eta$ *ist beiden Büscheln gemeinsam und entspricht in dieser Projectivität sich selbst.*

Jedes Paar polarer Geraden l *und* l' *liefert ein zum Complexe gehöriges Strahlennetz* $[ll']$. *Solcher Netze haben wir also* ∞^4 *im Complexe.* 58

Unter ihnen befinden sich ∞^3 *mit zwei in einem Complexstrahle* g *vereinigten Leitgeraden.* Der Complex zeigt uns deutlich, wie man dieses specielle Strahlennetz in der einfachsten Weise construiren kann. Es entsteht durch die Strahlenbüschel aus den Punkten des Complexstrahles g in deren auch mit g incidenten Nullebenen. Nun ist aber — wegen des Nullsystems — die Reihe jener Punkte zum Büschel dieser Ebenen projectiv; wir erhalten daher *folgende Herstellungsweise eines Strahlennetzes mit zwei vereinigten Leitgeraden:*

Man beziehe die Punktreihe auf einer Geraden projectiv auf den Ebenenbüschel um dieselbe. Die Strahlenbüschel, deren Scheitel und Ebene entsprechende Elemente dieser projectiven Beziehung sind, erzeugen ein solches singuläre Strahlennetz.*)

Diese Strahlennetze mit vereinigten Leitgeraden im Complexe bilden den Uebergang zu denen mit conjugirt imaginären Leitgeraden, auf welche wir jedoch hier noch nicht eingehen wollen.

Jedes von den ∞^4 Strahlennetzen des Complexes enthält ∞^5 cubische und ∞^8 biquadratische Regelflächen, welche seine Leitgeraden auch zu Leitlinien haben (Nr. 39, 40), der Complex demnach ∞^9, bezw. ∞^{12} derartige Regelflächen.

Zwei Paare polarer Geraden gehören derselben Regelschaar; jede weitere Gerade dieser Schaar hat ihre polare ebenfalls in ihr, und alle diese Paare bilden eine Involution.

Die Doppelstrahlen derselben gehören zum Complexe. Auch hieraus folgt, dass zwei Strahlen des Complexes, welche mit zwei Polaren desselben zur nämlichen Regelschaar gehören, harmonisch zu ihnen sind.

Die Leitschaar dieser involutorischen Regelschaar besteht aus lauter Complexstrahlen.

*) Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie S. 188.

Jede Regelschaar, welche durch 3 Strahlen des Complexes geht, gehört ihm ganz an.

Es giebt ∞^6 *Regelschaaren im Complex.*

Die verbundene Schaar einer jeden trägt eine Involution, deren gepaarte Geraden polar in Bezug auf den Complex sind, und enthält zwei Strahlen des Complexes.

Die beiden Regelschaaren einer und derselben Fläche 2. Grades können nicht zu dem nämlichen linearen Complex gehören. Denn jeder Punkt dieser Fläche würde dann seine Berührungsebene zur Nullebene haben; der Schnittpunkt aber von 3 beliebigen Berührungsebenen fällt nicht in die Ebene der Berührungspunkte (Nr. 51).

Nehmen wir an, dass 4 Complexstrahlen g_1, g_2, g_3, g_4 zwei reelle Treffgeraden l und l' haben; dann gehören sie zum Strahlennetze $[ll']$. Die Polare von l muss ebenfalls die 4 Geraden g treffen, also ist sie l'. Folglich gehört das ganze Netz $[ll']$ zum Complexe.

Es sei $[ll_1]$ ein beliebiges Strahlennetz, l', l_1' die Polaren der beiden Leitgeraden in Bezug auf den Complex, so gehört die Regelschaar, in deren Leitschaar sich die beiden Polaren-Paare befinden, zum Complexe, sowie zum Netze.

Ein Strahlennetz hat also mit einem linearen Complexe eine Regelschaar gemein.

Dies folgt auch aus dem Satze am Schlusse von Nr. 35.

Der Satz aber von Nr. 36 lehrt:

Ein linearer Complex und eine Regelschaar haben 2 Gerade gemein.

Suchen wir dies direct zu beweisen.

Wenn l, l_1, l_2 drei Gerade aus der Leitschaar der Regelschaar sind und l' die Polare von l nach dem Complexe ist, so müssen die gemeinsamen Geraden alle vier Geraden l treffen, und umgekehrt, die 2 Strahlen, welche es thun, gehören zum Complexe, weil sie l und l', zur Regelschaar, weil sie l, l_1, l_2, treffen.

Jede Congruenz, die sich in einem linearen Complexe befindet, hat gleiche Ordnung und Klasse.

Jede Raumcurve, deren sämmtliche Tangenten zu einem linearen Complexe gehören, hat gleiche Ordnung und Klasse.

Beide sind in sich dual, da sie durch Polarisirung in Bezug auf das Nullsystem des Complexes in sich selbst übergehen.

Bei der Congruenz bedeuten Ordnung und Klasse die Anzahl der Strahlen derselben, die sich in einem Strahlenbüschel des Complexes befinden.

Der lineare Strahlencomplex ist eindeutig bestimmt:

durch 3 Punkte und ihre Nullebenen, wofern nur die Verbindungsebene jener und der Schnittpunkt dieser incident sind;

durch 2 Paare Polaren, wenn dieselben zur nämlichen Regelschaar gehören;

durch 1 Paar Polaren und einen Strahl, der zum Complexe gehören soll;

durch 5 Strahlen, die dem Complexe angehören sollen.

Davon ist ein besonders interessanter Fall, wenn diese 5 Strahlen die Seiten eines räumlichen Fünfecks sind.

Wenn zwei der gegebenen Strahlen sich schneiden, so ist für den Complex ein Strahlenbüschel gegeben, und umgekehrt, dass ein Büschel gegeben ist, ist damit gleichbedeutend, dass zwei Strahlen gegeben sind.

Zwei gegebene Büschel sind mit einem Paare Polaren gleichbedeutend, von denen die eine die Scheitel verbindet, während in der andern die Ebenen sich schneiden.

Zu allen linearen Complexen, die zwei Strahlenbüschel gemein haben, gehören dann auch alle Strahlenbüschel, welche aus einem Punkte einer der beiden polaren Geraden die andere projiciren, oder durch die beiden Büschel ist ein Strahlennetz bestimmt, das allen jenen Complexen gemeinsam ist.

Es giebt ∞^5 *lineare Strahlencomplexe.*

Wir fanden in Nr. 41, dass die Doppelsecanten einer cubischen Raumcurve D^3, welche gleichzeitig zu einem linearen Complexe gehören, eine Regelfläche 4. Grades erzeugen, auf welcher D^3 doppelt ist.

Umgekehrt, *jede Regelfläche 4. Grades mit einer doppelten cubischen Raumcurve* D^3 *(Art III) ist vollständig in einem linearen Complexe enthalten.*

Denn der lineare Complex, der durch 5 von ihren Erzeugenden bestimmt ist, scheidet aus der Congruenz der Doppelsecanten der D^3 eine ebensolche Regelfläche aus; da aber eine involutorische Correspondenz [2] durch 5 Paare entsprechender Elemente eindeutig bestimmt ist (Nr. 18), so sind die Correspondenzen, welche beide auf D^3 hervorrufen, weil sie die von den 5 Erzeugenden herrührenden Paare gemein haben, identisch und infolge dessen auch die Regelflächen.

Danach enthält der lineare Complex ∞^{12} *Regelflächen 4. Grades mit einer cubischen Doppelcurve*, also ebenso viele unicursale, als solche vom Geschlechte 1.

Beim *Strahlengebüsche* nannten wir die von allen seinen Strahlen 59
getroffene Gerade *seine Leit- oder Treffgerade.**)

*) Den dritten Namen „Axe“ wollen wir vorläufig noch vermeiden.

Die Nullebene eines beliebigen Punktes in Bezug auf das Gebüsche geht durch sie, der Nullpunkt einer beliebigen Ebene liegt auf ihr. *Sie ist daher zu jeder Geraden polar.*

Die Nullebene aber eines auf der Leitgeraden gelegenen Punktes ist jede beliebige Ebene durch ihn, der Nullpunkt einer durch sie gehenden Ebene jeder beliebige Punkt auf derselben.

Schneidet man aber die Nullebene eines beliebigen Punktes mit der unbestimmten Nullebene eines Punktes der Leitgeraden, oder verbindet man den Nullpunkt einer beliebigen Ebene mit dem unbestimmten Nullpunkte einer Ebene durch die Leitgerade, so ergiebt sich:

Die Polare, in Bezug auf ein Strahlengebüsche, einer Geraden, welche die Leitgerade desselben schneidet, ist jeder beliebige Strahl des Strahlenbüschels, den beide bestimmen.

*Die Zahl der Strahlengebüsche**) *ist* ∞^4.

Demnach ist diese Ausartung für den linearen Complex eine einfache Bedingung und *ein* ∞^i-*System von linearen Complexen enthält* ∞^{i-1}, *ein einfach unendliches System eine endliche Zahl von Gebüschen.*

Vier gegebene Strahlen gehören zu 2 Strahlengebüschen, welche ihre Treffgeraden zu Leitlinien haben.

Im Raume „von fünf Dimensionen", dessen Grundelement der lineare Complex ist, bilden die Gebüsche oder, wenn wir so sagen wollen, die Geraden einen Raum „von 4 Dimensionen" und zwar einen quadratischen, wie wir später erkennen werden.

Dies ist vergleichbar mit dem quadratischen Raume von 4 Dimensionen, den im Raume von 5 Dimensionen, welchen die Curven 2. *Ordnung* in fester Ebene erzeugen, die Parabeln oder die Kegelschnitte K^2 bilden, die zu einem festen Kegelschnitte C^2 in der Beziehung stehen, dass ∞^1 Dreiecke dem C^2 um-, einem K^2 eingeschrieben sind; jeder Büschel von Kegelschnitten enthält 2 Parabeln oder zwei solche Kegelschnitte K^2 (Nr. 25). Wir kommen hierauf zurück.

Während der allgemeine lineare Complex lauter gleichartige Strahlenbüschel hat, zerfallen die des Gebüsches in zwei Systeme: die einen haben ihren Scheitel in einem beliebigen Punkte und senden

*) Man hat dieses Gebilde bisher mit einem Namen bezeichnet, der für ein so einfaches und fundamentales Gebilde viel zu umständlich ist: *specieller linearer Complex* oder linearer Complex von besonderer Art (Plücker).

Schubert hat im „Kalkül der abzählenden Geometrie" S. 4 das Wort „Strahlenaxe" gebraucht; doch, glaube ich, ist man bei diesem Namen eher geneigt, an die gemeinsame Leitgerade, als an den Inbegriff der ∞^3 treffenden Geraden zu denken.

ihre Ebene durch die Leitgerade, die andern haben eine beliebige Ebene, aber ihren Scheitel auf der Leitgeraden.

Die Ordnung einer im Gebüsche befindlichen Congruenz ist die Zahl ihrer Strahlen in einem Büschel der ersten Art, die Klasse hingegen die Zahl ihrer Strahlen in einem Büschel der zweiten Art.

Für eine in einem Strahlengebüsche enthaltene Congruenz gilt also der Satz von der Gleichheit von Ordnung und Klasse, den wir oben beim allgemeinen linearen Complexe fanden, *nicht.* Damit er für eine Congruenz des Gebüsches gelte, ist nothwendig, dass die Vielfachheit der Leitgeraden als Kante aller der von ihren Punkten ausgehenden Congruenzstrahlen-Kegel dieselbe sei wie ihre Vielfachheit als Tangente an den Congruenzstrahlen-Curven in den Ebenen durch sie; insbesondere hat eine im Gebüsche enthaltene Congruenz, zu der die Leitgerade nicht gehört, gleiche Ordnung und Klasse.

IV.

Ein linearer Complex hat ∞^2 Durchmesser; sie sind polar zu den 60
unendlich fernen Geraden und gehen durch den Nullpunkt der unendlich fernen Ebene 𝔈.

Diesen wichtigen unendlich fernen Punkt, die Richtung der sämmtlichen Durchmesser, wollen wir mit 𝔘 bezeichnen und seine Polare nach der absoluten Curve $\mathfrak{K}^2$, welche den zur Durchmesser-Richtung senkrechten Ebenen gemeinsam ist, mit 𝔲.

Die Ebenen δ der Complex-Strahlenbüschel, welche von den verschiedenen Punkten eines Durchmessers d ausgehen, sind alle parallel, weil sie die Polare d'_∞ von d gemein haben.

Jedem Durchmesser ist also eine gewisse Stellung zugeordnet und die Complexstrahlen, welche ihn schneiden, sind zu dieser Stellung parallel.

Zwei beliebige Polaren l und l' und ein Durchmesser d gehören zu derselben paraboloidischen Regelschaar, deren unendlich ferne Gerade die d'_∞ ist.

Durch jede der 3 Geraden lässt sich also eine Ebene legen parallel zu den beiden andern, oder durch alle drei lassen sich zu einander parallele Ebenen legen. Die übrigen Polarenpaare der Regelschaar sind zu diesen Ebenen ebenfalls parallel. Diese Ebenen λ sind die einen und die δ die andern Leitebenen des Paraboloids. Die verbundene Regelschaar, welche zu den δ parallel ist, besteht aus lauter Complexstrahlen.

Derjenige Durchmesser des Complexes, der zur Geraden 𝔲 polar, also *zu den Ebenen α der von seinen Punkten ausgehenden Complex-*

Strahlenbüschel normal ist, heisst die Axe (Hauptlinie) *a des Complexes;* so dass wir $\mathfrak{u}$ auch als a'_∞ bezeichnen können.

Alle Strahlen eines linearen Complexes, welche die Axe treffen, schneiden sie rechtwinklig; und umgekehrt jeder Strahl, der die Axe rechtwinklig schneidet, gehört zum Complex.

Die Nullebene jedes Punktes geht durch das Loth aus ihm auf die Axe.

Wenn eine Gerade 4 Strahlen eines linearen Complexes rechtwinklig schneidet, so ist sie dessen Axe; in der That, die zweite Treffgerade der 4 Strahlen ist einerseits die unendlich ferne Gerade der zur ersten senkrechten Ebenen, andererseits aber die Polare der ersten in Bezug auf den Complex.

Das Paraboloid, zu dessen einer Schaar die Axe a und zwei Polaren l und l′ gehören, ist ein gleichseitiges, weil die Leitebenen λ und α zu einander senkrecht sind. In der andern Schaar befindet sich das gemeinsame Loth zwischen a und l, welches also zum Complexe gehört; dasselbe ist senkrecht zu den Ebenen λ und schneidet mithin alle Geraden der ersten Schaar rechtwinklig, insbesondere also auch l'.

Das gemeinsame Loth zwischen der Axe a eines linearen Complexes und irgend einer Geraden l schneidet auch deren Polare l′ orthogonal.

Und da es nur ein gemeinsames Loth zwischen l und l' giebt, so hat man auch:

Das gemeinsame Loth zwischen zwei Polaren l und l′ schneidet die Axe rechtwinklig.

61 Beim *Strahlengebüsche* ist *die Leitgerade l,* wie wir fanden, polar zu jeder Geraden, also auch zur unendlich fernen Geraden der zu l normalen Ebenen; diese ist die $\mathfrak{u}$, da der unendlich ferne Punkt von l der $\mathfrak{U}$ ist; also *ist l die Axe* und wird deshalb gewöhnlich so genannt.

Eine unendlich ferne Gerade, welche die l trifft, hat ∞^1 *polare Durchmesser,* alle Parallelen zu l in der Ebene durch l und die Gerade.

Wenn die Treffgerade eines Gebüsches die absolute Curve $\mathfrak{K}^2$ *schneidet, so hat das Gebüsche nicht blos die Treffgerade zur Axe, sondern jeden Strahl des Büschels, den sie und die Tangente des* $\mathfrak{K}^2$ *im Treffpunkte bestimmt;* denn jeder von diesen Strahlen ist sowohl polar zur genannten Tangente nach dem Gebüsche, als auch geht er durch den Pol derselben nach $\mathfrak{K}^2$.

Deshalb empfiehlt es sich, für die von allen Strahlen eines Gebüsches getroffene Gerade die Namen „Leitgerade“ oder „Treffgerade“ beizubehalten.

Es giebt sogar Gebüsche mit ∞^2 *Axen;* nämlich jedes Gebüsche, dessen Treffgerade l unendlich fern ist, hat so viele: man kann erstens alle unendlich fernen Geraden als Axen bezeichnen, denn zu jeder von

ihnen giebt es in dem Strahlenbüschel, den sie mit l bildet, einen Strahl, durch dessen Pol nach $\mathfrak{K}^2$ sie geht; zweitens kann man alle Strahlen, die nach dem Pole von l in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$ gehen, als Axen auffassen.

Es sei P^2 ein Rotationscylinder, welcher die Axe eines linearen 62
Complexes zur Drehaxe hat; sein Radius sei p. Seine Berührungsebenen gehen also durch $\mathfrak{U}$, daher liegen die Scheitel der in ihnen befindlichen Complex-Strahlenbüschel in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$, der Nullebene von $\mathfrak{U}$, und erfüllen den Kegelschnitt $\mathfrak{E}^2$, der, im Nullsysteme, dem Cylinder P^2 entspricht.

Die beiden unendlich fernen Kanten desselben sind die Tangenten $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}''$ aus der Spitze $\mathfrak{U}$ an $\mathfrak{K}^2$; sie sind Leitstrahlen des Nullsystems, gehen in sich selbst über und berühren also auch den $\mathfrak{E}^2$. Die Axe a ist, als Axe von P^2, der Polarstrahl von $\mathfrak{E}$ nach P^2; folglich gehen die Berührungsebenen des P^2 längs jener Kanten durch a, und demnach liegen ihre Berührungspunkte mit $\mathfrak{E}^2$, die ihnen im Nullsysteme entsprechen, auf der Polare $\mathfrak{u}$ von a; da diese auch Polare von $\mathfrak{U}$ nach $\mathfrak{K}^2$ ist, so berühren sich $\mathfrak{E}^2$ und $\mathfrak{K}^2$ in den Punkten $\mathfrak{u}$ ($\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}''$).

Folglich ist $\mathfrak{E}^2$ der unendlich ferne Schnitt eines gewissen Rotationskegels (aus beliebigem Punkte), dessen Axe zu a parallel ist. Wenn φ der Winkel der Kanten desselben gegen die Axe a ist, so haben auch die Complexstrahlen in den Berührungsebenen des Cylinders P^2, welche je zu einer Kante dieses Kegels parallel sind, alle dieselbe Neigung φ gegen die Axe.

Nun ist p die kürzeste Entfernung aller dieser Complexstrahlen von a; also:

Alle Strahlen eines linearen Complexes, welche gleiche kürzeste Entfernung von der Axe haben, haben auch gleiche Neigung gegen dieselbe.

Es sei X ein Punkt auf P^2, der auch die Entfernung p von a hat; seine Nullebene ξ geht, wie wir wissen, durch dieses Loth h; der zu dem Lothe senkrechte Strahl g in dem Complex-Strahlenbüschel (X, ξ) berührt den Cylinder und hat also die Neigung φ gegen a. Nennen wir k die durch X gehende Cylinderkante, so ist h senkrecht zur Berührungsebene gk, und diese also senkrecht zu ξ und g die Projection von k auf ξ, folglich $\sphericalangle (a, \xi) = (k, \xi) = (k, g) = (a, g) = \varphi$.

Für alle Punkte, welche dieselbe Entfernung von der Axe eines linearen Complexes haben, sind die Nullebenen gleich geneigt gegen dieselbe.

Beschreibt also durch Drehung um a ein Punkt X einen Kreis k^2, dessen Ebene μ senkrecht zu a und dessen Mittelpunkt M auf a gelegen ist, so umhüllt die Nullebene ξ einen Rotationskegel um die Axe mit der Spitze in M.

Man kann dies auch so erkennen: M und die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{u}$ von μ sind polar in Bezug auf k^2; also sind μ und a, die zu ihnen im Nullsysteme polar sind, polar in Bezug auf den von $\mathfrak{x}$ umhüllten Kegel; d. h. a ist eine Axe desselben.

Die rechtwinklige Involution conjugirter Durchmesser des k^2 geht durch das Nullsystem, welches alle diese Durchmesser zu Leitstrahlen hat, in sich selbst über; folglich enthält μ eine rechtwinklige Involution conjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegel und ist eine cyclische oder Kreisebene desselben, so dass ihre Parallelebenen ihn in Kreisen schneiden. Wenn aber eine cyclische Ebene eines Kegels zugleich Symmetrieebene ist, so ist er Rotationskegel.*)

Durch eine Drehung um die Axe eines linearen Complexes wird jeder Punkt und seine Nullebene in einen andern Punkt und seine Nullebene übergeführt, also jeder Complex-Strahlenbüschel in einen andern.

Ein linearer Complex geht durch eine Drehung um seine Axe in sich selbst über.

63 Da die Complex-Strahlenbüschel in den zur Axe parallelen Ebenen (Durchmesser-Ebenen) aus Parallelstrahlen bestehen, so bringt eine Verschiebung längs der Axe jeden Strahl des Complexes in einen andern Strahl desjenigen von diesen Parallel-Strahlenbüscheln, zu dem er gehört.

Also auch eine Verschiebung längs seiner Axe oder in der Durchmesserrichtung führt einen linearen Complex in sich selbst über.

Eine Vereinigung beider Bewegungen giebt bekanntlich eine Schraubenbewegung um die Axe.

Folglich führt auch jede Schraubenbewegung um die Axe einen linearen Complex in sich selbst über.

Und es macht hierin keinen Unterschied, ob die bei einer solchen Bewegung von einem Punkte beschriebenen Schraubenlinien links oder rechts gewunden sind.

Wir wollen uns aber nun überzeugen, dass *der eine Windungssinn in einer innigeren Beziehung zum Complexe steht.*

Kehren wir zu dem Rotationscylinder P^2 um die Axe a und dem Kegelschnitte $\mathfrak{C}^2$ in der unendlich fernen Ebene zurück, der durch die Scheitel der aus Parallelstrahlen bestehenden Complex-Strahlenbüschel in den Berührungsebenen von P^2 gebildet wird. Von einem Punkte $\mathfrak{X}$ des $\mathfrak{C}^2$ kommen an sich 2 Tangentialebenen an P^2, welche zu einander parallel und gleichweit von a entfernt sind. Aber nur in

*) Vergl. Reye, G. d. L. II S. 74.

einer von ihnen kann der zum Punkt $\mathfrak{X}$ gehörige Complex-Strahlenbüschel liegen; der in der andern Ebene hat seinen Scheitel in dem zweiten Schnitte der Geraden $\mathfrak{U}\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{C}^2$.

Denken wir uns in die Axe a einen positiven Sinn gelegt und auf die Strahlen der beiden eben erwähnten Parallel-Strahlenbüschel ebenfalls einen positiven Sinn und zwar so, dass der Winkel mit dem positiven Sinne der Axe ein spitzer ist, so wird für einen Beobachter, der in die Axe so gestellt ist, dass deren positiver Sinn von den Füssen nach dem Kopfe geht, und welcher je nach dem Büschel hinblickt, der positive Sinn auf allen Strahlen des einen wie des andern Büschels nach rechts oder auf allen nach links gehen.

Von der Willkür der Festsetzung des positiven Sinns auf der Axe ist dies Resultat übrigens unabhängig; denn kehrt man den positiven Sinn auf der Axe um und damit auch den auf den Büschelstrahlen und die Stellung des Beobachters, so bleibt das Ergebniss: gingen die positiven Sinne auf den Strahlen vorhin nach rechts oder links, so geschieht es auch nun. Der Beobachter betrachtet in jedem Falle den für ihn *obern* spitzen Winkel.

Der continuirliche Uebergang von diesen beiden Büscheln zunächst zu denen in den übrigen Berührungsebenen von P^2 und dann zu denen, die bei den weiteren Rotationscylindern um a sich ergeben, zeigt, dass dasselbe für alle Strahlen aller dieser Büschel gilt; diese ∞^2 Strahlenbüschel erfüllen den ganzen Complex, da jeder Strahl desselben einen dieser Cylinder berührt. So erhalten wir folgenden wichtigen Satz:

*Es giebt gestaltlich zwei wesentlich verschiedene Arten von linearen Complexen: rechts gewundene und links gewundene.**)

Die ∞^2 *Strahlen des Complexes, welche den nämlichen Rotationscylinder* P^2 *um* a *berühren, sind die Tangenten von* ∞^1 *auf demselben gelegenen congruenten und also gleich — sämmtlich rechts oder sämmtlich links — gewundenen Schraubenlinien.*

Denn berührt einer von diesen Strahlen, g, den Cylinder in P und ist P' der unendlich nahe Punkt auf g neben P, so giebt es in der Ebene, welche den Cylinder längs der durch P' gehenden Kante berührt, einen durch P' gehenden Complexstrahl g', der, weil er eben P^2 tangirt, mit der Axe den nämlichen Winkel bildet wie g, folglich die g in P berührende Schraubenlinie auf P^2 auch berührt. Weiter fortschreitend, durchlaufen wir die Tangenten dieser Schraubenlinie. Durch einen Punkt des Cylinders, den Neigungswinkel der Tangenten

*) Plücker, Neue Geometrie des Raumes Nr. 47.

gegen die Axe und den Windungssinn ist bekanntlich die Schraubenlinie eindeutig bestimmt.

Die Schmiegungsebene eines Punktes einer solchen Complex-Schraubenlinie ist ersichtlich dessen Nullebene im Complex; die Schmiegungsebenen einer Schraubenlinie in ihren Schnitten mit einer Ebene laufen also in einen Punkt dieser Ebene, ihren Nullpunkt, zusammen.*)

Die dreifache Unendlichkeit der Strahlen eines linearen Complexes können wir nun in einer sehr anschaulichen Weise durchschreiten:

Wir gehen von den ∞^1 Tangenten einer Complex-Schraubenlinie aus, verschieben diese dann auf ihrem Cylinder und wiederholen dies auf allen Cylindern.

64 Für diesen Uebergang von einem Cylinder zu einem andern ist es nothwendig, die Beziehung zwischen dem Cylinderradius p oder, was dasselbe ist, der kürzesten Entfernung der den Cylinder berührenden Complexstrahlen von der Axe und dem Neigungswinkel φ dieser Strahlen gegen die Axe, oder auch zwischen der Entfernung p eines Punktes X von der Axe und der Neigung φ seiner Nullebene ξ gegen die Axe zu ermitteln.

Auf einer Geraden h, welche die Axe a senkrecht schneidet und daher Complexstrahl ist, seien X_0, X_∞, X, X' der Fusspunkt auf der Axe, der unendlich ferne Punkt und zwei beliebige Punkte; wir setzen $X_0X = p$, $X_0X' = p'$. Die Nullebene ξ_0 von X_0 ist senkrecht zu a, diejenige ξ_∞ von X_∞ geht durch a, weil X_∞ auf der Polare $\mathfrak{u}$ von a liegt; die von X und X' seien ξ und ξ' und bilden mit a oder, was dasselbe ist, mit ξ_∞ die Winkel φ und φ'. Nun ist, weil der Punktwurf auf h und der Ebenenwurf um h einander im Nullsysteme entsprechen:

$$(X_0 X_\infty X X') = (\xi_0 \xi_\infty \xi \xi');$$

also:

$$\frac{p}{p'} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} : \frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi'},$$

oder:

$$p \operatorname{tang} \varphi = p' \operatorname{tang} \varphi'.$$

Bei der Ableitung dieser Formel ist vorausgesetzt, dass p und φ die Vorzeichen ändern, wenn X durch a geht. Wir können uns aber darauf beschränken, X auf h blos auf der einen Seite von a zu bewegen, weil er damit schon auf alle Rotationscylinder um a gelangt; d. h. wir nehmen p absolut; φ hat dann bei demselben Complexe

*) Reye, Zeitschrift f. Mathematik Bd. 15 S. 64.

durchweg dasselbe Vorzeichen, und dies Vorzeichen bestimmen wir nun so, dass φ und also $p \operatorname{tang} \varphi$ positiv oder negativ ist, je nachdem der Complex rechts oder links gewunden ist.

Auf die Formel hat es keinen Einfluss, ob φ und φ' von ξ_∞ nach ξ und ξ' gemessen werden oder umgekehrt. Wir wählen letzteres; dann können wir $\varphi = \xi \xi_\infty$ auch beschreiben als den spitzen*) Winkel *vom* Complexstrahl *nach* einer Parallelen zur Axe, zu welcher am besten die Berührungskante der den Strahl enthaltenden Berührungsebene des Cylinders P^2, der ihn tangirt, genommen wird. Es ist wohl jetzt meistens üblich, den der Uhrzeiger-Drehung entgegengesetzten Sinn als den positiven anzunehmen. Für einen in der Axe befindlichen Beobachter wird dann — gleichgiltig welches der Sinn von den Füssen nach dem Kopfe ist — der Sinn und das Vorzeichen des Winkels φ positiv oder negativ sein, je nachdem der erste Schenkel des für den Beobachter oberen spitzen Winkels, d. h. der auf dem Complexstrahle liegende rechts oder links vom zweiten, dem auf der Berührungskante liegenden, sich befindet; d. h. je nachdem der Complex rechts oder links gewunden ist. Danach hat sich folgendes Resultat ergeben:

Für alle Strahlen eines linearen Complexes ist das Product aus der absoluten Länge der kürzesten Entfernung von der Axe in die Tangente des nach der obigen Vorschrift mit einem Vorzeichen behafteten spitzen Winkels vom Complexstrahle nach der Axe (oder einer ihn schneidenden Parallelen zu der Axe) *constant und zwar positiv oder negativ, je nachdem der Complex rechts oder links gewunden ist.*

Diese constante Grösse nennt man, nach Plücker, *den Parameter k* des Complexes.

Auch das Product aus der Entfernung eines beliebigen Punktes von der Axe in die Tangente des Winkels seiner Nullebene mit der Axe hat den nämlichen Werth.

Und endlich ist der absolute Werth des Parameters auch gleich dem doppelten Verhältnisse des Querschnittes irgend eines der Rotationscylinder P^2 zur Ganghöhe seiner Complex-Schraubenlinien; denn ist H die Ganghöhe, so ist (absolut):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 p \pi}{H}.$$

Wenn p zunimmt, nimmt φ ab und H zu.

Bei jeder Schraubenbewegung durchlaufen alle bewegten Punkte Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe.

*) Wegen obiger Festsetzung über die positiven Sinne.

Führt man also einen linearen Complex durch eine Schraubenbewegung um seine Axe in sich selbst über, die im Windungssinne mit ihm übereinstimmt, so werden auf einem, aber nur einem der mit ihm coaxialen Rotationscylinder die Complex-Schraubenlinien in sich selbst verschoben.

Der Gestalt nach ist der lineare Complex durch seinen (mit einem Vorzeichen behafteten) Parameter vollständig bestimmt; gestaltlich haben wir also nur ∞^1 *lineare Complexe. Der Gestalt und Lage nach ist er durch die Axe und den Parameter oder durch die Axe und einen seiner Strahlen oder durch eine von seinen Schraubenlinien bestimmt.*

Die ∞^4 Lagen, welche die Axe einnehmen, und die ∞^1 Werthe, die der Parameter haben kann, führen zu den ∞^5 linearen Complexen.

Die im Vorangehenden erörterten Eigenschaften des linearen Complexes haben mich veranlasst, für denselben, der, ebenso wie die übrigen Gebilde 1. Grades, eines einfacheren Namens bedarf, die Benennung „*Strahlengewinde*“ oder kurz „*Gewinde*“ anzunehmen, und nachdem dieselbe (sowie die Namen „Strahlennetz“ und „Strahlengebüsche“) den Beifall einiger Fachgenossen gefunden, erlaube ich mir, dies Wort den deutschen Geometern vorzuschlagen,*) und hoffe, dass es auch in Bezug auf die Uebersetzbarkeit glücklich gewählt sei.

Ich habe zwar denselben Namen vor einiger Zeit für den speciellen linearen Complex oder, wie ich ihn nun nenne, das Strahlengebüsche vorgeschlagen. Der jetzige Vorschlag scheint mir aber der bessere, eben wegen der Beziehung des Namens „Gewinde“ auf die „Windungs“-Eigenschaften des allgemeinen linearen Complexes.

Der specielle, das Gebüsche, ist gerade „nicht gewunden“; sein Parameter ist 0, denn bei den die Leitgerade oder Axe im Endlichen schneidenden Strahlen ist $p = 0$, bei den zu ihr parallelen $\varphi = 0$.

Die Strahlengebüsche bilden den Uebergang von den rechts gewundenen zu den links gewundenen linearen Complexen.

Diejenigen Strahlen eines Gewindes, bei denen die kürzesten Entfernungen von der Axe den nämlichen Fusspunkt auf der Axe und dieselbe Länge haben, und welche deshalb auch gleich geneigt sind gegen die Axe, bilden ersichtlich die eine Regelschaar eines Rotations-Hyperboloids um die Axe.

Wir erhalten so ∞^2 *das Gewinde mit ihren einen Schaaren erfüllende*

*) Auch die ungefällige Zusammenstellung: „lineares System von linearen Complexen“ macht eine einfachere Bezeichnung erwünscht.

*Rotations-Hyperboloide, die bei jeder Drehung um die Axe in sich selbst übergehen.**)

Der Satz über die Constanz von p tang φ für alle Strahlen eines Gewindes lässt eine Verallgemeinerung zu. 65

Wenn p die kürzeste Entfernung einer beliebigen Geraden l von a und φ' der Winkel ihrer polaren Geraden l' mit der Axe ist, so ist auch, aber nur absolut:

$$p \operatorname{tang} \varphi' = k = p' \operatorname{tang} \varphi;$$

wo p' auf l', φ auf l sich bezieht.

In der That, es sei t eine Gerade, welche a, l, l' trifft, also ein Complexstrahl, L der Punkt lt und $\lambda \equiv tl'$ seine Nullebene, ferner λ_a die durch l gehende zu a und l' parallele Ebene (Nr. 60); ihr Nullpunkt ist der unendlich ferne Punkt von l'. Bewegen wir also l in dem Büschel (L, λ_a), so bewegt sich l' in λ um den eben genannten unendlich fernen Punkt, also zu sich parallel, dabei behält l seine kürzeste Entfernung p gegen a, l' seinen Winkel φ' mit a bei; also bleibt p tang φ' fest und da es in (L, λ_a) einen Strahl des Gewindes giebt, in dem sich dann l und l' vereinigen, so zeigt sich, dass p tang φ' den Werth hat, der ihm bei den Complexstrahlen zukommt, also den constanten Werth k.

Jedoch gilt das, wie gesagt, nur absolut. Wenn die Involution der Polarenpaare in der Regelschaar (all') elliptisch ist, also l und l' durch a getrennt sind, so wechselt φ', sobald l' von der einen Seite von a auf die andere übergeht, sein Vorzeichen; folglich ist dann:

$$p \operatorname{tang} \varphi' = p' \operatorname{tang} \varphi = -k. \text{ —}$$

Wir haben noch:

$$pp' \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \varphi' = k^2, \quad \frac{p}{p'} = \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{\operatorname{cotg} \varphi'}.$$

Die Gerade l, als Complexstrahl, bestimmt ein mit dem gegebenen Gewinde coaxiales Gewinde, ebenso l'; diese beiden Gewinde nennt Plücker *Polar-Complexe* in Bezug auf den gegebenen Complex; ihre Parameter sind p tang φ und p' tang φ', also ist ihr Product gleich dem Quadrate des Parameters des gegebenen Gewindes; sie sind deshalb stets von derselben Windungsart.

Durchläuft l den einen Complex, dann beschreibt l' den andern.

Wir wollen die erhaltenen Formeln etwas deutlicher schreiben, indem wir in üblicher Weise den Winkel zweier Geraden l und g

*) Vergl. auch Schoute, Verslagen en Mededeelingen der Akademie zu Amsterdam 3[te] Reihe Theil V S. 66.

durch lg, die absolute Länge der kürzesten Entfernung aber durch $(lg) = (gl)$ bezeichnen.

Wenn also g ein Strahl des Gewindes ist, so ist:

$$(ag) \operatorname{tang} ga = k;$$

sind l und l' zwei Polaren in Bezug auf dasselbe, so ist:

$$(al) \operatorname{tang} l'a = (al') \operatorname{tang} la = \pm k,$$

und zwar $+$ oder $-$, je nachdem die involutorische Regelschaar $(a\mathfrak{u}, ll')$ hyperbolisch oder elliptisch ist.

Jedenfalls haben die Winkel la und $l'a$ dasselbe Vorzeichen.

66 Unter dem Winkel zweier Geraden l und g verstehen wir, wenn der Beobachter in l sich befindet und die Gerade g und eine sie schneidende Parallele zu l betrachtet, den obern spitzen Winkel mit dem Sinne von g nach der Parallelen, positiv, wenn dieser Sinn der Uhrzeiger-Drehung entgegengesetzt ist, negativ im andern Falle. Wir wissen schon, dass keine Aenderung eintritt, wenn der Beobachter umgekehrt in l stehend gedacht wird; er betrachtet dann den Scheitelwinkel. Aber es tritt auch keine Aenderung ein, wenn sich der Beobachter in g befindet und den obern spitzen Winkel von l nach einer sie schneidenden parallelen Linie zu g betrachtet. Demnach ist zwischen den Bezeichnungen gl und lg, bei welchen der Beobachter in l, bezw. in g gedacht wird, kein Unterschied.

Wenn wir mit der g das ganze Gewinde, mit den l und l' den ganzen Raum durchlaufen, so dürfte die obige Festsetzung, wie das Vorzeichen des Winkels zweier Geraden zu bestimmen und dass die kürzeste Entfernung zweier Geraden immer absolut zu nehmen ist, wohl die angemessenste sein.

Wenn man aber z. B. nur Polarenpaare l, l' betrachtet, welche derselben, auch a enthaltenden, paraboloidischen Regelschaar angehören, so liegen erstens alle kürzesten Entfernungen (al), (al') auf derselben Geraden h der Leitschaar und die Winkel zwischen den l, l' und a können alle in dieselbe, zu h senkrechte, Ebene λ^0 gebracht werden; und dann ist es wünschenswerth, jene überhaupt, und diese in der üblichen Weise mit Vorzeichen zu behaften. Wir legen also auf h einen positiven Sinn und betrachten die Ebene λ^0, in der wir uns den Winkel liegend denken, so, dass wir in der positiven Richtung von h auf sie zu sehen; die kürzesten Entfernungen $(al), \ldots$ lassen wir auf a anfangen.

Es sei die Involution $(a\mathfrak{u}, ll')$ hyperbolisch, dann schneiden l und l' die h beide auf der positiven Seite oder beide auf der ne-

gativen; im ersteren Falle sind (al), (al') beide positiv und die Winkel la und $l'a$ bekommen hier dasselbe Vorzeichen, wie bei der früheren Bestimmung; im zweiten Falle werden (al), (al') negativ, und die Winkel erhalten andere Vorzeichen wie früher; also bleibt die Formel:

$$(al) \operatorname{tang} l'a = (al') \operatorname{tang} la = k$$

bestehen. Ist die Involution elliptisch, so dass etwa l die h auf der positiven und l' sie auf der negativen Seite schneidet, so wechseln also (al') und $\sphericalangle l'a$ ihr Vorzeichen gegen früher, und in der bisherigen Formel

$$(al) \operatorname{tang} l'a = (al') \operatorname{tang} la = -k$$

geht $-k$ in k über, so dass in beiden Fällen dieselbe Formel gilt.

Da es sich um die Tangente handelt, so ist es nicht einmal erforderlich, am *spitzen* Winkel festzuhalten; denn der spitze und der stumpfe Winkel la haben, weil sie ungleiches Vorzeichen besitzen, dieselbe Tangente, auch dem Vorzeichen nach. Wichtig ist nun aber, Anfangs- und Endschenkel zu unterscheiden.

Unter dem *Momente* zweier Geraden g und l versteht man bekanntlich das Product aus der kürzesten Entfernung derselben in den Sinus ihres Winkels; bezeichnen wir es mit $m(l, g)$, so ist:

$$m(l, g) = m(g, l) = (gl) \sin gl.$$

In Bezug auf das Vorzeichen des Winkels gl gilt folgendes: Beiden Geraden werden positive Sinne gegeben; dann wird von einem in l befindlichen Beobachter der Winkel beobachtet, der die positiven Schenkel der g und einer sie schneidenden Parallelen zu l zu Anfangs- und Endschenkeln hat; die Vertauschung von l und g ändert das Vorzeichen nicht. Den Factor (gl) nehmen wir absolut.

Es sei (S, σ) ein Strahlenbüschel, g ein beliebiger Strahl desselben, t aber derjenige von seinen Strahlen, der eine gegebene Gerade l in L trifft. Die Parallele g_1 durch L zu g fällt in σ; T sei die (Orthogonal-)Projection von S auf die Ebene $\gamma \equiv lg_1$. Dann ist:

$$(lg) = ST = SL \sin SLT = SL \sin t\gamma,$$

also:

$$m(l, g) = SL \sin t\gamma \sin lg = SL \sin t\gamma \sin lg_1$$
$$= SL \sin (tlg_1) = SL \,.\, \sin tg \,.\, \sin tl \,.\, \sin (tl, \sigma);$$

wo $\sin (tlg_1)$ der Eckensinus des Dreikants tlg_1 ist.

In dieser Formel für $m(l, g)$ nehmen wir SL, tl und (tl, σ) absolut, tg aber mit einem Vorzeichen behaftet an. Sie lehrt, dass, während g im Strahlenbüschel (S, σ) sich bewegt, $m(l, g)$ zu $\sin tg$

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

sich proportional verändert und zwar, da beide zugleich durch 0 gehen, auch dem Vorzeichen nach. Also ist für alle Strahlen von (S, σ)

$$m(l, g) : \sin tg$$

constant.

Wenn ferner τ eine beliebige Ebene durch t und g_2 die Projection von g_1 auf sie ist, so lehrt das Dreikant tg_1g_2, dass absolut:

$$\sin \sigma\tau = \frac{\sin \tau g}{\sin tg};$$

daher sind, während g den Büschel (S, σ) durchläuft, die absoluten Werthe von $m(l, g)$ und $\sin \tau g$ proportional und derjenige von

$$m(l, g) : \sin \tau g$$

eine Constante.

67 Es gehöre nun (S, σ) zu einem gegebenen Gewinde Γ, als l nehmen wir einen Durchmesser d desselben, als τ die Nullebene δ des Punktes $D \equiv dt$ (des bisherigen L), welche t in sich aufnimmt.

Während also g den Büschel (S, σ) von Γ durchläuft, bleibt

$$\frac{m(d, g)}{\sin \delta g} = (dg) \frac{\sin dg}{\sin \delta g}$$

fest. Sei g' ein beliebiger anderer Strahl von Γ, g der von ihm getroffene Strahl von (S, σ), (S', σ') der ebenfalls zu Γ gehörige Büschel, den g und g' bestimmen, und t' der Strahl dieses Büschels, der den Durchmesser d trifft, so ist die Nullebene von dt' zu δ parallel. Also ändert sich bei g, wenn wir von einem der beiden Büschel (S, σ), (S', σ') zum andern übergehen, nichts an unserm Ausdrucke. Demnach hat derselbe für alle Strahlen des Gewindes denselben Werth.

Wenn mithin d ein Durchmesser eines Gewindes und δ die Stellung der Nullebenen seiner Punkte ist, so hat für alle Strahlen g des Gewindes

$$\frac{m(d, g)}{\sin \delta g} = (dg) \frac{\sin dg}{\sin \delta g}$$

denselben Werth; darin sind zunächst alle 3 Grössen (dg), δg, dg absolut. Aber es empfiehlt sich, dem Winkel dg dasselbe Vorzeichen zu geben wie dem mit ihm gleichen ag, also das positive oder negative, je nachdem der Complex rechts oder links gewunden ist. Wir wollen *diese jedem Durchmesser d zugehörige Constante,* von gleichem Vorzeichen mit dem Parameter, mit k_d bezeichnen.

Bei der Axe a wird, da a und die α senkrecht zu einander sind, unser Ausdruck

$$(ag) \operatorname{tang} ag,$$

also der Parameter k; man kann daher k auch den *Hauptparameter* oder *den Parameter der Axe* und k_d *den zum Durchmesser d gehörigen Parameter* nennen.

Es sei zweitens (S, σ) wiederum ein Büschel von Γ, l aber eine 68
beliebige Gerade, l' ihre Polare, welche auch von t getroffen wird; dann sind $m(l, g) : \sin tg$ und $m(l', g) : \sin tg$ im Büschel (S, σ), also:

$$m(l, g) : m(l', g)$$

für alle Strahlen von Γ constant.

Alle Strahlen eines Gewindes bilden mit zwei in Bezug auf dasselbe polaren Geraden Momente, deren Verhältniss einen constanten Werth hat.

Diese jedem Polaren-Paare zugehörige Constante nennt man dessen Modulus.

Umgekehrt, es seien g, g' zwei sich in S schneidende Geraden, welche in Bezug auf l und l' auch dem Vorzeichen nach denselben Modulus haben; t die Gerade aus S, welche l und l' trifft: in L und L'; in der obigen Formel für $m(l, g)$ geben wir nun nicht tg, sondern dem Flächenwinkel (tl, σ) oder (tl, tg) ein Vorzeichen, derartig, dass seine positiven Halbebenen die positiven Halbstrahlen von g und l enthalten und er sein Vorzeichen zugleich mit $m(l,g)$ wechselt. Daher ist:

$$\bmod (l, l')_g = \frac{SL \,.\, \sin tl \,.\, \sin (tl, tg)}{SL' \,.\, \sin tl' \,.\, \sin (tl', tg)},$$

$$\bmod (l, l')_{g'} = \frac{SL \,.\, \sin tl \,.\, \sin (tl, tg')}{SL' \,.\, \sin tl' \,.\, \sin (tl', tg')};$$

also:

$$\frac{\sin (tl, tg)}{\sin (tl', tg)} = \frac{\sin (tl, tg')}{\sin (tl', tg')};$$

d. h. die Ebenen tg und tg' sind identisch.

Durch l und l' als Polaren und g als zugehörigen Strahl ist eindeutig ein Gewinde bestimmt, welchem t und also der ganze Büschel tg und nach dem eben geführten Beweise auch g' angehört; da jeder andere Strahl, der in Bezug auf l und l' denselben Modulus hat, einen Strahl dieses Büschels trifft, so gehört er auch dem Gewinde an. Also:

Alle Strahlen, welche in Bezug auf zwei gegebene Geraden l, l' dasselbe Momenten-Verhältniss oder denselben Modulus haben, erzeugen ein Gewinde, in Bezug auf welches die beiden Geraden l und l' polar sind.

Man kann durch a eine Ebene α_l legen, welche zu den beiden Polaren l und l' parallel ist; es sei g der in diese Ebene fallende Strahl des Gewindes, der vom Fusspunkte, auf a, des kürzesten Lothes zwischen a, l und l' ausgeht. Ersichtlich ist $(gl) = (al)$, $(gl') = (al')$. Bilden wir nun den Modulus in Bezug auf l und l' vermittelst dieses Strahles g, so ist:

$$\bmod (l, l') = \frac{(gl) \sin (gl)_l}{(gl') \sin (gl')_{l'}} = \frac{(al) \sin (ga + al)_l}{(al') \sin (ga + al')_{l'}} = \frac{(al) \cos al \sin (ga)_l}{(al') \cos al' \sin (ga)_{l'}},$$

weil g zu a normal ist; hierin bedeuten die angefügten, aber bei den

Cosinussen nicht nothwendigen Zeiger l, l', dass die betreffenden Winkel, in α_l liegend gedacht, aus l, bezw. l' betrachtet werden.

Schreiben wir die frühere Formel aus Nr. 65 auch mit dieser genaueren Bezeichnung so haben wir:

$$(al) \operatorname{tg} (al')_{l'} = (al') \operatorname{tg} (al)_l;$$

also:

$$\operatorname{mod} (l, l') = \frac{\sin (al)_l}{\sin (al')_{l'}} \cdot \frac{\sin (ga)_l}{\sin (ga)_{l'}}.$$

Bei hyperbolischer Involution ($a\mathfrak{u}$, ll') und auf derselben Seite von α_l gelegenen l, l' können wir unmittelbar die Zeiger weglassen; wenn aber die Involution elliptisch ist und l, l' auf verschiedenen Seiten von α_l liegen, dann ist $\sin (al')_{l'} = - \sin (al')_l$, $\sin (ga)_{l'} = - \sin (ga)_l$; demnach ist *in beiden Fällen:*

$$\operatorname{mod} (l, l') = \frac{\sin al}{\sin al'},$$

wofern die Winkel al und al' von derselben Seite von α_l betrachtet werden. —

Bei einem Durchmesser d fanden wir für alle Strahlen g des Gewindes

$$(dg) \frac{\sin dg}{\sin \delta g} = k_d$$

constant. Wir finden dann, ebenso wie in Nr. 65, dass, *wenn l und l' Polaren sind,*

$$(dl) \frac{\sin dl'}{\sin \delta l'} = (dl') \frac{\sin dl}{\sin \delta l} = \pm k_d,$$

wo + oder — zu nehmen ist, je nachdem die involutorische Regelschaar (dd'_∞, ll') hyperbolisch oder elliptisch ist.

69 Wir haben nun noch die Beziehung zwischen dem Hauptparameter k und dem zu einem Durchmesser d gehörigen k_d aufzusuchen. Die Gerade t schneide a und d in A und D und zwar rechtwinklig; also ist sie ein Strahl von Γ; die Nullebenen α und δ von A und D gehen durch ihn, erstere ist senkrecht zu a und d, der spitze Winkel der letzteren gegen die Durchmesser-Richtung sei ε_d. Wir ziehen aus A und D bezw. in α, δ die Complexstrahlen g, g', welche zu t senkrecht sind; g' ist die Projection von d auf δ, also $\sphericalangle dg' = \varepsilon_d$; die Projection von g auf δ ist zu g' parallel, mithin $\sphericalangle \delta g = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_d$. Wir bilden nun k_d mit Hilfe von g, $k = k_a$ mit Hilfe von g'.

$$k_d = (dg) \frac{\sin dg}{\sin \delta g} = AD \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon_d}, \quad k = (ag') \cdot \operatorname{tang} ag' = AD \cdot \operatorname{tang} \varepsilon_d;$$

also:

$$k_d = \frac{k}{\sin \varepsilon_d}.$$

Diese Beziehung besteht also zwischen dem Hauptparameter, dem auf einen Durchmesser bezüglichen Parameter und dem Neigungswinkel der Nullebenen der Punkte dieses Durchmessers gegen die Durchmesser-Richtung.

Die Formel für k lehrt, dass alle gleichweit von a entfernten Durchmesser denselben Neigungswinkel ε_d und denselben Parameter k_d haben und dass, wenn die Entfernung von a zunimmt, ε_d kleiner und k_d grösser wird.

Wird dem Gewinde Γ eine Fläche 2. Grades $\mathfrak{A}^2$ adjungirt, so 70
kann man nach den Geraden fragen, die gleichzeitig nach Γ und nach $\mathfrak{A}^2$ polar sind.

Lässt man zwei Gerade entsprechen, von denen die eine l' zu einer Geraden l polar ist nach Γ, die andere l'' zu derselben Geraden l polar ist nach $\mathfrak{A}^2$, so erhält man correspondirende Geraden einer Collineation; dieselbe hat 6 sich selbst entsprechende Geraden, welche die Kanten eines Tetraeders bilden. Vier von ihnen sind ersichtlich die Strahlen, welche Γ mit den beiden Regelschaaren von $\mathfrak{A}^2$ gemein hat (Nr. 58); diese bilden ein Vierseit und die beiden übrigen Geraden, die Diagonalen dieses Vierseits, sind zu einander polar in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$ und auf Γ.

Es giebt ein einziges Paar von Geraden, welche zu einander polar sind sowohl in Bezug auf ein gegebenes Gewinde, als auch in Bezug auf eine gegebene Fläche 2. Grades.

Sie sind ersichtlich auch zu einander polar in Bezug auf das Gewinde Γ_1, das aus Γ durch Polarisirung in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$ sich ergiebt, und sind demnach, wie wir hier, vorausgreifend, erwähnen wollen, die Leitgeraden des Strahlennetzes, das den beiden Gewinden gemeinsam ist.

Verallgemeinert man die Massbeziehungen projectiv, d. h. ersetzt man die ausgeartete Fläche 2. Grades $\mathfrak{K}^2$ durch eine allgemeine Fläche $\mathfrak{A}^2$, so wird man die beiden eben erhaltenen Geraden als die Axen des Gewindes Γ (und zugleich des Gewindes Γ_1) bezeichnen. In derselben Weise kann man auch die vorangehenden Formeln verallgemeinern, was hier jedoch nicht geschehen soll.*)

Wenn aber die eine Regelschaar von $\mathfrak{A}^2$ zu Γ ganz gehört, so giebt es ∞^2 der $\mathfrak{A}^2$ aufgeschriebene Vierseite (mit zwei festen Gegenseiten), welche dem Γ angehören, und in ihren Diagonalen-Paaren haben wir dann ∞^2 Axen-Paare des Gewindes Γ.

*) In Bezug auf die im Vorangehenden behandelten metrischen Eigenschaften des linearen Complexes sehe man: Plücker, Neue Geometrie des Raumes, Nr. 47 ff.; Zeuthen, Mathem. Annalen Bd. 1 S. 442; von Drach, ebenda Bd. 2 S. 135; Reye, G. d. L. II 10. Vortrag; d'Ovidio, Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino Bd. 16 (Nota sulle proprietà fondamentali dei complessi lineari) und, für die projective Verallgemeinerung: Rendiconti dell' Istituto Lombardo Ser. II Bd. 14 (Teoremi sui complessi lineari nella metrica projettiva).

V.

71 Wir wenden uns zu *den Erzeugungen des Strahlengewindes.*

Die Erzeugung vermittelst eines Nullsystems ist hinreichend erörtert.

Ferner geben die involutorischen Regelschaaren von Polarenpaaren eine Erzeugung.

Jede involutorische Regelschaar führt zu einem Gewinde; zu demselben gehören alle Strahlen, welche zwei gepaarte Geraden der Regelschaar zugleich treffen.

Die involutorische Regelschaar ruft auf der Schnittcurve einer beliebigen Ebene mit der Trägerfläche der Regelschaar und um den Tangentialkegel aus einem beliebigen Punkte an dieselbe eine conische Involution hervor; das Involutionscentrum der ersteren, der Punkt, in den die Verbindungslinien gepaarter Punkte zusammenlaufen, ist der Nullpunkt der Ebene, die Involutionsebene der letzteren, d. i. die Ebene, in welche die Schnittlinien gepaarter Ebenen fallen, die Nullebene des Punktes.

Wir können diese Erzeugung des Gewindes *die Chasles'sche Erzeugung* nennen; denn Chasles*) construirte schon 1839 thatsächlich den linearen Complex, indem er die Erzeugenden der einen Schaar eines Hyperboloids paarweise einander zuordnete vermittelst der sie treffenden Strahlen eines Strahlenbüschels und dann die Gesammtheit aller Geraden betrachtete, welche zwei einander so zugeordnete Geraden treffen.

Bei dieser Erzeugung entsteht das Gewinde durch ∞^1 Strahlennetze. Ist die Involution hyperbolisch, so haben zwei von ihnen vereinigte Leitgeraden: jedes dieser Netze besteht aus sämmtlichen Tangenten der Trägerfläche der Regelschaar, welche auf dem betreffenden Doppelstrahle der Involution berühren. In diesem Falle geben die reellen Paare der Involution noch nicht das vollständige Gewinde, unter den erzeugenden Strahlennetzen sind auch solche mit conjugirt imaginären Leitgeraden. In constructiver Beziehung ist also diese Erzeugungsweise nicht vortheilhaft.

Jedes Gewinde kann auf ∞^6 Weisen so erzeugt werden (Nr. 58).

Zwei projective Strahlenbüschel derselben Ebene werden bekanntlich von allen Strahlen, welche durch den Schnittpunkt der beiden Strahlen gehen, die dem gemeinsamen Strahle in beiderlei Sinne entsprechen, und nur von diesen Strahlen in involutorischen Punktreihen geschnitten; denn auf jedem von ihnen entsprechen der genannte Punkt und der Schnittpunkt eines dieser Strahlen mit dem gemeinsamen

*) Liouville's Journal 1. Serie Bd. 4 S. 348.

Strahle sich in beiderlei Sinne in den entstehenden projectiven Punktreihen.

Demnach erzeugen alle Strahlen, welche zwei gegebene projective Ebenenbüschel in involutorischen Punktreihen schneiden, (d. h. alle Strahlen, welche, wenn ξ, ξ_1 und η, η_1 irgend zwei Paare homologer Ebenen der beiden Büschel sind, die Geraden $\xi\eta_1$ und $\eta\xi_1$ zugleich treffen) *ein Gewinde.*

Denn die in eine Ebene fallenden derartigen Strahlen bilden einen Büschel.

Ebenso entsteht, dual, ein Gewinde durch alle Strahlen, aus denen zwei gegebene projective Punktreihen durch involutorische Ebenenbüschel projicirt werden.

Diese Erzeugung kann man leicht aus der Chasles'schen ableiten.*)

In der That, es seien g und g_1 zwei Gerade der Leitschaar der involutorischen Regelschaar, welche ja vollständig zum erzeugten Gewinde gehört, so verbinden wir g je mit der einen von 2 gepaarten Geraden l und l' der Involution und g_1 mit der andern, dann werden die Büschel um g und g_1 projectiv. Eine Gerade aber, welche l und l' schneidet, trifft in den Schnittpunkten sowohl die entsprechenden Ebenen gl und $g_1 l'$, als auch die entsprechenden Ebenen gl' und $g_1 l$, so dass sich in den conjectiven Punktreihen, in denen sie von den Ebenenbüscheln geschnitten wird, ein involutorisches Paar ergiebt.

Wir können also ein gegebenes Gewinde auch auf folgende Weise herstellen. Wenn g, g_1 zwei Strahlen desselben, l, l_1 zwei sie treffende Geraden und l', l_1' deren Polaren sind, so beziehe man die Ebenenbüschel g und g_1 so projectiv auf einander, dass den Ebenen $g(l, l_1, l')$ die Ebenen $g_1(l', l_1', l)$ homolog sind. Auch gl_1' und $g_1 l_1$ entsprechen sich, und das Gewinde der Geraden, welche von diesen Ebenenbüscheln in involutorischen Punktreihen geschnitten werden, hat mit dem gegebenen die Netze $[ll']$ und $[l_1 l_1']$ gemein, ist also mit ihm identisch, da zwei verschiedene Gewinde nur eine Congruenz 1. Grades gemein haben können (Nr. 7).

Wenn die beiden Ebenenbüschel sich in ausgearteter Projectivität befinden, so erzeugen sie ein Strahlengebüsche, dessen Leitlinie die Schnittlinie der beiden singulären Ebenen ist, weil jeder von diesen jede beliebige Ebene im andern Büschel entspricht.**)

Zwei beliebige Geraden l und l_1 und ihre Polaren l' und l_1' in 72
Bezug auf ein Gewinde Γ führen, wie wir wissen, zu einer involu-

*) Vergl. Caporali-del Pezzo.

**) Vergl. die eine Anm. zu Nr. 10.

torischen Regelschaar und zur Erzeugung von Γ vermittelst derselben. Diese Regelschaar artet aus, wenn l und l_1 einander schneiden und also auch l' und l_1'. Jene und diese bestimmen einen Büschel, und diese beiden Büschel sind projectiv mit zwei zu einander polaren Geraden als homologen (Nr. 57); jeder Strahl von Γ trifft zwei entsprechende Strahlen. Wir haben schon erkannt, dass die Büschel einen gemeinsamen Strahl haben und dieser in der projectiven Beziehung sich selbst entspricht: es ist dies der zu Γ gehörige Strahl von beiden.

Daraus ergiebt sich eine Erzeugung des Strahlengewindes, welche, ebenso wie die durch das Nullsystem und die Chasles'sche, von welcher sie ein besonderer Fall ist, in sich dual ist und welche man wohl als *die einfachste Erzeugung* bezeichnen darf:

Zwei projective Strahlenbüschel mit einem gemeinsamen und in der Projectivität sich selbst entsprechenden Strahle sind gegeben; alle Strahlen, welche zwei homologen Strahlen zugleich begegnen, erzeugen ein Gewinde.

Der Mangel, welcher der allgemeinen Chasles'schen Erzeugung anhaftet, dass man, um das vollständige Erzeugniss zu erhalten, ev. mit conjugirt imaginären Strahlen zu thun hat, ist bei dieser Erzeugung nicht vorhanden. Alle erzeugenden Strahlennetze haben reelle Leitgeraden.

Die vorliegende Erzeugung wurde von Sylvester bemerkt.*)

Jede Ebene ξ schneidet die beiden projectiven Strahlenbüschel in zwei perspectiven Punktreihen, und das Perspectivitäts-Centrum ist der Nullpunkt X von ξ. Aus jedem Punkte X werden sie durch zwei perspective Ebenenbüschel projicirt, und die Perspectivitäts-Ebene, auf der sich die homologen Ebenen schneiden, ist die Nullebene ξ von X.

Zur Bestimmung des Nullpunktes X von ξ (oder der Nullebene ξ von X) genügen zwei Paare homologer Strahlen a_1 und b_1, a_2 und b_2 der beiden Büschel (A, α), (B, β); die Verbindungslinie der Spuren von a_1 und b_1 und die der Spuren von a_2 und b_2 in ξ treffen sich im Nullpunkte.

Mit dieser Aufgabe ist dann auch die Aufgabe gelöst: *den in einen gegebenen Strahlenbüschel (Y, ξ) fallenden Strahl des Gewindes zu construiren.* Die Construction ist, wie nothwendig, linear.

Dreht sich ξ um eine Gerade l, so bewegt sich X auf der Geraden l', welche den Hyperboloiden $(la_1\, b_1)$, $(la_2\, b_2)$, ausser den 3 Geraden l, $(A, l\beta)$, $(B, l\alpha)$, gemeinsam ist.

Zwei Lagen von X bestimmen l'; wir nehmen die Nullpunkte

*) Comptes rendus Bd. 52 (1861) S. 741; vergl. auch Plücker, On a new Geometry of Space, Transactions of the Cambridge Philos. Society Vol. XI Part. I.

der beiden Ebenen durch l, welche A, bezw. B enthalten; den Strahlen von (A, α) und (B, β), welche bezw. in diese Ebenen fallen, mögen b', a' entsprechen; dann sind (b', lA), (a', lB) die beiden l' bestimmenden Punkte. Die beiden perspectiven Punktreihen, in denen lA oder lB die Strahlenbüschel trifft, sind von ausgearteter Projectivität, so dass jede einen singulären Punkt besitzt, dem alle Punkte der andern Reihe correspondiren.

Fassen wir l als Ort von Punkten X auf, so sind b', a' auch die Strahlen, welche zu den von l getroffenen Strahlen der Büschel homolog sind. Die Gerade, um welche sich die Nullebene ξ dreht, ist die Schnittlinie der Ebenen $(b', l\alpha)$, $(a', l\beta)$; man wird sich leicht überzeugen, dass sie mit der Verbindungslinie der Punkte (b', lA), (a', lB) identisch ist.

Jede zwei homologen Strahlen a und b der beiden projectiven Strahlenbüschel (A, α), (B, β) liefern ein zum Gewinde gehöriges Strahlennetz $[a, b]$. Also müssen es auch die beiden in $s \equiv AB \equiv \alpha\beta$ vereinigten homologen Strahlen thun. Zu einer exacten Bestimmung dieses Strahlennetzes $[s, s]$ mit zwei vereinigten Leitgeraden gelangen wir in folgender Weise:

Wenn wieder zunächst a und b zwei beliebige homologe Strahlen von (A, α) und (B, β) sind, so sind die Punktreihe auf a und der Ebenenbüschel um b projectiv mit solchen entsprechenden Elementen Z und ζ, welche mit einander incidiren. Das Strahlennetz $[a, b]$ des Gewindes ist dann der Inbegriff aller Strahlenbüschel (Z, ζ). Die Projection von (B, β) auf α aus einem beliebigen Punkte V ist ein zu (A, α) perspectiver Büschel; dem Punkte, in dem a dem perspectiven Durchschnitte begegnet, entspricht in der Projectivität zwischen den Z auf a und den ζ durch b die Ebene bV; folglich entspricht dem Begegnungspunkte $\mathfrak{V}$ des genannten Durchschnittes mit s in der Projectivität zwischen der Punktreihe auf s und dem Ebenenbüschel um s die Ebene sV; ein zweiter Punkt W führe in derselben Weise zu $\mathfrak{W}$ auf s; und folglich ist die eben genannte Projectivität bestimmt durch die 3 Paare entsprechender Elemente: A und β, $\mathfrak{V}$ und sV, $\mathfrak{W}$ und sW. Sämmtliche Strahlenbüschel, deren Scheitel und Ebene weitere entsprechende Elemente sind, erzeugen $[s, s]$. Wir werden später uns mit dem Complexe 2. Grades der Strahlen beschäftigen, der bei zwei beliebigen projectiven Strahlenbüscheln sich ergiebt; von demselben hat sich in unserem Falle das Strahlengebüsche $[s]$ abgelöst; beim übrig bleibenden Gewinde ist jedoch von diesem Gebüsche das eben beschriebene Netz geblieben.

Lässt man die beiden Strahlenbüschel in (A, α) zusammenfallen, so

dass je zwei entsprechende Strahlen sich decken, so wird (A, α) ein Büschel des Gewindes; alle erzeugenden Strahlennetze haben vereinigte Leitgeraden (Nr. 58); in der dann für die endgiltige Festlegung eines solchen Netzes erforderlichen Projectivität auf und um einen Strahl von (A, α) entsprechen sich ein Punkt von α und seine Nullebene. So ergiebt sich (Nr. 58) folgende Herstellung des Gewindes.

*Ein Strahlenbüschel (A, α) ist gegeben. Man beziehe das Feld α so correlativ auf den Bündel A, dass jeder Strahl von (A, α) sich selbst entspricht. Jeder Punkt von α fällt dann in seine entsprechende Ebene von A. Die ∞^2 auf diese Weise bestimmten Strahlenbüschel erzeugen ein Gewinde.**)

In der That, wenn (X, ξ) ein beliebiger Strahlenbüschel ist, so geht vom Ebenenbüschel in A, der in der Correlation der Punktreihe $\alpha\xi$ entspricht, eine Ebene durch X und schneidet in (X, ξ) den Strahl ein, der zum erzeugten Complexe gehört.

73 Aus der Sylvester'schen Erzeugung lässt sich leicht ersehen, dass, *wenn g_1, g_2, g_3 zum Gewinde gehören, die ganze Regelschaar $(g_1 g_2 g_3)$ sich in demselben befindet.*

In der That, es sei g_1 der gemeinsame Strahl der beiden erzeugenden Strahlenbüschel (A, α), (B, β), von denen der eine ein beliebiger g_1 enthaltender Strahlenbüschel, der andere der zu ihm nach dem Nullsystem polare ist; l_1, l_2 seien die beiden Geraden der Leitschaar $[g_1 g_2 g_3]$, welche sich in α, bezw. β befinden. Dann stimmen die beiden Projectivitäten, welche auf l_1, l_2 einerseits durch die Regelschaar $(g_1 g_2 g_3)$, andererseits durch die beiden projectiven Büschel (A, α), (B, β) hervorgerufen werden, überein, weil die auf g_1, g_2, g_3 liegenden Punkte in beiden einander entsprechen. Folglich trifft jeder Strahl von $(g_1 g_2 g_3)$ zwei entsprechende Strahlen von (A, α) und (B, β) und gehört zum Gewinde.

Zur *Axe* gelangt man, wenn diese Erzeugung zu Grunde gelegt wird, in folgender Weise: Wenn a_1, b_1; a_2, b_2 zwei Paare entsprechender Strahlen der beiden erzeugenden Büschel sind, so seien b_1', b_2' die Parallelen zu b_1, b_2 aus A, die unendlich fernen Geraden der Ebenen $a_1 b_1'$, $a_2 b_2'$ sind dann Strahlen des Gewindes und ihr Schnitt der unendlich ferne Nullpunkt $\mathfrak{U}$, die Schnittlinie der beiden Ebenen ist also ein Durchmesser. Nun hat man noch in irgend einer zu demselben senkrechten Ebene den Nullpunkt zu construiren, der dann der Fusspunkt der Axe ist, und hat man diese, so kann man

*) Vergl. Weiler, Zeitschrift für Mathematik Bd. 27 S. 257.

mit Hilfe des Strahles AB des Gewindes die Art der Windung beurtheilen.

Hält man die erzeugenden Büschel fest und zur Bestimmung der Projectivität, ausser dem sich selbst entsprechenden Strahle s, noch ein Paar homologer Strahlen a_1, b_1, so hat man ∞^1 Gewinde, welche offenbar das Strahlennetz $[a_1, b_1]$ gemein haben. Unter den ∞^1 Projectivitäten giebt es 2 ausgeartete, von denen die eine a_1 in (A, α), AB in (B, β), die andere AB in (A, α), b_1 in (B, β) zu singulären Strahlen hat; durch die so projectiv bezogenen Büschel entstehen die Gebüsche $[a_1]$ und $[b_1]$; die obige Construction wird zu den Leitgeraden a_1, b_1 als Axen führen.

Bleibt endlich nur die Vorschrift, dass der gemeinsame Strahl s sich selbst entspricht, so erhält man ∞^2 Gewinde, zu denen allen die beiden Büschel (A, β), (B, α) gehören; dies giebt aber nur einen speciellen Fall des Netzes von Gewinden, mit dem wir uns später zu beschäftigen haben werden.

Da man zur Erzeugung eines gegebenen Gewindes den einen Strahlenbüschel ganz beliebig annehmen kann, der andere aber als der zum ersten in Bezug auf das Gewinde (oder zugehörige Nullsystem) polare vollständig bestimmt ist, *so kann man jedes Gewinde auf* ∞^5 *Arten nach Sylvester's Erzeugungsweise herstellen.* Nun giebt es aber ∞^8 Paare von Strahlenbüscheln mit einem gemeinsamen Strahle und bei jedem Paare ∞^2 Projectivitäten, bei denen dieser Strahl sich selbst entspricht; und so sehen wir von neuem, dass es ∞^{8+2-5} Gewinde giebt.

Oder kürzer, zu einem gegebenen Strahlenbüschel giebt es ∞^3, die mit ihm einen Strahl gemein haben, und zwischen ihm und jedem derselben ∞^2 Projectivitäten.

Sind zur Bestimmung eines Gewindes zwei polare Geraden l, l' (oder zwei Strahlenbüschel, die ihm angehören sollen) und ein Strahl g gegeben, so sei s eine Gerade, welche l und l' trifft; (A, α) ist dann durch s und l, (B, β) durch s und l' bestimmt und die Projectivität durch das Entsprechen: s, s; l, l'; a, b, wo a, b die von g getroffenen Strahlen der Büschel sind.

Vor allem eignet sich die Sylvester'sche Erzeugungsweise dazu, um 74
aus 5 gegebenen Strahlen g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 *das Gewinde herzustellen.* Die Construction bleibt frei von imaginären Elementen, die bei den Erzeugungsweisen durch eine involutorische Regelschaar oder durch zwei projective Ebenenbüschel oder Punktreihen (Nr. 71) auftreten können, wenn man sie für 5 gegebene Strahlen einrichten will. Im ersteren Falle z. B. bedarf man, wenn man etwa die Regelschaar

$[g_1g_2g_3]$ involutorisch machen will, die beiden Geraden derselben, welche g_4, sowie die, welche g_5 treffen.

Es sei (A, α) ein Strahlenbüschel, welcher g_1 enthält, und a_2, a_3, a_4, a_5 diejenigen von seinen Strahlen, welche g_2, g_3, g_4, g_5 treffen. In jeder Ebene β durch g_1 erhält man dann einen und nur einen Punkt B', der so beschaffen ist, dass $B'(g_1, b_2, b_3, b_4,) \barwedge A(g_1, a_2, a_3, a_4)$, wo b_2, b_3, b_4 die Strahlen von B' nach den Spuren B_2, B_3, B_4 von g_2, g_3, g_4 in β sind. Construirt man nämlich auf der Geraden B_2B_3, welche g_1 in B_1 treffe, den Punkt B_4^* so, dass $B_1B_2B_3B_4^* \barwedge g_1a_2a_3a_4$, so schneidet die Gerade $B_4B_4^*$ die g_1 im gesuchten Punkte B'.

Vertauscht man g_4 mit g_5, so erhält man in ähnlicher Weise B_5, B_5^* und B'', für welchen letzteren $B''(g_1, b_2, b_3, b_5) \barwedge A(g_1, a_2, a_3, a_5)$. Wenn für eine von α verschiedene Ebene β die beiden Punkte B' und B'' in einem Punkte B sich vereinigen, dann haben wir zwei Strahlenbüschel (A, α) und (B, β), welche, wenn sie so projectiv bezogen sind, dass g_1 sich entspricht und die g_2, g_3 treffenden Strahlen des einen den dieselben Geraden schneidenden des andern entsprechen, auch die g_4, sowie die g_5 treffenden Strahlen zu homologen haben; also enthält das durch sie erzeugte Gewinde alle 5 Strahlen.

Dreht sich nun β um g_1, so durchläuft B_2B_3 die Regelschaar $[g_1g_2g_3]$ und die Punkte B_4^*, B_5^* durchlaufen zwei Geraden g_4^*, g_5^* der verbundenen Schaar $(g_1g_2g_3)$; also sind die Punkte B', B'' je die Schnitte von g_1 mit den in β liegenden Geraden der Schaaren $[g_1g_4g_4^*]$, bezw. $[g_1g_5g_5^*]$; und die Punktreihen, die von B' und B'' auf g_1 beschrieben werden, sind zum Ebenenbüschel der β und daher auch unter einander projectiv.

Man erkennt unmittelbar, dass, wenn β in α fällt, B' und B'' nach A fallen. Demnach ist A der eine sich selbst entsprechende Punkt der beiden conjectiven Punktreihen der B' und B'' auf g_1 oder der eine Berührungspunkt der beiden Hyperboloide $(g_1g_4g_4^*)$ und $(g_1g_5g_5^*)$, welche sich ja auf der gemeinsamen Geraden g_1 zweimal tangiren müssen. Der andere ist der gesuchte Punkt B, und die gemeinsame Berührungsebene die zugehörige β. Man wird also in zwei von α verschiedenen Ebenen β durch g_1 die Geraden construiren, welche g_4 und g_4^*, g_5 und g_5^* treffen; in ihren Schnitten mit g_1 hat man dann zwei Paare entsprechender Punkte der Conjectivität auf g_1. Durch diese und den sich selbst entsprechenden Punkt A ist dieselbe festgelegt. Man ermittelt — was linear geschieht — den andern sich selbst entsprechenden Punkt B, und die Gerade aus ihm, welche g_4 und g_4^* (oder g_5 und g_5^*) trifft, giebt, mit g_1 verbunden, die Ebene β.

Selbstverständlich kann man auch dual verfahren.

Einfacher wird die Construction, wenn zwei von den 5 Strahlen, etwa g_4 und g_5, sich schneiden, so dass dann ihr Büschel zum Gewinde gehört. Wir nehmen in diesem Falle den Scheitel desselben als A, die Ebene als β; α sei dann eine beliebige Ebene durch A und s der Schnitt $\alpha\beta$. Sind a_1, a_2, a_3 die von g_1, g_2, g_3 getroffenen Strahlen von (A, α) und B_1, B_2, B_3 die Spuren von g_1, g_2, g_3 in β, so ist der noch fehlende Scheitel B derjenige Punkt auf s, für welchen

$$B(B_1, B_2, B_3, s) \barwedge a_1\, a_2\, a_3\, s.$$

Eine weitere Construction eines Gewindes aus 5 von seinen Strahlen soll besprochen werden (Nr. 93), nachdem erkannt sein wird, dass 4 Strahlen — mögen ihre Treffgeraden reell oder imaginär sein — stets eine Congruenz 1. Grades bestimmen.

Wie hängt die fünffach unendliche Mannigfaltigkeit der Gewinde mit der Bestimmung des Gewindes durch 5 Strahlen zusammen?

Aus den ∞^3 Strahlen eines linearen Complexes kann man auf $\infty^{3.5}$ Weisen 5 Strahlen herausnehmen und ihn also in so vielen Weisen bestimmen. Aus den ∞^4 Geraden des Raumes kann man 5 Geraden auf $\infty^{4.5}$ Weisen herausnehmen, also ist die Mannigfaltigkeit der Gewinde $\infty^{4.5-3.5}$.

Schliesslich möge noch *das Auftreten des linearen Complexes bei zwei correlativen Räumen* erwähnt werden, das man auch als eine Erzeugung desselben ansehen kann. 75

Wenn zwei Felder der nämlichen Ebene correlativ (reciprok) sind, so ist der Schnittpunkt X' der beiden Polaren, welche einem Punkte X in beiderlei Sinne entsprechen, dem X doppelt oder in beiderlei Sinne conjugirt; die beiden Polaren von X' treffen sich auch in X und auf der Verbindungslinie XX' liegt dann eine Involution doppelt conjugirter Punkte. Alle diese Verbindungslinien laufen in einen Punkt W zusammen, den einzigen Punkt der Ebene, dem in beiderlei Sinne dieselbe, aber nicht durch ihn gehende Gerade entspricht: den Berührungspol (Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten) der beiden bekanntlich sich doppelt berührenden Kernkegelschnitte der Correlation.*)

Bei einer Correlation zweier Räume hat jeder Punkt ∞^1 ihm doppelt conjugirte Punkte: die sämmtlichen Punkte der Schnittlinie der beiden Polarebenen. *Die Verbindungslinien doppelt conjugirter Punkte, deren jede auch hier eine Involution solcher Punktepaare trägt, erzeugen ein Strahlengewinde,* weil die in eine Ebene fallenden einen Strahlen-

*) Schröter, Journal für Mathematik Bd. 77 S. 105; Theorie der Oberflächen 2. Ordnung § 50.

büschel bilden, denjenigen nämlich, welcher den beiden reciproken Feldern zugehört, die durch die Ebene aus den reciproken Räumen ausgeschnitten werden. Der aus einem Punkte kommende Strahlenbüschel dieses Complexes ist der der Strahlen, die ihn mit den ihm doppelt conjugirten Punkten verbinden.

Ebenso bilden, dual, die Schnittlinien doppelt conjugirter Ebenen zweier correlativer Räume einen linearen Complex.

Hieraus lässt sich ableiten, dass, wenn bei zwei reciproken Räumen 6 nicht zu demselben Gewinde gehörige Verbindungslinien doppelt conjugirter Punkte (oder Schnittlinien doppelt conjugirter Ebenen) vorhanden sind, dann jedes Paar in dem einen Sinne conjugirter Punkte oder Ebenen es auch in dem andern Sinne ist und daher ein Polarsystem in Bezug auf eine Fläche 2. Grades vorliegt.*)

Die lineare Congruenz oder das Strahlennetz und der Büschel von Gewinden.**)

I.

76 Unter einer *linearen Congruenz* versteht man eine solche, welche zugleich 1. Ordnung und 1. Klasse ist.

Der Durchschnitt zweier Gewinde ist eine solche Congruenz (Nr. 7).

Die Geraden einer linearen Congruenz, welche sich auf eine gegebene Gerade l stützen, müssen nach Nr. 34 eine Regelfläche 2. Grades, also (Nr. 10) *eine Regelschaar $[l]$ erzeugen*, zu deren Leitschaar l gehört.

Es sei g_0 ein Strahl der Congruenz und O_1, O_2 seien zwei auf ihm gelegene Punkte. Jede Ebene des Bündels O_1 enthält einen Congruenzstrahl und dieser bestimmt eine Ebene in dem Bündel O_2. Daher befinden sich die beiden Bündel in einer eindeutigen Beziehung ihrer Ebenen. Durchläuft die Ebene in O_1 einen Büschel, so beschreibt der je in ihr enthaltene Strahl der Congruenz eine Regelschaar $[l_1]$, die sich auf die Axe l_1 des Büschels als Leitgerade stützt und zu welcher g_0 gehört; daher wird dieselbe aus dem auf g_0 gelegenen Punkte O_2 durch einen Ebenenbüschel projicirt, dessen Axe die durch O_2 gehende Leitgerade der Regelschaar ist. In unserer eindeutigen

*) Vergl. Mathem. Annalen Bd. 19 S. 475.

**) Auch hierzu vergl. man die in Nr. 57 erwähnten Schriften von Reye und Silldorf.

Beziehung der beiden Ebenenbündel O_1 und O_2 entspricht also jedem Büschel des einen ein Büschel im andern; folglich ist diese Beziehung eine Collineation.

Projicirt man die Strahlen einer linearen Congruenz aus zwei Punkten eines von ihnen, g_0, so erhält man zwei collineare Ebenenbündel, in denen sich zwei Ebenen entsprechen, die nach demselben Congruenzstrahl gehen.

Jedem von g_0 verschiedenen Strahle l_1 von O_1 ist ein bestimmter ebenfalls von g_0 verschiedener Strahl l_2 von O_2 entsprechend, der Ebene $l_1 g_0$ also die Ebene $l_2 g_0$, und wenn l_1', l_2' zwei weitere entsprechende Strahlen sind, der Ebene $l_1' g_0$ die Ebene $l_2' g_0$.

Folglich entspricht in dieser Collineation der Strahl g_0 sich selbst.

Jeder Ebene durch ihn entspricht eine im allgemeinen von ihr verschiedene andere durch ihn.

Zweimal vereinigen sich also zwei solche durch g_0 gehende entsprechende Ebenen. Wenn ε eine derselben ist, so haben wir in ihr zwei perspectiv gelegene entsprechende Strahlenbüschel der beiden Bündel mit g_0 als sich selbst entsprechendem Strahle. Es sei u der perspective Durchschnitt derselben und U ein beliebiger Punkt auf u; sind dann l_1, l_2 die beiden in U sich treffenden entsprechenden Strahlen von O_1 und O_2, so gehen durch U die Schnittlinien aller Paare entsprechender Ebenen der beiden Büschel l_1, l_2, also ∞^1 Strahlen der Congruenz.

Es giebt demnach bei einer linearen Congruenz zwei gerade Linien u, v von der Beschaffenheit, dass von jedem ihrer Punkte ∞^1 Strahlen zur Congruenz gehen.

Die beiden Ebenen von O_1 und O_2, welche nach einem beliebigen Strahle g der Congruenz hingehen, schneiden ε in zwei entsprechenden Strahlen der beiden perspectiven Büschel und ihr Schnittpunkt, d. i. der Punkt $g\varepsilon$, liegt auf u.

Alle Strahlen der Congruenz treffen jene beiden Geraden u und v.

Demnach hat jede lineare Congruenz zwei Leitgeraden (Directricen), welche von allen Strahlen derselben zugleich getroffen werden.

Oder jede lineare Congruenz ist ein Strahlennetz.

Die ∞^1 Strahlen der Congruenz, die von einem Punkte einer der beiden Leitgeraden ausgehen, liegen in der Ebene, die ihn mit der andern verbindet, und bilden also einen Strahlenbüschel.

Zu den uns bisher nur bekannten Strahlennetzen mit zwei reellen 77
Leitgeraden kommen daher als zweite ebenso allgemeine Art diejenigen *mit zwei conjugirt imaginären Leitgeraden.*

Denn die Ebenen ε können conjugirt imaginäre sein.

Das Strahlennetz mit zwei vereinigten reellen Leitgeraden (Nr. 58) bildet den Uebergang von der einen allgemeinen Art zur andern. Wir bedienen uns also von jetzt ab des Wortes „Strahlennetz" *in dem allgemeineren Sinn, dass die Leitgeraden auch imaginär sein können.*

Da die Bedingung der Begegnung zweier Geraden in sich dual ist, so folgt, dass *auch das Strahlennetz ein in sich duales Gebilde ist* und daher auch Congruenz 1. Grades (Nr. 5) genannt werden kann.

Dies ergiebt sich aber auch aus dem zum obigen Satze dualen Satze, den man selbständig und dual ebenso ableiten kann:

Zwei Ebenen, welche durch denselben Strahl g_0 einer linearen Congruenz oder eines Strahlennetzes gehen, werden durch dasselbe so collinear gemacht, dass je die beiden Spuren eines Strahles des Netzes entsprechende Punkte sind.

Der Strahl g_0 entspricht sich selbst.

Durch die beiden reellen oder conjugirt imaginären sich selbst entsprechenden Punkte auf ihm gehen bezw. zwei Gerade, von denen jede in jeder ihrer Ebenen ∞^1 Congruenzstrahlen enthält und die zugleich von allen Strahlen der Congruenz getroffen werden, also die beiden Leitgeraden.

78 Es seien g_1, g_2, g_3 3 Strahlen des Netzes, dann enthält die Schaar $[g_1 g_2 g_3]$ die beiden Leitgeraden, und folglich treffen alle Geraden der Regelschaar $(g_1 g_2 g_3)$, zu der jene 3 Geraden gehören, die Leitgeraden und gehören zum Netze.

Aber man kann dies auch einsehen, ohne die ev. imaginären Leitgeraden zu benutzen. O_1 sei ein reeller Punkt auf der Fläche 2. Grades $(g_1 g_2 g_3)$ und O_2 der zweite auch reelle Schnitt derselben mit dem von O_1 kommenden Congruenzstrahle g_0; dann sind, nach dem oben Gesagten, in den collinearen Bündeln O_1, O_2 die Büschel um die Geraden l_1, l_2 der Schaar $[g_1 g_2 g_3]$, welche durch O_1, bezw. O_2 gehen, entsprechend und darin die bezw. nach g_1, g_2, g_3 gehenden Ebenen, also, infolge der Eigenschaft der beiden Regelschaaren eines Hyperboloids, auch die nach den übrigen Geraden von $(g_1 g_2 g_3)$ gehenden, folglich sind diese Geraden auch Strahlen des Netzes.

Die durch 3 Strahlen eines Strahlennetzes gehende Regelschaar gehört ganz dem Netze an.

Das Strahlennetz enthält ∞^3 Regelschaaren, da die ∞^2 Strahlen des Netzes auf ∞^6 Weisen zu je 3 zusammengestellt werden können, jede Regelschaar aber auf ∞^3 Weisen durch 3 von ihren Strahlen bestimmt wird. Das in sich duale System der Trägerflächen ist linear; allen sind die beiden Leitgeraden gemein. Wir werden dies System später untersuchen.

Wenn die beiden Punkte O_1 und O_2, aus denen die lineare Con- 79
gruenz projicirt wird, nicht auf demselben Congruenzstrahle liegen, so bleibt die Verwandtschaft der beiden Ebenenbündel noch eindeutig, aber sie ist nicht mehr Collineation, sondern *eine quadratische Verwandtschaft;* denn einem Ebenenbüschel l_1 des Bündels O_1 entspricht dann der Büschel der Berührungsebenen eines Kegels 2. Grades, welcher aus O_2 tangential an die Trägerfläche der Regelschaar $[l_1]$ kommt.*)

Die 3 Hauptebenen im Bündel O_1 sind die Ebene nach dem aus O_2 kommenden Strahl der Congruenz und die Ebenen nach den Leitgeraden: der ersten Ebene entspricht jede beliebige Ebene durch den genannten Congruenzstrahl, jede der beiden andern Ebenen aber enthält ∞^1 Congruenzstrahlen und hat deshalb je ∞^1 entsprechende Ebenen.

Ebenso werden, dual, zwei beliebige Ebenen ω_1, ω_2 durch das Strahlennetz quadratisch verwandt gemacht; Hauptpunkte in ω_1 sind der Spurpunkt des in ω_2 gelegenen Congruenzstrahles und diejenigen der beiden Leitgeraden.**)

Umgekehrt erzeugen zwei collineare Bündel eine Congruenz 1. Ordnung durch die Schnittlinien ihrer entsprechenden Ebenen.

Wenn nämlich l_1 und l'_2 die beiden durch einen beliebigen Punkt X gehenden Strahlen der beiden Bündel sind und l_2, l_1' die ihnen entsprechenden, so ist die Schnittlinie der entsprechenden Ebenen $l_1 l_1'$ und $l_2 l_2'$ der einzige durch X gehende Strahl der erzeugten Congruenz.

In einer beliebigen Ebene ξ rufen die beiden Bündel zwei collineare Felder hervor, und deren 3 sich selbst entsprechende Geraden sind die in ξ fallenden Congruenzstrahlen; also ist die erzeugte Congruenz *3. Klasse.*

Mit diesem allgemeinen Falle, in welchem die Strahlen der Congruenz die Doppelsecanten einer cubischen Raumcurve sind, werden wir uns noch später zu beschäftigen haben.

Wenn aber bei den beiden collinearen Bündeln *der Verbindungsstrahl der Scheitel sich selbst entspricht,* dann haben wir durch denselben zwei sich selbst entsprechende Ebenen und ihre Spuren in ξ sind zwei der sich selbst entsprechenden Geraden in dieser Ebene, und nur die 3^te^ Gerade ist ein in sie fallender Congruenzstrahl; also ist die Congruenz in diesem Falle *1. Klasse;* abgezweigt haben sich die Strahlenfelder in den beiden genannten Ebenen.

*) Reye, Geometrie der Lage Abth. II 16. Vortrag der 2. Auflage.

**) Steiner, Systematische Entwickelung Nr. 59ff. (das älteste Beispiel einer quadratischen Verwandtschaft).

Duales gilt für die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier collinearer Felder in allgemeiner Lage und in der speciellen, dass die Schnittlinie der beiden Ebenen sich selbst entspricht.

80 Die Erzeugung des Strahlennetzes vermittelst collinearer Bündel (oder Felder) zeigt am einfachsten *die eindeutige Bestimmung des Netzes durch 4 Strahlen* g_1, g_2, g_3, g_4. Auf einen von ihnen, etwa g_1, legt man die Scheitel O_1, O_2 der erzeugenden Bündel und bezieht diese so collinear auf einander, dass g_1 sich selbst entspricht, die Ebenen nach g_2, g_3, g_4 aber einander. Die Collineation ist damit bekanntlich eindeutig festgelegt; denn diese Bestimmung lässt sich ja, wenn man die Ebenen des einen und des andern Bündels durch ihre 3 Schnittlinien ersetzt, zurückführen auf die Bestimmung der Collineation zweier Bündel durch 4 Paare entsprechender Strahlen.

Weil aber das erzeugte Strahlennetz auch aus zwei beliebigen andern Punkten von g_1 oder aus zwei Punkten von g_2, g_3 oder g_4 durch collineare Bündel projicirt wird, so erhellt, dass die willkürliche Wahl der Punkte O_1, O_2 auf g_1 die Eindeutigkeit der Lösung nicht beeinträchtigt.

Es seien nun aber g_1, g_2, g_3, g_4 beliebig aus einem Strahlengewinde Γ herausgegriffen; wir denken uns dasselbe nach Sylvester's Erzeugungsart vermittelst zweier projectiver Strahlenbüschel (A, α) und (B, β) hergestellt, welche g_1 entsprechend gemeinsam haben (Nr. 72 ff.). Die Geraden g_2, g_3, g_4, als Strahlen des Gewindes, müssen dann homologe Strahlen a_2, a_3, a_4 bezw. b_2, b_3, b_4 der beiden Büschel treffen. Wir machen die beiden Bündel A, B in derselben Weise collinear, wie oben. Alsdann sind die beiden Ebenen α und β auch entsprechend. Denn es ist $g_1 a_2 a_3 a_4 \barwedge g_1 b_2 b_3 b_4$. Andererseits aber muss die Ebene, welche in der Bündel-Collineation der Ebene α entspricht, ebenfalls den 3 Ebenen $B(g_2, g_3, g_4)$ in 3 Strahlen b_2', b_3', b_4' begegnen, so dass $g_1 a_2 a_3 a_4 \barwedge g_1 b_2' b_3' b_4'$. Nun giebt es aber durch einen Strahl eines Bündels nur eine einzige Ebene, welche 3 Ebenen desselben in 3 Strahlen schneidet, die mit jenem Strahle einen Wurf bilden, der zu einem gegebenen Wurfe projectiv ist (vergl. den räumlich dualen Satz in Nr. 74); also ist β die α entsprechende Ebene.

Daraus folgt, dass jede zwei entsprechende Ebenen der Bündel A und B die Büschel (A, α), (B, β) in homologen Strahlen schneiden und der Schnittstrahl jener diese Strahlen trifft. Also:

Das durch 4 Strahlen eines Gewindes bestimmte Netz gehört ganz dem Gewinde an.

81 Wenn die Leitgeraden u, v eines Strahlennetzes reell sind, dann

bilden die Strahlen des Netzes, welche eine Gerade l treffen, die Regelschaar $[luv]$. Construirt man zu jedem Punkte X von l auf dem je von ihm ausgehenden Strahle von $[luv]$, welcher u und v in U, V treffen möge, den Punkt X' so, dass der Wurf $UVXX'$ einem gegebenen Wurfe W projectiv ist, (oder ein gegebenes Doppelverhältniss hat), so bewegt sich X', nach bekannter Regelschaar-Eigenschaft, auf einer Geraden l' der Schaar (luv). Da die Punkte X und X' sich gegenseitig eindeutig bestimmen und sich gleichzeitig auf Geraden, wie l und l', bewegen, so ist ihre Zuordnung eine *Collineation*, und zwar eine specielle; denn während eine allgemeine nur 6 sich selbst entsprechende Geraden hat, welche die Kanten eines Tetraeders — des Tetraeders der 4 sich selbst entsprechenden Punkte und der 4 sich selbst entsprechenden Ebenen — bilden, *hat unsere Collineation alle* ∞^2 *Strahlen des Netzes zu sich selbst entsprechenden Geraden;* in der That, wenn X einen solchen Strahl durchläuft, dann thut es auch X'.

Man nennt diese Strahlen in ihrer Beziehung zur Collineation die *Leitstrahlen* derselben, u und v aber die *Axen* der Collineation, und infolge dessen die Collineation selbst *„Collineation mit Axen“*.

Ersichtlich entsprechen alle Punkte auf u und v sich selbst.

Auf jedem Leitstrahle hat man zwei conjective Punktreihen, in denen die Punkte U, V sich selbst entsprechen. Projicirt man aber aus einem Leitstrahle die auf einem beliebigen andern gelegenen conjectiven Punktreihen, so sieht man, dass auch jeder Leitstrahl zwei conjective Ebenenbüschel trägt, in denen die nach den Axen u, v gehenden Ebenen sich selbst entsprechen. Also:

Auch alle Ebenen durch u und v sind sich selbst entsprechend.

Und wie jede Verbindungslinie entsprechender Punkte, so incidirt jede Schnittlinie entsprechender Ebenen mit u, v; denn jede Ebene enthält ja einen Leitstrahl. Auch jeder Ebenenwurf, bestehend aus den Ebenen von einem Leitstrahle nach u und v und irgend zwei entsprechenden Ebenen durch ihn, ist mit W projectiv.

Mit einem Strahlennetze $[u, v]$ *sind also* ∞^1 *solche Collineationen mit Axen verbunden*, in denen einem beliebigen Punkte X nach und nach alle Punkte des von ihm ausgehenden Strahles des Netzes correspondiren.

Die wichtigste unter ihnen ist die, bei welcher der gegebene Wurf W harmonisch ist. Sie ist, weil dann X und X' vertauscht werden können, involutorisch: *die schon mehrfach erwähnte windschiefe Involution* (Nr. 50).

Dieselbe ist vollständig durch die Axen bestimmt.

Mit dem Strahlennetze $[u, v]$ *ist eine windschiefe Involution verbunden, deren Axen seine Leitgeraden sind.*

Zwei entsprechende Punkte oder Ebenen dieser windschiefen Involution sind stets conjugirt in Bezug auf die Trägerflächen aller ∞^3 Regelschaaren des Strahlennetzes.

82 Zu einem durch *zwei conjugirt imaginäre Leitgeraden* u, v bestimmten Strahlennetze gelangt man, indem man diese Geraden sich definirt denkt als die Doppelstrahlen einer elliptischen Involution in einer reellen Regelschaar R.*)

Jede reelle Ebene schneidet dieselbe in einer elliptischen Punktinvolution auf einem Kegelschnitt, und die Involutionsaxe derselben (Polare des Involutionscentrums, in das die Verbindungslinien gepaarter Punkte zusammenlaufen) geht durch die imaginären Doppelpunkte, welche auf den Doppelgeraden der Regelschaar-Involution liegen.

Also ist diese Gerade der in die Ebene fallende Strahl des Netzes, und dual findet man den von einem gegebenen Punkte kommenden.

Man könnte nun die im Vorhergehenden (Nr. 81) gemachten Betrachtungen auch für diesen Fall wiederholen, immer mit imaginären Elementen arbeitend, und so auch die dem Strahlennetze zugehörigen ∞^1 Collineationen mit Axen, insbesondere die windschiefe Involution gewinnen.

83 Es empfiehlt sich aber, nach dem Vorgange von Reye,**) in anderer Weise zu diesen Collineationen zu gelangen, so dass *man die Axen umgeht und nur mit reellen Elementen arbeitet.*

Wir gehen von zwei collinearen Ebenenbündeln O_1, O_2 aus, welche den Strahl $O_1 O_2$ zum sich selbst entsprechenden haben. Es seien ω_1, ω_2 zwei entsprechende Ebenen derselben und ebenso ω_1', ω_2'. Da ω_1, ω_2 sich in einem Strahle des erzeugten Strahlennetzes schneiden, so entstehen in ihnen durch die Spuren der Schnittlinien homologer Ebenen ξ_1, ξ_2 von O_1, O_2 zwei collineare Felder und ebenso auf ω_1' und ω_2'. Auf jeder der Schnittlinien $\xi_1 \xi_2$ haben wir deshalb im allgemeinen 4 Schnitte X_1, X_2, X_1', X_2' mit den 4 Ebenen ω, von denen X_1 und X_2 in ω_1 und ω_2, X_1', X_2' in ω_1' und ω_2' sich entsprechen. Trifft aber eine solche Schnittlinie die Gerade $\omega_1 \omega_1'$ des Bündels O_1, so nimmt die Ebene ξ_1 diese Gerade in sich auf und die entsprechende

*) Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage Nr. 117; Reye, Geometrie der Lage Abth. I S. 171 der 3. Auflage.

**) Geometrie der Lage, Abth. II S. 82 der 2. Auflage.

Ebene ξ_2 die Gerade $\omega_2\omega_2'$, die ihr in der Collineation der Bündel homolog ist; mithin trifft $\xi_1\xi_2$ auch die $\omega_2\omega_2'$.

Also jedem Punkte von $\omega_1\omega_1'$ ist ein und derselbe Punkt von $\omega_2\omega_2'$ sowohl in der Collineation zwischen ω_1 und ω_2, als in derjenigen zwischen ω_1' und ω_2' entsprechend; insbesondere sind O_1, O_2 einander so entsprechend, da sie Spuren der Schnittlinie nicht blos von einem, sondern von ∞^1 Paaren entsprechender Ebenen von O_1, O_2 sind.

Wir legen nun eine Collineation zweier Räume Σ_1, Σ_2 durch folgende 5 Paare entsprechender Punkte fest: 1) die beiden Punkte O_1, O_2, 2) zwei Paare entsprechender Punkte T_1, T_2; U_1, U_2 der collinearen Felder ω_1, ω_2, 3) zwei Paare entsprechender Punkte T_1', T_2'; U_1', U_2' der collinearen Felder ω_1', ω_2'.

In dieser Collineation entsprechen dann der Geraden $\omega_1\omega_1'$ und ihren Schnittpunkten mit T_1U_1 und $T_1'U_1'$, zu Σ_1 gerechnet, in Σ_2 die Gerade $\omega_2\omega_2'$ und ihre Schnittpunkte mit T_2U_2 und $T_2'U_2'$, und weil diese Punkte und O_1, O_2 sich auch in den beiden Felder-Collineationen entsprechen, so haben wir:

Die nämlichen Punkte von $\omega_1\omega_1'$ und $\omega_2\omega_2'$, welche in den beiden Felder-Collineationen homolog sind, sind auch in der Räume-Collineation homolog. Diese Collineation macht nun aber ihrerseits die Felder in den in ihr entsprechenden Ebenen $\omega_1 \equiv O_1T_1U_1$ und $\omega_2 \equiv O_2T_2U_2$ collinear und, da in dieser Collineation auch T_1, T_2; U_1, U_2 und irgend zwei Paare entsprechender Punkte auf $\omega_1\omega_1'$ und $\omega_2\omega_2'$ homolog sind, so ist sie mit der früheren Collineation zwischen ω_1 und ω_2 identisch; und ähnliches gilt bei ω_1' und ω_2'.

Die collinearen Felder in ω_1 und ω_2, bezw. ω_1' und ω_2', die sich oben durch die Spuren der Schnittlinien entsprechender Ebenen der vorausgesetzten collinearen Bündel O_1, O_2 ergeben haben, sind daher homologe Gebilde der beiden collinearen Räume Σ_1, Σ_2.

Jede Schnittlinie entsprechender Ebenen von O_1, O_2 enthält folglich zwei Paare entsprechender Punkte von Σ_1, Σ_2, nämlich das eine in ω_1 und ω_2, das andere in ω_1' und ω_2', entspricht sich infolge dessen in der räumlichen Collineation selbst.

Umgekehrt, jede sich selbst entsprechende Gerade von Σ_1, Σ_2 trifft die homologen Ebenen ω_1, ω_2 in zwei entsprechenden Punkten; also ist sie eine Schnittlinie entsprechender Ebenen von O_1, O_2 oder ein Strahl des durch diese collinearen Bündel erzeugten Strahlennetzes.

Somit haben wir auf reellem Wege eine Räume-Collineation erhalten, welche alle Strahlen des Netzes zu sich selbst entsprechenden Strahlen hat.

Die übrigen erhält man, wenn man einen der beiden Punkte

O_1, O_2 auf dem sie verbindenden Strahle des Netzes festhält und den andern bewegt.

Daraus, dass in jeder dieser Collineationen die Strahlen des Netzes alle sich selbst entsprechen, kann man nun leicht alle weiteren Eigenschaften ableiten, die sie als Collineation mit Axen charakterisiren.

84 Durch 4 Strahlen ist das Strahlennetz bestimmt und folglich giebt es ∞^1 Collineationen, welche sie und dann ∞^2 andere Geraden zu sich selbst entsprechenden Geraden haben.

Dass aber eine gegebene Gerade sich selbst entspreche, ist für eine Collineation eine vierfache Bedingung; denn dazu ist erforderlich, dass die entsprechenden Punkte von zwei Punkten der Geraden auch auf sie fallen, was zwei doppelte Bedingungen sind. Demnach scheinen der Collineation 16 Bedingungen auferlegt zu werden, während sie bekanntlich nur 15 erfüllen kann.*)

Allein, wenn eine Collineation 3 windschiefe sich selbst entsprechende Geraden, z. B. g_1, g_2, g_3, hat, so ist die Regelschaar $(g_1 g_2 g_3)$ zu sich selbst projectiv mit 3 sich selbst entsprechenden Geraden; also jede Gerade dieser Schaar entspricht sich selbst. Wir fügen nun zu diesen 3.4 Bedingungen die beiden weiteren einfachen, dass jeder X_1 der beiden Schnitte der vierten Geraden g_4 mit der Fläche $(g_1 g_2 g_3)$ als Punkt des einen Raumes Σ_1 seinen entsprechenden X_2 in einer beliebigen Ebene hat, die durch den Punkt X_1, aber nicht durch die ihn enthaltende Gerade von $(g_1 g_2 g_3)$ geht; da diese als sich selbst entsprechende Gerade den entsprechenden Punkt X_2 auch enthalten muss, so muss X_1 mit X_2 zusammenfallen; folglich entspricht g_4 sich selbst. Durch 14 Bedingungen sind demnach die 4 Geraden sich selbst entsprechend gemacht.

Es ist nicht schwer, aus Nr. 83 eine Bestimmung einer dieser Collineationen durch 5 Paare entsprechender Punkte abzuleiten.

85 Ich wende mich, behufs möglichst vollständiger Betrachtung des Strahlennetzes mit conjugirt imaginären Leitgeraden, noch zu derjenigen Construction desselben, welche, nach Staudt's Ideen, zuerst von Lüroth zur vollen Klarheit ausgearbeitet worden ist.**)

*) Chasles, Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science: dualité et homographie (Anhang zum Aperçu historique 2. Aufl. [1875] Nr. 293).

**) Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage Nr. 117; Lüroth, Math. Annalen Bd. 8 S. 157. Vergl. auch Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage III. Theil der 3. Auflage

Wenn in einer Ebene zwei elliptische Strahleninvolutionen S, S' (mit imaginären Doppelstrahlen) gegeben sind, so giebt es stets zwei reelle Geraden t und t', welche je von beiden in der nämlichen Punktinvolution geschnitten werden.

In der That, wenn $e \equiv e'$ der gemeinsame Strahl der beiden Büschel ist, so seien e_1 und e_1' die ihm in den beiden Involutionen gepaarten Strahlen. In einer elliptischen Involution giebt es immer ein reelles Paar, das zu einem gegebenen Paare der Involution harmonisch ist; denn zwei Involutionen auf demselben Träger haben jederzeit ein reelles Elementenpaar gemein, wenn mindestens eine von ihnen elliptisch ist.*) Es sei also ff_1 das zu ee_1 und $f'f_1'$ das zu $e'e_1'$ harmonische Paar. Dann ist der Wurf $ee_1\,ff_1$ sowohl zu $e'e_1'f'f_1'$, als auch zu $e'e_1'f_1'f'$ projectiv und, wegen $e \equiv e'$, auch in perspectiver Lage. Wenn demnach t und t' die perspectiven Durchschnitte sind, so schneiden in jede dieser beiden Geraden die Involutionen S und S' Involutionen mit zwei gemeinsamen Paaren ein, also zwei identische.

Wird bei einer elliptischen Involution der Träger von dem Elemente in dem einen oder andern Sinne durchlaufen, so bewegt sich das gepaarte Element in demselben Sinne. Man kann also einer elliptischen Involution entweder den einen oder den andern Sinn geben; sind aa_1, bb_1 zwei Elementenpaare und ist aba_1b_1 die Reihenfolge der 4 Elemente, so ist der eine Sinn aba_1b_1 oder, was genügt, aba_1, bei welchem man sich also von a nach a_1 so bewegt, dass b überschritten wird, der andere ist b_1a_1ba oder a_1ba. Staudt *hat bekanntlich***) *durch die mit dem einen oder andern Sinne behaftete Involution die beiden conjugirt imaginären Elemente unterschieden, welche durch die Involution dargestellt werden, (ihre imaginären Doppelelemente) und dadurch ermöglicht, dass jedes einzelne von ihnen bei Schnitten und Verbindungen verfolgt werden kann.*

Wird nun unsern beiden Strahleninvolutionen S, S' ein bestimmter Sinn gegeben, etwa efe_1 und $e'f'e_1'$, so wird damit ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Geraden t und t' statuirt. Geben wir den auf t und t' von den Strahleninvolutionen eingeschnittenen Punktinvolutionen denjenigen Sinn, der zu dem von S perspectiv ist, so ist derselbe bei t zugleich auch perspectiv mit dem Sinne von S',

(Leipzig, 1888) Nr. 11, sowie Segre, Le coppie di elementi immaginari (Memorie dell' Accademia delle Scienze di Torino Ser. II Bd. 38).

*) Steiner-Schröter's Vorlesungen über synthetische Geometrie S. 58 der 2. Aufl.

**) Beiträge zur Geometrie der Lage § 7.

bei t' aber nicht. Wir können uns begnügen, das letztere darzuthun. Auf t' haben wir die Punkte:

$$E_1 \equiv e_1 e_1', \ F \equiv f f_1', \ F_1 \equiv f_1 f', \ E \equiv (t', e \equiv e').$$

Die Involution S (mit dem Sinne $e f e_1$) schneidet in t' die Involution $(E E_1, F F_1)$ mit dem Sinne $E F E_1$, die Involution S' (mit dem Sinne $e' f' e'_1$) schneidet die nämliche Involution, aber mit dem Sinne $E F_1 E_1$ oder, was dasselbe, $E_1 F E$ ein, also mit dem entgegengesetzten Sinne ein.

Also zu zwei je mit einem bestimmten Sinne behafteten Strahleninvolutionen S, S' derselben Ebene giebt es stets nur eine (jederzeit reelle) Gerade t, welche eine Punktinvolution trägt, die mit beiden auch dem Sinne nach perspectiv ist.

Kehrt man bei einer der beiden Involutionen den Sinn um, so erhält man t'; thut man es bei beiden, dann wiederum t.

Sind eine Punkt- und eine Strahleninvolution perspectiv, so fallen die Doppelpunkte der ersteren auf die Doppelstrahlen der letzteren, und, wenn es sich um elliptische Involutionen handelt, so sind je diejenigen Doppelelemente incident, deren Sinne perspectiv sind.

Die Gerade t ist die reelle Gerade, die durch den imaginären Schnittpunkt der beiden imaginären Geraden g_+, g'_+ geht, welche durch die je mit dem gegebenen Sinne behafteten Strahleninvolutionen dargestellt werden, der Schnittpunkt der zu ihnen conjugirt imaginären Geraden g_-, g'_-, die durch die nämlichen Involutionen, aber je mit dem andern Sinne, dargestellt werden, liegt auch auf ihr und ist zu ersterem conjugirt, weil er durch dieselbe Involution, aber mit dem andern Sinne, dargestellt wird.

t' aber verbindet die beiden andern Schnitte $g_+ g'_-$, $g_- g'_+$, welche ebenfalls zu einander conjugirt sind.

86 *Es seien nun s, s' zwei elliptische Ebenen-Involutionen mit bestimmtem Sinne*, also zwei imaginäre Ebenen ε_+, ε'_+ darstellend. Durch diese Bezeichnung drücken wir aus, dass wir den Sinn beidemal als den positiven bezeichnen, und wollen deshalb auch die mit dem Sinne behafteten Involutionen genauer durch s_+, s'_+ bezeichnen. Jede von ihnen schneidet in den Träger der andern eine mit dem perspectiven Sinne behaftete Punkt-Involution ein, s_+ in s' die $\dot{s}'_+$ und s'_+ in s die $\dot{s}_+$.*) Diese beiden Involutionen $\dot{s}_+$, $\dot{s}'_+$ stellen also zwei

*) Um nicht zu viele Zeichen anzuwenden, wollen wir die von derselben Geraden getragenen Involutionen von Ebenen und Punkten so unterscheiden, dass wir nur die Punktinvolution durch einen übergesetzten Punkt bezeichnen, während

auf s, bezw. s' gelegene imaginäre Punkte E_+, E'_+ dar, und es ist:

$$E_+ \equiv s\varepsilon'_+,\ E'_+ \equiv s'\varepsilon_+ \quad \text{und} \quad \varepsilon_+ \equiv sE'_+,\ \varepsilon'_+ \equiv s'E_+.$$

Jede reelle Ebene liefert eine reelle in ihr gelegene Gerade, in welche s_+ und s'_+ dieselbe auch dem Sinne nach mit ihnen perspective Punktinvolution schneiden, nämlich die zu den ausgeschnittenen Strahleninvolutionen S_+, S'_+ gehörige t.

Sie trifft die Schnittlinie der imaginären Ebenen ε_+, ε'_+ und also auch diejenigen von ε_- und ε'_-, denn die beiden Involutionen s_-, s'_- schneiden die nämliche Involution ein, aber mit entgegengesetztem Sinne.

Alle diese Geraden bilden also eine Congruenz 1. Klasse.

Ist x eine von ihnen, so wird die Regelschaar $[ss'x]$ auch involutorisch und zwar ist sie perspectiv sowohl mit s_+, s'_+, als auch mit der Punktinvolution $\dot{x}_+$ auf x; in einer Geraden der Regelschaar schneiden sich eine Ebene von s_+ und eine von s'_+ und sie geht durch einen Punkt von $\dot{x}_+$; mit der gepaarten Geraden sind die gepaarten Elemente incident. Diese involutorische Regelschaar sei R_+. Ersichtlich werden durch sie auf s und s' die Punktinvolutionen s_+ und s'_+ eingeschnitten und beide werden aus x durch dieselbe Ebeneninvolution x_+ projicirt, diejenige, welche durch R_+ in dem Büschel um x hervorgerufen wird.

Die Strahlen der Congruenz haben also auch die Eigenschaft, dass aus jedem von ihnen die beiden Punktinvolutionen $\dot{s}_+$ und $\dot{s}'_+$ durch die nämliche mit beiden perspective Ebeneninvolution projicirt werden.

Da diese Eigenschaft zur vorigen dual ist, so lehrt sie, dass *die Congruenz auch 1. Ordnung ist.*

Auf jedem Strahle x der Congruenz haben wir also eine elliptische Punktinvolution $\dot{x}_+$ und um ihn eine elliptische Ebeneninvolution x_+.

Man kann die gegebenen Involutionen durch diejenigen von zwei beliebigen Geraden der Congruenz ersetzen. 87

Es genügt offenbar darzuthun, dass man s'_+ durch x_+ ersetzen kann, und es ist dann zu zeigen, dass ein beliebiger Strahl y der Congruenz eine zu s_+ und x_+ zugleich perspective Punktinvolution trägt. Gehört y zur Regelschaar $(ss'x)$, so geht dies aus der obigen Betrachtung ohne weiteres hervor, denn die Involution auf y ist dann die, welche durch R_+ eingeschnitten wird.

Wenn aber y nicht in der Regelschaar $(ss'x)$ sich befindet, so schneidet eine beliebige durch sie gelegte Ebene η die R_+ in einer

die Ebeneninvolution, abgesehen vom Zeichen + oder — für den Sinn, denselben Namen hat wie die tragende Gerade.

conischen (auf einem Kegelschnitte gelegenen) Involution ϱ_+, mit welcher die aus s_+, s'_+ und x_+ ausgeschnittenen Strahleninvolutionen perspectiv sind. Die beiden ersten sind auch perspectiv mit y_+, da y zur Congruenz gehört und deshalb eine zu s_+ und s'_+ perspective Punktinvolution trägt.

Nun gehen aber die Strahleninvolutionen, welche ϱ aus den Punkten des tragenden Kegelschnitts projiciren, durch die Involution der in Bezug auf denselben conjugirten Punkte, welche sich auf der Axe y^* von ϱ (Polare des Involutionscentrums) befindet;*) da ϱ elliptisch ist, so schneidet y^* den Kegelschnitt nicht reell.

Ist derselbe Ellipse oder Parabel, so liegt er ganz auf der einen Seite von y^*. Also haben alle ϱ_+ aus den verschiedenen Punkten der Curve projicirenden Strahleninvolutionen denselben Sinn und, da ihre Scheitel eben alle auf der einen Seite von y^* liegen, so bekommt auch die in y^* eingeschnittene Involution der conjugirten Punkte von allen denselben Sinn.

Ist der Kegelschnitt aber Hyperbel, so liegt y^* zwischen den Aesten; für auf demselben Aste gelegene Projectionscentren gilt das eben Gesagte; die Sinne aber der zu ϱ_+ perspectiven Strahleninvolutionen aus zwei Punkten, die sich auf verschiedenen Aesten befinden, sind entgegengesetzt, geben aber, weil die Scheitel zu verschiedenen Seiten von y^* liegen, der Involution auf dieser Geraden denselben Sinn.

Folglich ist zunächst y^* in η die einzige Gerade, auf welcher sich eine mit den Strahleninvolutionen ηs_+ und $\eta s'_+$ (die durch η aus s_+ und s'_+ ausgeschnitten werden und mit ϱ_+ ebenso perspectiv sind, wie s_+ und s'_+ mit R_+) perspective Punktinvolution y^*_+ befindet; da das schon für y gilt, so ist y^* mit y identisch.

Nun ist aber y^*_+ perspectiv auch mit x_+; also ist y^* oder y auch eine Gerade, welche eine zugleich mit s_+ und x_+ perspective Involution trägt; d. h. die Congruenz kann, wie behauptet, auch aus den Involutionen s_+ und x_+ und also auch aus s_+ und x_+ abgeleitet werden.

Jede der Ebeneninvolutionen x_+ ist mit jeder der Punktinvolutionen y_+ perspectiv (wofern x und y verschiedene Geraden der Congruenz sind).

Jeder Punkt des Raumes gehört nur zu einer dieser Punktinvolutionen, da blos ein Strahl der Congruenz durch ihn geht. Also ist jedem Punkte ein anderer zugeordnet, der ihm gepaarte in dieser Involution; ebenso jeder Ebene eine andere. Allen Punkten einer Ebene

*) Steiner-Schröter's Vorlesungen § 31 der 2. Aufl.

sind, wegen der perspectiven Lage der Punktinvolutionen mit den Ebeneninvolutionen, die Punkte der zugeordneten Ebene zugeordnet.

Demnach haben wir es mit einer Collineation zu thun und zwar, wie die Involutionen auf den und um die Congruenzstrahlen lehren, mit der *windschiefen Involution* (Nr. 50, 81).

Die Congruenzstrahlen — ein jeder die Verbindungslinie von ∞^1 Paaren entsprechender Punkte und die Schnittlinie von ∞^1 Paaren entsprechender Ebenen — sind sich selbst entsprechend in dieser Collineation.

Axen derselben oder *Leitgeraden* der Congruenz sind die imaginäre Gerade u, in der sich die beiden imaginären Ebenen ε_+ und ε'_+, die durch s_+ und s'_+ dargestellt werden, und die conjugirte imaginäre Gerade v, in der sich die durch s_- und s'_- dargestellten conjugirt imaginären Ebenen ε_-, ε'_- schneiden. Alle Congruenzstrahlen treffen u und v.

Da aber die Punkte E_+ und E'_+ beide sowohl in ε_+ als in ε'_+ liegen, so ist u zugleich Verbindungslinie von E_+, E'_+ und v ebenso Verbindungslinie der conjugirten Punkte E_-, E'_-.

Mit u incidiren alle Ebenen x_+ und alle Punkte $\dot{x}_+$ der Congruenzstrahlen x, mit v alle x_- und $\dot{x}_-$.

„*Die ganze windschiefe Involution* („elliptische“ windschiefe Involution) *mit dem einen Sinne aller ihrer Ebenen- und Punktinvolutionen x und $\dot{x}$, wie er perspectiv von den einen zu den andern verfolgt werden kann, stellt die imaginäre Gerade u, mit dem andern Sinne die conjugirt imaginäre v dar.*“*)

II.

Es giebt ∞^8 Strahlennetze im Raume. 88

Jedes Strahlennetz kann auf ∞^4 Weisen durch collineare Bündel erzeugt werden, da auf jedem der ∞^2 Strahlen des Netzes ∞^2-mal 2 Punkte als Scheitel der erzeugenden Bündel genommen werden können. Andererseits kann man, da es ∞^3 Ebenenbündel giebt, auf ∞^6 Weisen je zwei zusammenstellen, und zwischen je 2 solchen Bündeln sind dann noch ∞^{8-2} Collineationen möglich, in denen sich der Verbindungsstrahl der Scheitel selbst entspricht; denn an und für sich sind zwischen 2 Bündeln ∞^8 Collineationen möglich, aus welchen durch die doppelte

*) „Conjugirt imaginäre Geraden *2. Art*“ nach Staudt, ohne jeden reellen Punkt; während conjugirt imaginäre Geraden 1. Art mit gemeinsamem reellen Punkte und gemeinsamer reeller Ebene durch eine elliptische Strahleninvolution dargestellt werden (Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage § 7).

Bedingung, dass zwei Strahlen einander entsprechen, ∞^6 ausgeschieden werden. Somit erhalten wir ∞^{6+6-4} Strahlennetze.

Man kann die ∞^4 reellen Geraden des Raumes in $\infty^{2.4}$ Weisen zu je zweien combiniren und erhält so die ∞^8 Strahlennetze mit reellen Leitgeraden.

Um eine gegebene Gerade giebt es ∞^2 Ebeneninvolutionen, elliptische sowohl, wie hyperbolische, also haben wir insgesammt ∞^{4+2} elliptische Ebeneninvolutionen im Raume. Folglich kann man auf $\infty^{2.6}$ Weisen zwei solche Ebeneninvolutionen zusammenstellen; jede derartige Zusammenstellung giebt ein Strahlennetz mit zwei conjugirt imaginären Leitgeraden. Jedes solche Strahlennetz aber kann auf ∞^4 Weisen, vermittelst der Involutionen um zwei beliebige von seinen Strahlen erzeugt werden; also ist die Zahl der Strahlennetze mit conjugirt imaginären Leitgeraden ∞^{12-4}.

Jedes Strahlennetz kann auf $\infty^{4.2}$ Weisen durch 4 von seinen Strahlen bestimmt werden; die ∞^4 Geraden des Raumes kann man aber auf $\infty^{4.4}$ Weisen zu je vieren zusammenstellen. Auch hieraus ergiebt sich, dass es ∞^{16-8} Strahlennetze giebt.

89 Während beim Strahlengewinde die Zahl 5 der dasselbe bestimmenden Strahlen mit dem Grad der Mannigfaltigkeit übereinstimmt, ist beim Strahlennetze der Grad der Mannigfaltigkeit doppelt so gross, als die Zahl der bestimmenden Strahlen, und bei der Regelschaar sogar dreimal so gross; denn es giebt ∞^9 Regelschaaren und durch 3 Gerade ist eine Regelschaar bestimmt.

Das Hindurchgehen durch eine gegebene Gerade ist für ein Gewinde oder allgemeiner einen Complex eine einfache, für ein Strahlennetz oder eine Congruenz eine doppelte, für eine Regelschaar oder Regelfläche eine dreifache Bedingung.

Aehnlich ist das Hindurchgehen durch einen gegebenen Punkt für eine Fläche eine einfache, für eine Curve im Raume eine zweifache Bedingung.

Eine Ebene ist durch 3 Punkte bestimmt, eine Fläche 2. Grades durch 9; es giebt ∞^3 Ebenen, ∞^9 Flächen 2. Grades.

Eine Gerade ist durch 2, eine cubische Raumcurve durch 6 Punkte bestimmt; es giebt ∞^4 Gerade, ∞^{12} cubische Raumcurven.*)

Da eine Congruenz nur ∞^2 Strahlen hat, so führt ein ∞^1-System

*) Hierbei ist vorausgesetzt, dass die bestimmenden Elemente sämmtlich willkürlich gegeben werden können; z. B. bei einem Strahlenbüschel müssen die 2 bestimmenden Strahlen, bei einem Kegelschnitt die 5 bestimmenden Punkte in einer Ebene liegen.

von Congruenzen nur zu ∞^3 Strahlen oder einem Complexe und also noch nicht zu jedem beliebigen Strahle des Raumes; und erst in einem ∞^2-Systeme giebt es Congruenzen, die einen gegebenen Strahl enthalten.

Ein ∞^1-System von Congruenzen dagegen führt jedem gegebenen 90
Strahlenbüschel eine endliche Zahl von Strahlen zu; *daher ist es für eine Congruenz und insbesondere für ein Strahlennetz eine einfache Bedingung, in einen gegebenen Strahlenbüschel einen Strahl zu senden*, und wir können deshalb *nach der Zahl der Strahlennetze* fragen, *welche durch α gegebene Strahlen gehen und $8-2\alpha$ gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl zusenden.*

Wir wissen, dass es 1 Strahlennetz giebt, wenn $\alpha = 4$ ist.

Die Zahl ist hingegen 1, 2, 5, 14, wenn $\alpha = 3, 2, 1, 0$ ist.

Die ∞^1 Strahlennetze, welche durch 3 gegebene Strahlen g_1, g_2, g_3 gehen und einen Strahl in einem gegebenen Büschel (A_1, α_1) haben, erzeugen ein Gewinde. Denn dieser Büschel bewirkt in der Regelschaar $[g_1 g_2 g_3]$ eine Involution, in welcher je die von demselben Büschelstrahle getroffenen Geraden gepaart sind; diese gepaarten Strahlen sind die Leitgeraden der Netze und das Gewinde entsteht nach Nr. 71. Da es zum zweiten gegebenen Büschel (A_2, α_2) einen Strahl sendet, so ist die Behauptung für $\alpha = 3$ bewiesen.

Oder aber, man legt die Scheitel O_1, O_2 der erzeugenden Bündel in die Schnitte von g_1 mit α_1, α_2 und bestimmt die Collineation so, dass g_1 sich selbst entspricht, die Ebenen $O_1(g_2, g_3)$ aber den Ebenen $O_2(g_2, g_3)$ correspondiren und dass die den Ebenen α_1, α_2 von O_1, bezw. O_2 je im andern Bündel entsprechenden Ebenen durch A_1, bezw. A_2 gehen. Eine so bestimmte Collineation zweier Bündel ist aber nach Hirst*) eindeutig bestimmt. Hinsichtlich der beiden andern Fälle $\alpha = 2, 1$ wollen wir uns hier begnügen, sie vermittelst Schubert's Princip der Erhaltung der Anzahl**) oder, wie er es ursprünglich nannte, des Princips der speciellen Lage***) ebenfalls auf 2 von Hirst a. a. O. gefundene Zahlenergebnisse zurückzuführen.

Dies Princip lautet bekanntlich:

Wenn einem (algebraischen) geometrischen Gebilde Γ so viele (algebraische) Bedingungen auferlegt sind, dass nur eine endliche Zahl

*) On the Correlation of two Planes (Proceed. London Math. Soc. Bd. 5 S. 40; Annali di Matematica Ser. II Bd. 6 S. 260) Nr. 42 Signatur [2111] der Tabelle und Anmerkung, in der gesagt wird, dass die für die Correlation erhaltenen Ergebnisse auch für die Collineation gelten.

**) Kalkül der abzählenden Geometrie § 4.

***) Göttinger Nachrichten für 1874 S. 274; Math. Annalen Bd. 10 S. 9, 23.

von Γ sie befriedigen können, dann ist diese Zahl immer dieselbe, welche Lagen auch die in den Bedingungen vorkommenden Gebilde Γ' haben, selbst wenn sie gewisse specielle Lagen einnehmen; wofern nur durch diese Specialisirung nicht eine solche gegenseitige Abhängigkeit der Γ' eintritt, dass nun unendlich viele Γ statt einer endlichen Zahl den Bedingungen genügen.

Im Falle $\alpha = 2$ sind also gegeben 2 Strahlen g_1, g_2 und 4 Strahlenbüschel $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_4, \alpha_4)$. Wir geben g_1 die specielle Lage, dass sie die Schnittlinien $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_3\alpha_4$ trifft, und legen O_1, O_2 in diese Treffpunkte. In der Collineation entspricht dann g_1 sich selbst, die Ebenen O_1g_2 und O_2g_2 entsprechen einander und die den Ebenen α_1, α_2 von O_1 und die den Ebenen α_3, α_4 von O_2 je im andern Bündel entsprechenden Ebenen sollen durch A_1, A_2, bezw. A_3, A_4 gehen. Es liegt dann nach Hirst's Bezeichnung die Signatur [1122] vor, welche 2 Collineationen ermöglicht, die also zu 2 Strahlennetzen führen.

Im Falle $\alpha = 1$, wo der Strahl g_1 und 6 Strahlenbüschel (A_1, α_1), $\ldots$, (A_6, α_6) gegeben sind, geben wir g_1 die specielle Lage, dass sie die beiden Punkte $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ und $\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ verbindet, in welche dann O_1, O_2 gelegt werden. Wir gelangen zur Signatur [1033], welche nach Hirst 5 Collineationen zulässt.

Auf den letzten Fall $\alpha = 0$ ist diese Betrachtungsweise nicht anzuwenden; wir verweisen auf die Ableitung von Schubert,*) die wir hier wegen des umfangreichen anzahlgeometrischen Materials, das er voraussetzt, nicht mit hinreichender Kürze wiedergeben können.

91 Vier Strahlen bestimmen ein Strahlennetz; also haben wir nach einem Kennzeichen dafür zu suchen, dass 5 Strahlen g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 zu demselben Strahlennetze gehören. 5 solche Strahlen sind natürlich nicht geeignet, ein Gewinde zu bestimmen; vielmehr wird jedes Gewinde, das durch 4 von ihnen geht, von selbst durch den fünften gehen, da es das ganze durch die 4 Strahlen bestimmte Strahlennetz enthält (Nr. 80).

Ersichtlich müssen die beiden reellen oder imaginären Treffgeraden von 4 der fünf Strahlen auch der fünften begegnen; aber erwünschter ist es, ein Kennzeichen zu besitzen, das sich ganz reell aussprechen lässt.

Weil die 5 Geraden zwei gemeinsame Treffgeraden u und v besitzen, so haben die Regelschaaren $[g_1g_2g_3]$ und $[g_1g_4g_5]$ zwei Gerade gemein, also haben, nach Steiner's Satz (Nr. 10), auch $(g_1g_2g_3)$ und

*) Kalkül der abzählenden Geometrie § 27.

$(g_1 g_4 g_5)$ zwei gemeinsame Geraden, d. h. ausser g_1 noch eine, die dann stets reell ist.

Wenn daher 5 Gerade, in irgend einer Weise in 2 Gruppen von je dreien zerlegt, zu zwei durch diese bestimmten Regelschaaren führen, welche, ausser der beiden Gruppen gemeinschaftlichen Geraden, noch eine zweite Gerade gemein haben, dann gehören die 5 Geraden zu dem nämlichen Strahlennetze.

Sehen wir zu, wieso, wenn 5 Gerade 2 gemeinsame Treffgeraden u, v haben, die Construction des Gewindes aus ihnen, welche in Nr. 74 erörtert wurde, unbestimmt wird.

In der Ebene $g_1 u$ als β fallen, weil g_4^*, g_5^* in $(g_1 g_2 g_3)$ sich befinden und also auch von u getroffen werden, in die u die beiden Verbindungslinien der Spuren von g_4 und g_4^*, bezw. von g_5 und g_5^* zusammen, also vereinigen sich die beiden Punkte B', B'', die dieser β zugehören. Dasselbe gilt in der Ebene $g_1 v$. Der Punkt A endlich ist ein dritter sich selbst entsprechender Punkt der conjectiven Punktreihen der B', B'', folglich fallen diese für jede Ebene β durch g_1 zusammen, und es ist möglich, ∞^1 Gewinde durch die 5 Geraden zu legen.

Das eben gefundene Kennzeichen für 5 Strahlen eines Netzes 92
führt uns, wenn wir den einen, g_5, im Netze veränderlich sein lassen, zu folgender *Construction des Netzes aus 4 Strahlen* g_1, g_2, g_3, g_4.

Man bestimme aus dreien von ihnen die Regelschaar, etwa $(g_1 g_2 g_3)$; *ist dann* g' *ein veränderlicher Strahl derselben, so erzeugen alle Regelschaaren* $(g_1 g' g_4)$ *das Strahlennetz.*

Denn ist g_5 ein Strahl einer dieser Regelschaaren, so ist der Strahl g', der sie geliefert hat, den Schaaren $(g_1 g_2 g_3)$ und $(g_1 g_4 g_5)$ gemeinsam.

Es ist ersichtlich, dass man zur Bestimmung der erzeugenden Regelschaaren g_1 durch einen andern festen Strahl g_0 von $(g_1 g_2 g_3)$ ersetzen kann, denn das heisst, diese zum Netze gehörige Schaar durch g_0, g_2, g_3 statt durch g_1, g_2, g_3 bestimmen.

Die einzige Gerade durch einen Punkt O, bezw. in einer Ebene ω, welche g_0 und g_4 trifft, schneidet noch einen zweiten Strahl g' von $(g_1 g_2 g_3)$; die Regelschaar $(g_0 g' g_4)$ ist die einzige erzeugende Schaar, welche einen mit O, bezw. ω incidenten Strahl enthält.

Da g' linear construirt werden kann, so haben wir damit *eine lineare Construction des Strahles eines durch 4 gegebene Strahlen bestimmten Netzes, der mit einem gegebenen Punkte oder einer gegebenen Ebene incidirt.*

93 Zwei analoge *Erzeugungen des Gewindes aus 5 Strahlen* $g_1, g_2, \ldots g_5$, auf die wir in Nr. 74 hinwiesen und welche wir nun nachholen, sind folgende:

Vier von den 5 Strahlen bestimmen ein Netz, etwa $(g_1 g_2 g_3 g_4)$; *ein fester Strahl* g_0 *und ein beweglicher* g', *welche zu diesem Netze gehören, bestimmen mit* g_5 *eine Regelschaar* $(g_0 g' g_5)$; *alle diese* ∞^2 *Regelschaaren erzeugen das durch* $g_1, \ldots g_5$ *bestimmte Gewinde.*

Oder: *Ein fester Strahl* g_0 *und ein beweglicher* g' *aus der Regelschaar* $(g_1 g_2 g_3)$ *bestimmen mit* g_4, g_5 *das Netz* $(g_0 g' g_4 g_5)$; *diese* ∞^1 *Netze erzeugen das Gewinde.**)

Bei der ersten Erzeugung sei m die Gerade durch O oder in ω, welche g_0 und g_5 trifft, so ist dieselbe Leitgerade aller derjenigen erzeugenden Regelschaaren R, welche zu Strahlen des erzeugten Complexes führen, die mit O oder ω incidiren. Also trifft m auch diejenigen Strahlen g' von $(g_1 g_2 g_3 g_4)$, welche diese Regelschaaren liefern. Folglich bilden diese g' selbst eine Regelschaar (Nr. 76), der auch g_0 angehört. Die Gerade g_5 trifft, ausser m, noch eine zweite Leitgerade n dieser Regelschaar, welche auch Leitgerade für alle jene R ist. Folglich liegen die durch O gehenden Strahlen des Complexes in der Ebene On und die in ω befindlichen gehen durch den Punkt ωn. Der Complex ist also ein Gewinde.

Diese Construction der Nullebene von O, *bezw. des Nullpunktes von* ω *ist linear.*

Bei der zweiten Erzeugung befinden sich die Leitgeraden der erzeugenden Strahlennetze in der Regelschaar $[g_0 g_4 g_5]$ und sind je diejenigen Geraden derselben, welche von der beweglichen Geraden g' von $(g_1 g_2 g_3)$ getroffen werden. Dadurch entsteht aber in $[g_0 g_4 g_5]$ eine Involution; denn jede Gerade l dieser Regelschaar trifft, ausser g_0, noch eine zweite Gerade g' von $(g_0 g_2 g_3)$ und diese trifft eine zweite Gerade l' von $[g_0 g_4 g_5]$, und da l aus l' sich in derselben Weise ergiebt, wie l' aus l, so haben wir involutorisches eindeutiges Entsprechen der l und l' in $[g_0 g_4 g_5]$.

Damit ist diese Erzeugung auf die Chasles'sche Erzeugung des Gewindes vermittelst einer involutorischen Regelschaar zurückgeführt.

*) Hinsichtlich dieser Erzeugungen und der vorangehenden Erzeugung des Netzes vergleiche man Annali di Matematica Ser. II Bd. 7 S. 226. Dort habe ich vermittelst dieser Erzeugungen aus dem Satze von Möbius, dass die Wirkungslinien von 4 Kräften im Gleichgewichte derselben Regelschaar angehören, die beiden weiteren Sätze abgeleitet, dass *die Wirkungslinien von 5 oder 6 Kräften, die im Gleichgewichte sind, in demselben Strahlennetze, bezw. demselben Gewinde sich befinden.*

Als Kennzeichen dafür, dass *6 Strahlen* $g_1, g_2, \ldots, g_6$ *zu demselben Gewinde gehören*, ergiebt sich aus dieser Erzeugung folgendes:

Das Strahlennetz durch 4 von den 6 Strahlen und die Regelschaar durch die beiden übrigen und irgend einen Strahl des Netzes, oder die Regelschaar durch 3 von den 6 Strahlen und das Strahlennetz durch die 3 übrigen und irgend einen Strahl der Regelschaar müssen noch einen zweiten Strahl gemeinsam haben.

Ein Strahlennetz lässt sich eindeutig auf eine Ebene E *abbilden.* 94
Jedem Strahl des Netzes entspricht sein Spurpunkt in E, *und jedem Punkte von* E *entspricht der einzige durch ihn gehende Strahl des Netzes.*

Ausnahmen von dieser Eindeutigkeit sind folgende:

Dem Strahl g_0 des Netzes, der in E liegt, entspricht jeder seiner Punkte.

Und jedem der beiden Punkte U, V, in denen E von den Leitgeraden u, v des Netzes getroffen wird, entsprechen ∞^1 Strahlen des Netzes, welche einen Büschel bilden.

Einer Geraden der Bildebene E entspricht eine Regelschaar im Netze, aber nicht umgekehrt jeder Regelschaar des Netzes eine Gerade in E, sondern im allgemeinen ein Kegelschnitt, der durch U und V geht. Die beiden übrigen Schnittpunkte, welche solchen Kegelschnitten noch gemeinsam sind, beweisen, dass *zwei Regelschaaren eines Strahlennetzes zwei Gerade gemein haben;* doch folgt das auch aus Steiner's Satz, da ihren Leitschaaren die Leitgeraden des Netzes gemeinschaftlich sind.

Mit Hilfe dieser Abbildung des Strahlennetzes in die Ebene wollen 95
wir das „*Correspondenzprincip im Strahlennetze*" aus dem für die Ebene (Nr. 32) ableiten.

Wir denken uns also das Strahlennetz doppelt als Σ *und als* Σ_1. *Zwischen* Σ *und* Σ_1 *bestehe eine Correspondenz, in welcher jedem Strahle* x *von* Σ n_1 *Strahlen* x_1 *von* Σ_1 *und jedem* x_1 n *Strahlen* x *entsprechen, und bei der es je* m' *Paare entsprechender Strahlen* x *und* x_1 *giebt, welche beide je in einer gegebenen Regelschaar des Netzes sich befinden. Wir nehmen nur den allgemeinen Fall an, dass es blos eine endliche Zahl von sich selbst entsprechenden Strahlen giebt.*

Diese Correspondenz veranlasst sofort in der Bildebene E eine Correspondenz, bei welcher jedem Punkte X n_1 Punkte X_1, jedem X_1 n Punkte X entsprechen und m'-mal zwei entsprechende Punkte auf gegebenen Geraden liegen; also hat dieselbe $n + n_1 + m'$ Coincidenzen.

Unter denselben giebt es aber solche, denen keine Coincidenz im Strahlennetze entspricht. Wir wollen die beiden Systeme von ∞^1 Strahlenbüscheln im Netze als *erste und zweite Büschel* unterscheiden;

die ersten haben ihre Scheitel auf u und senden ihre Ebene durch v, die zweiten umgekehrt.

Dann haben wir 4 Zahlen m^{11}, m^{12}, m^{21}, m^{22}, wo m^{ik} die Anzahl der Paare entsprechender Strahlen bei unserer Correspondenz im Netze ist, bei welchen x in einem i^{ten}, x_1 in einem k^{ten} Büschel sich befindet. In den Fällen $i = k$ können die beiden Büschel auch identisch sein. Folglich haben wir in dem ersten Büschel, der in U seinen Scheitel hat, m^{11} Paare entsprechender Strahlen, welche den U zur m^{11}-fachen Coincidenz im Felde E machen; ebenso ist V eine m^{22}-fache Coincidenz. Die n_1, bezw. n Strahlen aber, welche dem in E fallenden Strahle g_0 entsprechen, haben im allgemeinen ihre Spurpunkte nicht auf g_0 und führt daher die andere Art der Ausnahme von der eindeutigen Beziehung zwischen Netz und Feld nicht auch zu unbrauchbaren Coincidenzen. Demnach hat die Correspondenz im Netze

$$n + n_1 + m' - (m^{11} + m^{22})$$

Coincidenzen. Aber die Differenz $m' - (m^{11} + m^{22})$ kann man anders darstellen.

Eine im Netze befindliche Regelfläche hat die Leitgeraden u, v desselben auch zu ihren eigenen Leitlinien und zwar zu n'-, n''-fachen, wenn in einen ersten, bezw. zweiten Büschel n', bezw. n'' von ihren Erzeugenden fallen; also ist der Grad $n' + n''$, wie jede Ebene durch u oder v beweist.

Daher ist der Grad der Regelfläche in Σ_1, bezw. Σ, die einem zu Σ, bezw. Σ_1 gerechneten i^{ten} Büschel entspricht, $m^{i1} + m^{i2}$, resp. $m^{1i} + m^{2i}$.

Der Grad einer Regelfläche, die einem Strahlennetze angehört, ist aber gleich der Zahl der Geraden, welche sie mit einer Regelschaar des Netzes gemein hat; denn die Erzeugenden der Regelfläche, welche eine Gerade l treffen, gehören zu derjenigen Regelschaar des Netzes, in deren Leitschaar sich l befindet.

Dies umfasst den vorigen Satz, da zwei Strahlenbüschel eines Netzes aus verschiedenen Systemen eine Regelschaar zusammensetzen.

Demnach hat die Regelfläche in Σ, welche einem zu Σ_1 gerechneten ersten, bezw. zweiten Büschel entspricht, mit einer beliebigen Regelschaar ϱ des Netzes $m^{11} + m^{21}$, bezw. $m^{12} + m^{22}$ Gerade gemein; oder die Regelfläche in Σ_1, welche der zu Σ gerechneten Regelschaar ϱ entspricht, schickt in einen ersten Büschel $m^{11} + m^{21}$, in einen zweiten $m^{12} + m^{22}$ Strahlen, folglich ist der Grad $m^{11} + m^{21} + m^{12} + m^{22}$. Dieselbe Zahl ergiebt sich, wenn ϱ zu Σ_1 gerechnet wird; und in der That, dieser Grad sagt ja aus, wie viele Paare entsprechender Strahlen

x, x_1 es giebt, welche beide je in einer gegebenen Regelschaar des Netzes liegen, und ist daher unser m'. Also:

$$m^{11} + m^{21} + m^{12} + m^{22} = m',$$

und:

$$m' - (m^{11} + m^{22}) = m^{12} + m^{21};$$

und demnach ist die Zahl der Coincidenzen der Correspondenz im Strahlennetz $n + n_1 + m^{12} + m^{21}$.

Man kann die Summe $m^{12} + m^{21}$ noch zusammenfassen und dann das Correspondenzprincip im Strahlennetze folgendermassen aussprechen:

Wenn zwischen zwei dasselbe Strahlennetz erfüllenden Systemen Σ und Σ_1 eine Correspondenz besteht, bei welcher einem Strahle x von Σ n_1 Strahlen x_1 von Σ_1, jedem x_1 aber n Strahlen x entsprechen und es m Paare entsprechender Strahlen giebt, bei denen sich der Strahl x oder x_1 in einem gegebenen Büschel des Netzes aus dem einen der beiden Systeme, der x_1 oder x in einem gegebenen Büschel aus dem andern Systeme befindet, dann hat diese Correspondenz, wofern sie nur eine endliche Zahl von Coincidenzen besitzt, deren

$$n + n_1 + m.$$

Genau dasselbe Correspondenzprincip ergiebt sich für zwei von derselben Fläche 2. Grades getragene Systeme von Punkten; m ist dann die Zahl der Paare entsprechender Punkte, die auf zwei gegebene Geraden aus verschiedenen Schaaren fallen. Man beweist es leicht, indem man die Systeme aus einem Punkte der Fläche auf eine Ebene projicirt.*)

Dies weist auf die Möglichkeit *einer eindeutigen Abbildung eines* 96
Strahlennetzes auf eine Fläche 2. Grades hin.

Dazu genügt es, *das Strahlennetz $\mathfrak{N}$ und die Fläche 2. Grades $\mathfrak{F}'$ in das nämliche Punktfeld E abzubilden. Es sei O' der Punkt von $\mathfrak{F}'$, aus dem sie auf E projicirt wird; dann entsprechen einander ein Strahl x von $\mathfrak{N}$ und der zweite Schnitt der $\mathfrak{F}'$ mit dem Strahle von O' nach $X \equiv x\mathsf{E}$.* Aber in dieser allgemeinen Form ist die Abbildung noch nicht einfach genug; denn einer Regelschaar ϱ in $\mathfrak{N}$ entspricht auf $\mathfrak{F}'$ die Raumcurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkte in O', in welcher $\mathfrak{F}'$ von dem Kegel geschnitten wird, der aus O' den Kegelschnitt $\varrho\mathsf{E}$ projicirt; und einem Kegelschnitte von $\mathfrak{F}'$ entspricht eine Regelfläche 4. Grades in $\mathfrak{N}$.

Behufs einer Vereinfachung wollen wir zunächst annehmen, damit

*) Vergl. Zeuthen, Math. Ann. Bd. 18 S. 35, wo auch der Fall einer Coincidenzcurve (d. h. einer Curve von ∞^1 Coincidenzpunkten) berücksichtigt ist.

die Abbildung reell sei, dass, je nachdem $\mathfrak{N}$ reelle oder imaginäre Leitgeraden u, v hat, $\mathfrak{F}'$ reelle Geraden habe oder nicht. Diese Fläche habe dann weiter zu dem Netze die Lage, dass ihre beiden in O' sich schneidenden Geraden u', v' durch die Spuren U, V der Leitgeraden des Netzes in E gehen; was wir dadurch bewirken, dass die Berührungsebene an $\mathfrak{F}'$ in O' durch den in E gelegenen Strahl g_0 von $\mathfrak{N}$ geht und dass die Involution, auf g_0, der in Bezug auf $\mathfrak{F}'$ conjugirten Punkte identisch ist mit der Punktinvolution, welche der Geraden g_0 durch die mit dem Netze verbundene windschiefe Involution zukommt.

Bei dieser Specialisirung der Beziehung entsprechen dann den ∞^3 Regelschaaren des Netzes $\mathfrak{N}$ die ∞^3 Kegelschnitte auf $\mathfrak{F}'$; denn ist ϱ eine Regelschaar von $\mathfrak{N}$, so geht ihr Schnitt mit E durch U und V und der Kegel 2. Grades, der ihn aus O' projicirt, enthält die Geraden u', v' und hat also mit $\mathfrak{F}'$ nur noch einen Kegelschnitt gemein; und umgekehrt von der Regelfläche 4. Grades, die bei der obigen allgemeinen Abbildung in $\mathfrak{N}$ einem Kegelschnitte von $\mathfrak{F}'$ entsprach, sondern sich jetzt stets die beiden Strahlenbüschel des Netzes aus U und V ab.

Wie ein Kegelschnitt auf $\mathfrak{F}'$ durch 3 von seinen Punkten, so ist eine Regelschaar in $\mathfrak{N}$ durch 3 von ihren Strahlen bestimmt.

Zwei Kegelschnitte auf $\mathfrak{F}'$ haben 2 Punkte, zwei Regelschaaren in $\mathfrak{N}$ zwei Strahlen gemein.

Bei der allgemeineren Abbildung von $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{F}'$ haben wir Ausnahmen von der Eindeutigkeit.

Dem Strahle g_0 in E entsprechen ∞^1 Punkte auf $\mathfrak{F}'$, welche den Kegelschnitt erfüllen, in welchem $\mathfrak{F}'$ von der Ebene $g_0 O'$ geschnitten wird. Den Strahlen des Netzes, die von den Punkten $u'\mathsf{E}$, $v'\mathsf{E}$ ausgehen, welche ja im allgemeinen Falle von U, V verschieden sind, entsprechen auch ∞^1 Punkte, alle Punkte von u', bezw. v'. Endlich jedem der beiden zweiten Schnitte von $\mathfrak{F}'$ mit $O'U$, $O'V$ entsprechen alle ∞^1 Strahlen des Netzes aus U, bezw. V.

Diese Ausnahmen fallen im speciellen Falle weg.

Betrachten wir einen Strahlenbüschel des Netzes aus einem beliebigen Punkte von u, so ist seine Spur in E eine durch V gehende Punktreihe und der Strahlenbüschel, der sie aus O' projicirt, schneidet $\mathfrak{F}'$, ausser in v', noch in einer Geraden der andern Schaar, der u'-Schaar, und den einzelnen Strahlen des Büschels in $\mathfrak{N}$ entsprechen die einzelnen Punkte dieser Geraden; insbesondere entspricht dem nach V gehenden Strahl des Büschels der Schnittpunkt der Geraden mit v'. So wird jedem der Strahlen des Netzbüschels aus V, welche im allgemeinen Falle alle einen und denselben entsprechenden Punkt hatten, ein besonderer Punkt von v' zugeordnet, derjenige nämlich, in welchem v'

von der Geraden der u'-Schaar geschnitten wird, welche dem Büschel mit Scheitel auf u entspricht, zu dem unser Strahl auch gehört, und umgekehrt jedem Punkte von v' ein besonderer Strahl des Büschels aus V. Analoges gilt für den Büschel aus U und die Gerade u'.

Die Strahlen, welche die verschiedenen Punkte von g_0 aus O' projiciren, fallen in die Berührungsebene von O' und demnach vereinigen sich ihre zweiten Schnitte mit $\mathfrak{F}'$ alle im Punkte O', der so allein der g_0 entspricht.

Also hat bei der jetzigen speciellen Abbildung des Netzes auf die Fläche 2. Grades jedes Element des einen Gebildes ohne Ausnahme nur ein entsprechendes im andern.

Und den beiden Systemen von Strahlenbüscheln im Netze entsprechen die beiden Geradenschaaren auf der Fläche.

Ersichtlich sind ein Strahlenbüschel und seine entsprechende Punktreihe projectiv.

Der gemeinsame Punkt zweier Geraden aus verschiedenen Schaaren ist das Bild des gemeinsamen Strahles der beiden entsprechenden Büschel aus verschiedenen Systemen.

Wir können diese Abbildung als *Collineation* bezeichnen, und wie 97
zwei Flächen 2. Grades, so können wir auch zwei Strahlennetze (verschiedene oder identische) collinear machen; entsprechende Gerade durchlaufen dann gleichzeitig Strahlenbüschel und Regelschaaren.

Um eine solche Collineation zwischen 2 Strahlennetzen $[u, v]$ *und* $[u_1, v_1]$ *festzulegen*, muss man zunächst bestimmen, welche Strahlenbüschel-Systeme sich entsprechen sollen. Wir wollen annehmen, dass die ersten Büschel (deren Scheitel auf u, bezw. u_1 sich befinden) einander entsprechen, und ebenso die zweiten. Dann genügt es, 3 Strahlen a, b, c von $[u, v]$ mit 3 Strahlen a_1, b_1, c_1 von $[u_1, v_1]$ entsprechend anzunehmen. Durch die Punkte $u(a, b, c)$ und $u_1(a_1, b_1, c_1)$ als entsprechende ist eine Projectivität zwischen den Punktreihen auf u und u_1 festgelegt, und dasselbe gilt für v und v_1. Zwei Strahlen x und x_1 der beiden Netze sind dann entsprechend, wenn die Punkte xu und x_1u_1, xv und x_1v_1 sich in diesen beiden Projectivitäten entsprechen.

Aber diese collinearen Strahlennetze sind ersichtlich entsprechende Figuren in collinearen Räumen. Lassen wir den 4 Punkten ua, ub, va, vb die Punkte u_1a_1, u_1b_1, v_1a_1, v_1b_1 und einem Punkte X auf c irgend einen Punkt X_1 auf c_1 entsprechen, so entsprechen den u, v, a, b, c die u_1, v_1, a_1, b_1, c_1 und zwar c und c_1, weil sie durch entsprechende Punkte gehen und zwei Paare entsprechender Geraden treffen. Also sind die durch diese Collineation auf u und u_1, v und v_1 hervor-

gerufenen Projectivitäten dieselben wie oben, mithin auch dieselben x und x_1 correspondirend wie oben.

Da aber X_1 beliebig auf c_1 angenommen werden kann, so haben wir ∞^1 derartige Collineationen, in denen allen unsere collinearen Strahlennetze in derselben Weise entsprechend sind. Durch zwei beliebige von diesen Collineationen wird der Raum Σ_1, zu dem $[u_1, v_1]$ gehört, in zwei Weisen zum andern Σ, also zu sich selbst collinear, wobei u_1, v_1, a_1, b_1, c_1 und demnach (Nr. 84) alle Geraden von $[u_1, v_1]$ sich selbst entsprechen.

Während zwei collineare Flächen 2. Grades nur in einer einzigen Collineation entsprechende Gebilde sind, sind zwei collineare Strahlennetze es in ∞^1 Collineationen.

Selbstverständlich ist zur Realität der Collineation zwischen zwei Strahlennetzen erforderlich, dass sie gleichartig sind.

98 Wir haben (Nr. 94) gefunden, dass zwei demselben Strahlennetze angehörige Regelschaaren zwei Gerade gemeinsam haben. Wir wollen an diesen Satz einige andere analoge anschliessen.

Auch umgekehrt befinden sich zwei Regelschaaren mit zwei gemeinsamen Geraden g, g' in einem Strahlennetze.

Dasselbe ist bestimmt durch g, g' und je eine weitere Gerade aus jeder der beiden Schaaren; seine Leitgeraden sind die beiden Geraden, die den Leitschaaren gemeinsam sind.

Ebenso befinden sich 3 Regelschaaren mit zwei gemeinsamen Geraden in dem nämlichen Gewinde.

Zwei Paare Polaren eines Gewindes gehören, wie wir wissen (Nr. 58), zu derselben Regelschaar; also *gehören 3 Paare Polaren eines Gewindes zu demselben Netze und 4 Paare zu demselben Gewinde.*

Eine Regelschaar und ein Netz, die sich in demselben Gewinde befinden, haben zwei Gerade gemeinsam.

Eine Gerade l aus der Leitschaar der Regelschaar ϱ scheidet aus dem Gewinde ein Netz aus, dessen zweite Leitgerade die Polare l' von l nach dem Gewinde ist; in diesem Netze muss ϱ, aber auch die durch l aus dem Netze ausgeschiedene Regelschaar ϱ' sich befinden und die ϱ und ϱ' gemeinsamen Geraden sind die gesuchten.

Legt man durch das Netz noch ein zweites Gewinde, so sind die beiden Geraden, weil das Netz der volle Durchschnitt der beiden Gewinde ist, auch diejenigen 2 Geraden, welche die Regelschaar mit diesem Gewinde gemein hat.

Wenn zwei Regelschaaren ϱ, ϱ' sich in demselben Gewinde Γ befinden, so befinden sich ihre Leitschaaren λ, λ' auch in einem Gewinde.

Das Netz durch 3 Gerade von ϱ und eine g_1' von ϱ' enthält ϱ und liegt in Γ, also hat es mit ϱ', ausser g_1', noch eine Gerade g_2' gemeinsam; seine Leitgeraden l_1, l_2 gehören zu λ. Durch 3 Gerade von λ und 2 Gerade l_1', l_2' von λ' sei das Gewinde Δ gelegt; dasselbe enthält das Netz (l_1, l_2, l_1', l_2'), dessen Leitgerade g_1', g_2' sind. Folglich gehört die ganze Schaar λ' zu diesem Netze und damit auch zum Gewinde Δ, das demzufolge λ und λ' umfasst.*)

Zwei zu demselben Gewinde gehörige Netze haben eine Regelschaar gemein.

Die Leitgeraden eines in einem Gewinde befindlichen Netzes sind polar in Bezug auf dasselbe; also gehören die 4 Leitgeraden zu einer Regelschaar, und diese ist die Leitschaar der gemeinsamen Schaar.

Oder, wenn man das eine Netz als Schnitt des gegebenen Gewindes mit einem andern ansieht, so ist die gemeinsame Regelschaar diejenige, welche diesem Gewinde und dem andern Netze gemeinsam ist. (Nr. 35).

Zwei beliebige Netze haben 2 Gerade gemein.

Es sind dies diejenigen 2 Geraden, welche den 4 Gewinden gemeinsam sind, als deren Schnitte wir die Netze ansehen können, (Nr. 35) oder die Treffgeraden ihrer 4 Leitgeraden; wir erhalten sie auch als die gemeinsamen Geraden des einen Netzes mit der Regelschaar, in welcher ein durch dasselbe gelegtes Gewinde das andere Netz durchschneidet

Haben zwei Strahlennetze 3 Gerade gemein und mithin die durch sie bestimmte Regelschaar, so befinden sie sich in demselben Gewinde, das durch die 3 Geraden und je einen weiteren Strahl jedes der beiden Netze bestimmt ist.

III.

Wir wollen in diesem Abschnitte das Strahlennetz vorzugsweise als 99
Durchschnitt zweier Gewinde, als Basis eines Büschels von Gewinden ansehen.

Wir knüpfen an die in Nr. 74 besprochene Construction des Gewindes aus 5 von seinen Strahlen auf Grund der Sylvester'schen Erzeugung an, wollen aber blos 4 Strahlen g_1, g_2, g_3, g_4 als gegeben annehmen.

Wiederum werde der Strahlenbüschel (A, α) durch g_1 gelegt; zu jeder Ebene β durch g_1 haben wir dann auf g_1 einen Punkt B — früher B' genannt — von der Beschaffenheit, dass die Büschel (A, α) und (B, β) so projectiv sind, dass g_1 sich selbst und die von g_2, g_3, g_4

*) Vergl. Math. Annalen Bd. 26 S. 484 Anm.

getroffenen Strahlen einander entsprechen. B und β bewegen sich projectiv auf und um g_1. Es seien B, B', B'' drei Lagen von B und β, β', β'' die 3 entsprechenden Ebenen. *Dann erzeugt* (A, α) *mit* (B, β), (B', β'), (B'', β'') *bezw. die 3 Gewinde* Γ, Γ', Γ'', *welche alle durch* g_1, g_2, g_3, g_4 *gehen.* Wenn a, b, b' drei entsprechende Strahlen in (A, α), (B, β), (B', β') sind, so ist die Regelschaar $[abb']$ offenbar den Gewinden Γ, Γ' gemein; zu ihr gehört auch g_1; also enthält die Ebene β'' aus der Leitschaar eine Gerade b'', welche g_1 in B_1'' treffe; die Ebenen α, β, β' enthalten aus der Leitschaar die a, b, b', welche der g_1 in A, B, B' begegnen; mithin ist $ABB'B_1'' \barwedge \alpha\beta\beta'\beta''$. Nun bewegen sich, wie gesagt, B und β projectiv, wobei auch A und α einander entsprechen; daher ist auch $ABB'B'' \barwedge \alpha\beta\beta'\beta''$; also ist B_1'' mit B'' identisch und b'' gehört zum Büschel (B'', β'').

So wird jedem Tripel entsprechender Strahlen a, b, b' von (A, α), (B, β) und (B', β') auch ein Strahl b'' von (B'', β'') zugeordnet und dieser Büschel jenen projectiv gemacht; b'' wird von allen den Strahlen getroffen, welche a, b, b' zugleich schneiden.

Seien nun a_2, b_2, b_2', b_2'' die von g_2 getroffenen Strahlen der 4 Büschel, so gehört g_2 zur Regelschaar $[a_2b_2b_2']$ und weil sie b_2'' trifft, so ist diese die dem Tripel a_2, b_2, b_2' entsprechende Gerade in (B'', β'') und analoges gilt für die von g_3, g_4 getroffenen Strahlen. Also entsprechen in der jetzt gefundenen Projectivität von (A, α) und (B'', β'') den g_1, a_2, a_3, a_4 die g_1, b_2'', b_3'', b_4'', d. h. sie ist dieselbe wie die obige, durch welche Γ'' erzeugt wurde.

Das Gewinde Γ'' *enthält folglich alle Strahlen, welche den Gewinden* Γ *und* Γ' *gemeinsam sind.*

Wenn u eine der beiden Treffgeraden von g_1, g_2, g_3, g_4, B^0 ihr Schnitt, β^0 ihre Verbindungsebene mit g_1 ist, so ist die Projectivität zwischen (A, α) und (B^0, β^0) eine ausgeartete; g_1 ist der singuläre Strahl im ersten, u, in welchem sich b_2, b_3, b_4 vereinigen, derjenige im zweiten Büschel. Das Strahlengewinde, erzeugt durch die gemeinsamen Treffgeraden nicht zusammenfallender homologer Strahlen der beiden Büschel, wird, da allen von g_1 verschiedenen Strahlen von (A, α) der feste Strahl u in (B^0, β^0) entspricht, das Strahlengebüsche $[u]$.

100 Die Sylvester'sche Erzeugungsweise führt uns aber noch auf einem anderen Wege zum Büschel der Gewinde*) durch ein Strahlennetz, und auf demselben Wege werden wir später auch zu den höheren linearen Systemen (Netzen, Gebüschen, Geweben) gelangen.

*) Zweigliedrige Gruppe von linearen Complexen, wie sie Plücker infolge der analytischen Darstellung nennt (Neue Geometrie des Raumes Nr. 53).

Der Strahlenbüschel (A, α) *habe mit jedem der beiden Büschel* (B', β') *und* (B'', β'') *je einen Strahl gemein* (aber nicht denselben); *wir beziehen ihn wiederum so projectiv auf dieselben, dass je der gemeinsame Strahl zu sich selbst homolog ist.* B', B'' liegen also in α, β', β'' gehen durch A. Alle Strahlen, welche je 3 homologe Strahlen a, b', b'' der 3 Büschel schneiden, erzeugen das Strahlennetz, welches *den beiden Gewinden* Γ', Γ'' gemeinsam ist, *die durch* (A, α) *und* (B', β'), *bezw.* (A, α) *und* (B'', β'') *erzeugt werden;* jedes solche Tripel giebt eine zum Netze gehörige Regelschaar $[a b' b'']$; zu allen diesen Schaaren gehören auch $B'B''$ und $\beta'\beta''$. Folglich müssen, nach dem Steiner'schen Satze, je zwei von ihnen 2 Leitgerade gemein haben, auf welche sich auch die beiden genannten Geraden stützen.

Auf $\beta'\beta''$ entstehen durch die projectiven Strahlenbüschel (B', β'), (B'', β'') zwei conjective Punktreihen und um $B'B''$ zwei conjective Ebenenbüschel. Es seien U, V die sich selbst entsprechenden Punkte jener und b'_U, b''_U die nach U gehenden Strahlen der beiden Strahlenbüschel, a_U der ihnen entsprechende Strahl von (A, α); dann zerfällt die Regelschaar $[a_U b'_U b''_U]$ in den Strahlenbüschel (U, Ua_U) und denjenigen in der Ebene $b'_U b''_U$ um den auf $B'B''$ gelegenen Spurpunkt von a_U, der V_1 heissen möge. Ebenso treffe a_V, welcher $B'V$ und $B''V$ entspricht, die $B'B''$ in U_1.

Die beiden Geraden $UU_1 \equiv u$, $VV_1 \equiv v$ sind aber gemeinsame Leitgeraden aller Regelschaaren $[ab'b'']$, oder, was dasselbe ist, gemeinsame Geraden aller Regelschaaren $(a b' b'')$. Für diese Regelschaaren sind $\beta'\beta'' \equiv UV$ und $B'B'' \equiv V_1U_1$ gemeinsame Leitgeraden, da $\beta'\beta''$ durch A geht, $B'B''$ in α liegt und also alle beide je alle 3 Strahlen a, b', b'' treffen. Wenn a die $B'B''$ in $\mathfrak{A}$, und b', b'' die $\beta'\beta''$ in $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ treffen, so ist, damit u zu $(ab'b'')$ gehöre, nachzuweisen, dass

$$A\mathfrak{B}'\mathfrak{B}''U \barwedge \mathfrak{A}B'B''U_1.$$

Es sei noch $\mathfrak{B}_0''$ der Punkt, in welchem $\beta'\beta''$ von dem Strahle von (B'', β'') getroffen wird, der dem gemeinsamen Strahle AB' der beiden andern Büschel homolog ist, und $\mathfrak{B}_0'$ der Schnitt von $\beta'\beta''$ mit dem zu AB'' homologen Strahle von (B', β'); so ist:

$$B'B''\mathfrak{A}V_1U_1 \barwedge A\mathfrak{B}_0'\mathfrak{B}'UV \barwedge \mathfrak{B}_0''A\mathfrak{B}''UV;$$

die erste dieser Punktreihen ist durch 5 Strahlen von (A, α) in $B'B''$, die beiden andern sind durch die homologen Strahlen von (B', β') und (B'', β'') in $\beta'\beta''$ eingeschnitten. Also hat man:

$$\mathfrak{A}B'B''U_1 \barwedge \mathfrak{B}'A\mathfrak{B}_0'V,$$

und:

$$U V \mathfrak{B}' \mathfrak{B}_0' \barwedge U V \mathfrak{B}'' A$$

oder:

$$U V \mathfrak{B}' \mathfrak{B}'' \barwedge U V \mathfrak{B}_0' A \barwedge V U A \mathfrak{B}_0';$$

also sind UV, $\mathfrak{B}'A$, $\mathfrak{B}''\mathfrak{B}_0'$ in Involution, und daher:

$$\mathfrak{B}' A \mathfrak{B}_0' V \barwedge A \mathfrak{B}' \mathfrak{B}'' U,$$

und also auch:

$$\mathfrak{A} B' B'' U_1 \barwedge A \mathfrak{B}' \mathfrak{B}'' U,$$

was bewiesen werden sollte.

Die Geraden u, v sind demnach die Leitgeraden des durch die 3 projectiven Strahlenbüschel (A, α), (B', β'), (B'', β'') erzeugten und den Gewinden Γ', Γ'' gemeinsamen Strahlennetzes.

101 *Wenn nun B ein beliebiger weiterer Punkt von $B'B''$ und β die Ebene ist, die ihn mit $\beta'\beta''$ verbindet, dann ist der Strahlenbüschel (B, β) durch das Strahlennetz projectiv auf (A, α) bezogen.*

In der That, jeder Strahl a von (A, α) liefert zum Netze eine Regelschaar $[ab'b'']$ und da $B'B''$, $\beta'\beta''$ zu derselben gehören, so fällt in die Ebene β eine durch B gehende Leitgerade; d. h. alle Strahlen des Netzes, welche den Strahl a von (A, α) treffen, begegnen auch einem und demselben Strahle von (B, β). Aber auch jeder Strahl dieses Büschels sendet zum Strahlennetze eine auf ihn sich stützende Regelschaar (Nr. 76), zu welcher für den Punkt B die Gerade $B'B''$ und für den Schnittpunkt mit $\beta'\beta''$ diese Gerade gehört; folglich fällt von ihr eine Leitgerade in α und geht durch A, d. h. gehört zu (A, α). Also schneiden auch alle Strahlen des Netzes, welche einen Strahl von (B, β) treffen, den nämlichen Strahl von (A, α) und diese Büschel sind infolge dessen projectiv auf einander bezogen.

Oder, wenn l eine beliebige Gerade in α ist, so wird die Regelschaar der von ihren Punkten ausgehenden Strahlen des Netzes, zu welchen $B'B''$ gehört, von β in einem durch B gehenden Kegelschnitte geschnitten; die Punktreihe auf ihm ist projectiv zu derjenigen auf l und also auch zum Büschel (A, α); der Strahlenbüschel, der sie aus B projicirt, gebildet je durch die in (B, β) befindlichen Leitgeraden der auf die verschiedenen Geraden von (A, α) sich stützenden Regelschaaren, ist also auch zu (A, α) projectiv.

Da B in α liegt und β durch A geht, so *haben (A, α) und (B, β) einen Strahl gemein,* und für die Regelschaar des Netzes, die sich auf diesen Strahl, insofern er dem einen Büschel angehört, stützt, ist er natürlich auch Leitgerade aus dem andern. *Also entspricht dieser gemeinsame Strahl sich selbst in der Projectivität zwischen den beiden Büscheln, und sie erzeugen ein Gewinde Γ, das durch das Strahlennetz $\Gamma'\Gamma''$ geht.*

Bewegt man B auf $B'B''$ und damit β um $\beta'\beta''$, so ergiebt sich der ganze Büschel von Gewinden.

Wie liegen die Strahlen der verschiedenen Büschel (B, β), welche einem und demselben Strahle a von (A, α) in den jeweiligen Projectivitäten homolog sind? Sie bilden offenbar die Leitschaar der Regelschaar derjenigen Strahlen des Netzes, welche sich auf a stützen, also selbst eine Regelschaar, für welche wir $B'B''$, $\beta'\beta''$ und den von irgend einem Punkte von a kommenden Strahl des Netzes als Leitgerade annehmen können und zu welcher a gehört.

Wenn nun g eine beliebige Gerade des Raumes ist, und a der von ihr getroffene Strahl von (A, α), so begegnet dieselbe, ausser a, noch einer zweiten Geraden aus der zu a gehörigen Regelschaar; der Punkt B, in dem diese die $B'B''$ trifft, und die Ebene β, welche sie mit $\beta'\beta''$ verbindet, giebt dann *den Strahlenbüschel (B, β), der mit (A, α) dasjenige Gewinde des Büschels erzeugt, in welchem sich die Gerade g befindet.*

Es seien zwei Gewinde Γ_1, Γ_2 gegeben.*) 102

Von jedem Punkte kommt an den Schnitt derselben ein Strahl: die Schnittlinie der beiden Nullebenen des Punktes; in jeder Ebene liegt die Verbindungslinie der beiden Nullpunkte.

Wenn für einen Punkt die beiden Nullebenen zusammenfallen, dann sendet er an beide Gewinde denselben Strahlenbüschel, der dann auch vollständig zur Schnittcongruenz gehört; es genügt, um einen Punkt als einen derartigen *„singulären Punkt“* der Congruenz erkannt zu haben, zu wissen, dass zwei verschiedene Strahlen von ihm an die Congruenz gehen.

X durchlaufe eine Ebene π, dann drehen sich seine beiden Nullebenen ξ_1, ξ_2 um die Nullpunkte P_1, P_2 dieser Ebene. Das Zusammenfallen beider Nullebenen fordert, dass sie durch P_1P_2 gehen und also einem Punkte dieser Geraden zugehören; die Nullebenen aller Punkte von P_1P_2 sowohl in Bezug auf Γ_1, als auf Γ_2 gehen durch P_1P_2, als einen Strahl beider Gewinde. Also erhalten wir um diese Gerade zwei conjective Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenen je demselben Punkte von P_1P_2 als Nullebenen zugehören, und in ihnen zwei vereinigte Ebenen.

In jeder Ebene giebt es daher zwei Punkte, welche an die Schnittcongruenz zweier Strahlengewinde einen vollständigen Strahlenbüschel, nicht blos einen einzigen Strahl senden. Sie liegen beide auf dem in der Ebene gelegenen Strahle der Congruenz.

*) Man sehe hierzu auch die S. 81 erwähnte Schrift von Silldorf.

Der Ort der singulären Punkte ist daher 2. Ordnung und wird von jedem Strahl der Congruenz zweimal getroffen.

Ein Kegelschnitt kann er nicht sein, weil sonst alle Strahlen der Congruenz in eine Ebene fielen.

Folglich besteht er aus zwei gegen einander windschiefen Geraden u und v, und diese sind also die Leitgeraden der Congruenz, die so wiederum als Strahlennetz erkannt ist.

Zeigen wir, dass auf allen Strahlen des Netzes die beiden singulären Punkte reell oder auf allen imaginär sind. Es seien x und x' zwei windschiefe Strahlen des Netzes, U und V die beiden singulären Punkte auf x; die Nullebene von U schneidet x' in V', der ebenso reell oder imaginär ist wie U. Er ist einer der beiden singulären Punkte auf x', da von ihm zwei Strahlen des Netzes, $V'U$ und x', ausgehen. Die Nullebene von V giebt auf x' den andern U'.

Die beiden Nullpunkte X_1 und X_2, auf x, einer und derselben Ebene ξ durch x (in Bezug auf Γ_1 und Γ_2) bewegen sich conjectiv auf x und U und V sind die vereinigten Punkte dieser beiden Punktreihen, also bleibt das Doppelverhältniss (UVX_1X_2) unverändert.

Es bleibt auch noch constant, wenn man zu einer zweiten Geraden x' des Netzes übergeht. Die Nullebene ξ von X_1, X_2 treffe x' in W', ebenso treffe die gemeinsame Nullebene ξ' von X_1', X_2' auf x' die x in Z; dann gehen die beiden Nullebenen von Z bezw. durch X_1', X_2' und diejenigen von W' durch X_1, X_2. Folglich ist, da ein Punktwurf mit dem Ebenenwurf der Nullebenen seiner Punkte projectiv ist, wegen des ersten Nullsystems:

$$(UVX_1Z) = (V'U'W'X_1') = (U'V'X_1'W'),$$

wegen des zweiten:

$$(UVX_2Z) = (V'U'W'X_2') = (U'V'X_2'W');$$

also:

$$(UVX_1X_2) = (U'V'X_1'X_2').$$

Aber $(U'V'X_1'X_2')$ ist auch das Doppelverhältniss der beiden Ebenen, welche x mit u und v verbinden, und der beiden Nullebenen ξ_1, ξ_2 von Z, also ist auch dieses duale Doppelverhältniss constant und von demselben Werthe.

Construirt man zu allen Ebenen je die beiden Nullpunkte in Bezug auf die Gewinde Γ_1, Γ_2 oder zu allen Punkten je die beiden Nullebenen, so erhält man entsprechende Punkte, bezw. Ebenen einer Collineation mit Axen, deren Leitstrahlen die Strahlen des Netzes sind, das den beiden Gewinden gemeinsam ist.

Dass man zu einer Collineation gelangen muss, ist unmittelbar

einzusehen; denn zwei Räume, die zu einem dritten correlativ sind, sind zu einander collinear; die gemeinsamen Strahlen beider Gewinde entsprechen als Leitstrahlen beider Nullsysteme in jedem derselben sich selbst, also auch in der Collineation.

Sind die beiden Gewinde in solcher Lage, dass diese Collineation mit Axen eine geschaart-involutorische oder eine windschiefe Involution ist und also auf jedem Strahle des gemeinsamen Netzes und um ihn Involutionen von Punkten, bezw. Ebenen, entstehen, welche als Nullpunkte oder Nullebenen zu den Ebenen durch den Strahl, den Punkten auf ihm gehören, *so sagt man von den beiden Gewinden: sie sind in Involution,**) *oder sie stützen einander.***)

Der Ebene π, von der wir ausgegangen sind, deren Nullpunkte 103
in Bezug auf Γ_1 und Γ_2 die Punkte P_1 und P_2 sind und in welche also der Strahl P_1P_2 des Strahlennetzes $\Gamma_1\Gamma_2$ fällt, *ordnet man nun einen beliebigen andern Punkt* P *dieses Strahles* P_1P_2 *zu.* Lassen wir ihn P_1 entsprechen, so ergiebt sich eine Collineation mit Axen, für welche die Strahlen des Netzes gleichfalls die Leit- oder sich selbst entsprechenden Strahlen sind, der aber ein anderer Werth des constanten Doppelverhältnisses zugehört. Bewegt sich ξ durch den Raum (ξ), so beschreibt der Nullpunkt X_1 einen correlativen Raum, X, der in dieser neuen Collineation mit Axen dem X_1 entspricht, ebenfalls einen zu (ξ) correlativen Raum (X), und da der Leitstrahl XX_1 der Collineation auch Leitstrahl des zu Γ_1 gehörigen Nullsystems (X_1, ξ) ist, so geht ξ stets durch X und die Correlation zwischen den Räumen (X) und (ξ) ist ebenfalls Nullsystem und XX_1 ein Leitstrahl desselben; d. h. *die Strahlenbüschel* (X, ξ) *beschreiben ein Gewinde* Γ, *das alle Strahlen des Netzes* $\Gamma_1\Gamma_2$ *enthält.*

Durchläuft P *die ganze Gerade* P_1P_2, *so ergiebt sich der Büschel* $\Gamma_1\Gamma_2$ *von Gewinden.*

Wenn die Leitgeraden u, v des Netzes $\Gamma_1\Gamma_2$ reell sind, so wird man, nachdem P der π als Nullpunkt zugeordnet ist, um den Nullpunkt X von ξ zu ermitteln, am einfachsten das gleiche Doppelverhältniss auf den beiden Strahlen des Netzes in π und ξ benutzen. Aber werthvoller ist eine Construction, welche die Leitgeraden umgeht. Wir ziehen P_1X_1 und construiren die Regelschaar der sie treffenden Geraden des Netzes, zu der auch P_1P_2 und X_1X_2 gehören:

*) F. Klein, Mathem. Annalen Bd. 2 S. 201.

**) Reye, Journal f. Mathematik Bd. 95 S. 334. Ich werde diese Ausdrücke beide gebrauchen. — Bisweilen wird auch von den beiden Gewinden gesagt: „sie liegen vereinigt“.

sie wird durch die projectiven Büschel der Nullebenen, in Bezug auf Γ_1 und Γ_2, der Punkte der Geraden $P_1 X_1$ gebildet. Die von P ausgehende Leitgerade dieser Schaar trifft $X_1 X_2$ im gesuchten Punkte X. Denn diese Gerade entspricht in der obigen Collineation der Geraden $X_1 P_1$, da X und X_1 in ihr einander entsprechen und beide Geraden die nämlichen in dieser Collineation sich selbst entsprechenden Geraden treffen, nämlich die der genannten Regelschaar.

Weil diese Leitgerade selbst eine Regelschaar beschreibt, die Leitschaar der vorigen, wenn P die $P_1 P_2$ durchläuft, so beschreiben P und X projective Punktreihen auf $P_1 P_2$ und $X_1 X_2$. Also:

Die Reihen der Punkte P und X, welche den festen Ebenen π und ξ in den verschiedenen Gewinden des Büschels $\Gamma_1 \Gamma_2$ als Nullpunkte zugehören, sind projectiv.

Und dual: *Die Büschel der Ebenen π und ξ, die den festen Punkten P und X als Nullebenen zugehören, sind projectiv.*

Legt man in die beiden festen Ebenen π und ξ Punkte Q und Y als Scheitel von Büscheln (Q, π) und (Y, ξ), so liefert jedes der Gewinde von $\Gamma_1 \Gamma_2$ einen Strahl in jeden dieser Strahlenbüschel, offenbar QP, YX und mit den Punktreihen der P und X werden auch diese Strahlenbüschel projectiv. Demnach:

Ein Büschel von Gewinden macht zwei beliebige Strahlenbüschel zu einander projectiv, wobei je diejenigen Strahlen homolog sind, welche zu dem nämlichen Gewinde des Büschels gehören.

Durch diese Sätze werden die Büschel von Gewinden als projectiv beziehbare Gebilde erkannt.

Als *Doppelverhältniss von 4 Gewinden eines Büschels* dürfen wir das Doppelverhältniss der 4 Nullebenen eines Punktes oder der 4 Nullpunkte einer Ebene oder der 4 Strahlen, welche die 4 Gewinde in einen Strahlenbüschel senden, bezeichnen; denn diese 3 Doppelverhältnisse sind unter einander gleich und verändern, nach den vorangehenden Sätzen, ihren Werth nicht, wenn der Punkt, die Ebene oder der Strahlenbüschel sich ändert.

104 *Durch jeden Strahl g des Raumes geht ein Gewinde des Büschels.*

Dasselbe wird durch den Strahl g und 4 beliebige Strahlen des „*Grund-Strahlennetzes*“ des Büschels bestimmt. Oder wir legen, um die jetzigen Betrachtungen zu verwerthen, durch g eine Ebene π, deren Nullpunkte in Bezug auf Γ_1 und Γ_2 wieder P_1, P_2 seien; schneidet g die $P_1 P_2$ in P, so ist das bei P sich ergebende Gewinde des Büschels dasjenige, welches den Strahl g enthält.

So zeigt sich, dass *durch das Netz keine andern Gewinde gehen, als*

die aus Γ_1 *und* Γ_2 *in der obigen Weise* (Nr. 103) *abgeleiteten, dass ein Büschel von Gewinden auch definirt werden kann als der Inbegriff aller Gewinde durch das nämliche Strahlennetz und dass die bisherigen Constituenten auch durch beliebige zwei andere Gewinde des Büschels ersetzt werden können,* da das Grund-Strahlennetz der Schnitt beliebiger zweier ist.

Jedes Strahlennetz ergiebt sich auf ∞^2 Weisen als Schnitt zweier Gewinde; auf $\infty^{2.5}$ Weisen kann man 2 Gewinde des Raumes zusammenstellen; also ist die Zahl der Strahlennetze ∞^{10-2}.

Die ∞^4 Strahlen des Raumes, die nicht einem Netze angehören, vertheilen sich, zu je ∞^3, in die verschiedenen Gewinde des Büschels.

Das Strahlennetz befindet sich ersichtlich auch in den beiden Strahlengebüschen, welche die eine oder andere von seinen Leitgeraden zu Axen haben.

In jedem Büschel von Gewinden befinden sich zwei (reelle oder imaginäre) Strahlengebüsche.

Das Doppelverhältniss zweier Gewinde und der beiden Gebüsche ihres Büschels nennt man *die Invariante der beiden Gewinde.*

Die Gebüsche von $\Gamma_1 \Gamma_2$ ergeben sich, wenn P bei seiner Bewegung auf $P_1 P_2$ (Nr. 103) in den einen oder andern Stützpunkt dieser Geraden auf die Leitgeraden u, v fällt. Nehmen wir an, in den auf u.

Für den Punkt X auf dem in der beliebigen Ebene ξ gelegenen Strahle $X_1 X_2$ des Netzes gilt dann dasselbe, denn zu der von PX beschriebenen Regelschaar gehören auch u und v. Das Nullsystem (X, ξ) entartet dann in der Nr. 54 beschriebenen Weise. Aber auch die Collineation mit Axen zwischen den Räumen Σ_1, Σ, in der X_1 und X sich entsprechen, ist ausgeartet: einem beliebigen Punkte X_1 von Σ_1 entspricht als X ein bestimmter Punkt von u, der Schnittpunkt mit der Nullebene von X_1 in Bezug auf Γ_1; einem Punkte X_1 aber auf v entspricht jeder beliebige Punkt der Ebene, die ihn mit u verbindet.

Diese Collineation mit „2 singulären Axen“ (v in Σ_1, u in Σ) läuft im Grunde auf zwei Projectivitäten hinaus: die der Ebenenbüschel um die Axen und die der zu ihnen perspectiven Punktreihen, die jeder in die andere Axe einschneidet; entsprechend sind: ein Punkt, der auf der Axe seines Raumes liegt, und jeder beliebige Punkt der mit ihm incidenten Ebene durch die andere Axe.

Die Polaren einer Geraden l in Bezug auf die verschiedenen Ge- 105
winde eines Büschels bilden eine Regelschaar, zu welcher l selbst und die

beiden Axen u, v der Gebüsche gehören; da l zu einem Gewinde gehört und in Bezug auf dieses zu sich selbst polar ist, die Polare aber von l in Bezug auf ein Gebüsche dessen Axe ist (Nr. 59). Diese Regelschaar wird erzeugt durch die projectiven Büschel der Nullebenen zweier Punkte von l oder die projectiven Punktreihen der Nullpunkte zweier Ebenen durch l.

Die Leitschaar entsteht durch die Geraden des Grund-Strahlennetzes, welche l treffen.

Trifft l eine der beiden Leitgeraden, etwa u, so zerfällt die Regelschaar in zwei Strahlenbüschel, von denen der eine allein vom Gebüsche $[u]$ herkommt; da l in Bezug auf dieses alle Strahlen des Büschels lu zu Polaren hat (Nr. 59).

106 In der allgemeinen Collineation mit Axen, zu der uns die beiden beliebigen Gewinde Γ_1, Γ_2 führen (Nr. 102), entsprechen einander je die Nullpunkte X_1, X_2 der nämlichen Ebene ξ; da aber ξ sich nicht selbst entspricht, so wird durch diese Collineation nicht Γ_1 in Γ_2 transformirt.

Die Zahl dieser Collineationen mit den nämlichen Axen u, v ist ∞^1; die Gewinde unseres Büschels kann man aber auf ∞^2 Weisen zu je zweien zusammenstellen. Also gehören zu jeder Collineation ∞^1 Paare von Gewinden; in der That, sind in ihr X_1, X_2 entsprechend, so können wir ihnen ja als gemeinsame Nullebene nach und nach jede Ebene durch den Leitstrahl X_1X_2 zuordnen.

Zu jedem Gewinde des Büschels, in welchem X_1 Nullpunkt von ξ ist, giebt es ein zweites mit X_2 als Nullpunkt von ξ, derartig, dass X_1 und X_2 entsprechende Punkte in einer bestimmten Collineation mit Axen sind, oder dass das Doppelverhältniss (UVX_1X_2) einen gegebenen Werth hat.

Insbesondere also giebt es zu jedem Gewinde des Büschels ein zweites in dem Büschel, mit dem es in Involution ist, oder auf welches es sich stützt (Nr. 102).*)

Und da diese Beziehung reciprok ist, so *bilden die Paare der Gewinde eines Büschels, welche einander stützen, im Büschel eine Involution.*

Die Paare der Nullpunkte X_1, X_2 einer festen Ebene ξ, die zu zwei gepaarten Gewinden dieser Involution gehören, bilden eine Involution mit U, V als Doppelpunkten.

Daraus folgt, dass *die beiden Gebüsche des Büschels die Doppelelemente der Involution von Gewinden ist* und also jedes sich selbst stützt.

*) Bezüglich der Gewinde in Involution vergl. man de Paolis S. 81 citirte Schrift und Caporali-Pezzo.

Ein Strahlengebüsche ist zu sich selbst in Involution.

Zwei Gewinde in Involution sind harmonisch zu den Gebüschen ihres Büschels und haben die Invariante — 1.

Die Gewinde Γ_1, Γ_2 seien in Involution; dann muss, wenn X_1, X_2 die Nullpunkte von ξ in Bezug auf sie sind, wegen ihrer Vertauschbarkeit in der windschiefen Involution, es eine Ebene ξ' durch X_1X_2 geben, so dass X_2 ihr Nullpunkt in Bezug auf Γ_1 und X_1 derjenige in Bezug auf Γ_2 ist.

Ist X_2, in Bezug auf Γ_2, der Nullpunkt der Nullebene ξ von X_1 in Bezug auf Γ_1, so ist, wenn Γ_1 und Γ_2 in Involution sind, auch X_2 Nullpunkt, in Bezug auf Γ_1, der Nullebene ξ' von X_1 in Bezug auf Γ_2.

Mithin sind ξ und ξ', die beiden Nullebenen von X_1 (oder X_2), auch entsprechend in der windschiefen Involution. Dieselbe transformirt also den Strahlenbüschel (X_1, ξ) des Gewindes Γ_1 in den Strahlenbüschel (X_2, ξ') ebenfalls dieses Gewindes.

Stützen zwei Gewinde einander, so führt die windschiefe Involution, welche sie veranlassen, jedes von ihnen in sich selbst über.

Es sei g ein Strahl von Γ_1, g' seine Polare nach Γ_2; wir legen ξ durch g, dann liegt X_1 auf g, X_2 aber auf g'; weil X_1 auf g liegt, so geht seine Nullebene in Bezug auf Γ_2 durch g', folglich ist g' ein Strahl des Büschels (X_2, ξ'), der zu Γ_1 gehört.

Die Polare jedes Strahles des einen von zwei Gewinden, die in Involution sind, in Bezug auf das andere gehört auch dem ersten an, oder: *Jedes von zwei Gewinden in Involution geht, durch das Nullsystem des andern transformirt, in sich selbst über.*

D. h., indem wir den obigen Satz nur anders aussprechen:

Der Punkt X_1 und seine Nullebene ξ in Bezug auf Γ_1 gehen, durch das Nullsystem des Gewindes Γ_2, das zu Γ_1 in Involution ist, polarisirt, über in ξ' und X_2, welche Nullebene und Nullpunkt ebenfalls in Bezug auf Γ_1 sind.

Die Polaren einer Geraden x in Bezug auf die beiden Gewinde Γ_1, Γ_2, welche in Involution sind, befinden sich mit den Leitgeraden des Netzes $\Gamma_1\Gamma_2$ — den Polaren von x nach den beiden Gebüschen des Büschels — in einer Regelschaar und sind zu ihnen harmonisch.

Denn ist ξ eine durch x gelegte Ebene, so gehen diese Polaren durch ihre Nullpunkte X_1, X_2.

Transformirt man ein Gewinde Γ_1 hingegen durch das Nullsystem eines beliebigen anderen Γ_0, so ergiebt sich ein drittes Γ_1', das zum Büschel beider gehört. 107

Oder: *Die Polaren der Strahlen eines Gewindes Γ_1, genommen in*

Bezug auf ein anderes Γ_0, bilden ein drittes Gewinde Γ_1', das mit ihnen zu demselben Büschel gehört.

Denn das polare Gebilde, in jeder Correlation, zu einem Gewinde ist ebenfalls ein Gewinde; und die gemeinsamen Strahlen von Γ_1 und Γ_0 sind zu sich selbst polar nach Γ_0.

Unmittelbar klar ist, dass Γ_1' zugleich mit Γ_1 ein Gebüsche wird; die Axen sind polar in Bezug auf Γ_0.

Bewegt man nun Γ_1 durch den Büschel $\Gamma_0\Gamma_1$, während Γ_0 fest bleibt, so entsteht durch die Paare $\Gamma_1\Gamma_1'$ eine Involution, in welcher auch die beiden Gebüsche des Büschels gepaart sind.

*Die Doppelelemente dieser Involution sind ersichtlich das Basis-Gewinde Γ_0, in Bezug auf welches „polarisirt" wird, und dasjenige Gewinde des Büschels, das sich auf Γ_0 stützt.**)

Die Zahl der Gewinde ist ∞^5; mit einem festen Gewinde Γ_0 bildet jedes andere einen Büschel; also giebt es ∞^4 Büschel von Gewinden, an denen Γ_0 theilnimmt.

Demnach giebt es auch zu jedem Gewinde ∞^4 Gewinde, die mit ihm in Involution sind.

Es ist für ein Gewinde eine einfache Bedingung, zu einem gegebenen Gewinde in Involution zu sein.

Es muss also auch in jedem Büschel eine endliche Anzahl von Gewinden geben, die sich auf ein ausserhalb des Büschels befindliches Gewinde stützen.

Wenn ein einziger nicht zu Γ_0 gehöriger Strahl von Γ_1 seine Polare nach Γ_0 in Γ_1 hat, dann ist Γ_1 zu Γ_0 in Involution.

Denn Γ_1' hat dann mit Γ_1 das Strahlennetz $\Gamma_0\Gamma_1$ und diesen Strahl gemeinsam.

Es sei $\Gamma_1\Gamma_2$ ein Büschel von Gewinden und Γ_0 nicht in demselben enthalten. Die verschiedenen Strahlen eines Büschels (X, η) vertheilen sich auf die Gewinde von $\Gamma_1\Gamma_2$, jeder Strahl in eines und nur in eines, da dieser Büschel im Allgemeinen keinen Strahl des Netzes $\Gamma_1\Gamma_2$ enthält. Die Polaren der Strahlen von (X, η) nach Γ_0 bilden ebenfalls einen Büschel (Y, ξ), der in zweierlei Weise zu (X, η) projectiv ist: in der einen Projectivität entsprechen sich je zwei nach Γ_0 polare Geraden, in der andern je zwei Strahlen, welche dem nämlichen Gewinde von $\Gamma_1\Gamma_2$ angehören. Folglich ist (Y, ξ) zu sich

*) Man beachte die Analogie mit dem (jedoch nicht linearen) System 4. Stufe der Flächen 2. Grades, die, in Bezug auf eine gegebene Fläche 2. Grades, zu sich selbst so polar sind, dass jede der beiden Geradenschaaren in sich selbst übergeht: Math. Annalen Bd. 26 S. 480, sowie del Pezzo: Rendiconti dell' Accademia di Napoli Juni 1885.

selbst conjectiv, mit zwei solchen Strahlen als homologen, welche demselben Strahle von (X, η) in diesen beiden Projectivitäten entsprechen. Der Strahl von Γ_0, der in (X, η) sich befindet, liegt auch in (Y, ξ) und ist der eine sich selbst entsprechende Strahl dieser Conjectivität im Büschel (Y, ξ). Der andere ist zu seinem entsprechenden in (X, η) polar nach Γ_0 und mit ihm in demselben Gewinde von $\Gamma_1 \Gamma_2$ enthalten.

Folglich giebt es in jedem Büschel ein Gewinde, das sich auf ein gegebenes Gewinde stützt.

Wenn es aber zwei giebt, so haben die beiden conjectiven Büschel (Y, ξ) drei sich selbst entsprechende Strahlen, und mithin sind es alle.

Wenn also zwei Gewinde Γ_1, Γ_2 eines Büschels zu einem dritten Γ_0 in Involution sind, so sind es alle Gewinde des Büschels.

Folglich ist das System 4. Stufe der Gewinde, welche sich auf ein gegebenes Gewinde stützen, linear, d. h. jeder Büschel, welcher zwei von seinen Gewinden verbindet, gehört ganz dem Systeme an.

Es sei das eine von zwei Gewinden Γ_1, Γ_2, welche in Involution sind, etwa Γ_2 ein Strahlengebüsche; die Polare eines beliebigen Strahles von Γ_1 nach Γ_2 muss also zu Γ_1 gehören; sie ist aber die Axe von Γ_2. 108

Wenn mithin ein Strahlengebüsche mit einem andern Gewinde in Involution ist, so gehört die Axe des ersteren dem letzteren an; und ersichtlich auch umgekehrt, weil die Axe des Gebüsches und irgend ein anderer Strahl des andern Gewindes polar nach dem Gebüsche sind.

Da die Axe eines Gebüsches auch ein Strahl desselben ist, so sieht man nochmals, dass jedes Gebüsche mit sich selbst in Involution ist. *Und kein anderes Gewinde als ein Gebüsche kann zu sich selbst in Involution sein*, weil bei ihm allein es möglich ist, dass ein zu ihm gehöriger Strahl eine von ihm verschiedene Polare besitzt oder vielmehr ∞^1 (Nr. 59).

Wenn zwei Gebüsche in Involution sind, so schneiden sich ihre Axen.

Der Büschel, den sie bestimmen, besteht aus lauter Gebüschen, deren Axen einen Strahlenbüschel bilden; das gemeinsame Strahlennetz besteht aus dem Strahlenfelde in der Ebene und dem Strahlenbündel aus dem Scheitel dieses Büschels.

Es ist ersichtlich, dass *jede zwei Strahlen dieses Büschels als Leitgerade des so ausgearteten Strahlennetzes angesehen werden können.*

Das Strahlengebüsche bildet (Nr. 64) den Uebergang von den rechts zu den links gewundenen linearen Complexen. 109

Folglich enthält ein Büschel von Gewinden, dessen Grundnetz reelle und verschiedene Leitgeraden hat, sowohl rechts wie links gewundene

Complexe. Sind aber die Leitgeraden conjugirt imaginär oder vereinigt, dann sind sämmtliche Complexe des Büschels in gleicher Art gewunden.

Die Grösse ϱ, *welche wir die Invariante zweier Gewinde* Γ_1, Γ_2 *genannt haben* (Nr. 104), *ersetzt man auch durch eine andere, welche durch* $\cos(\Gamma_1\Gamma_2)$ *bezeichnet wird und mit ihr durch die Beziehung:*

$$\cos(\Gamma_1\Gamma_2) = \frac{\varrho+1}{2\sqrt{\varrho}}$$

zusammenhängt; diese Grösse wird ersichtlich 0, wenn die beiden Gewinde in Involution sind; $(\Gamma_1\Gamma_2)$ selbst ist $\frac{1}{2i}\log\varrho$.

Wir wollen nun $\cos(\Gamma_1\Gamma_2)$ *durch die Parameter* k_1, k_2 *der beiden Gewinde, die kürzeste Entfernung* Δ *und den Winkel* ψ *ihrer Axen* a_1, a_2 *ausdrücken.*

Zur Bestimmung des Doppelverhältnisses ϱ bedienen wir uns der Nullpunkte der Ebene $\mathfrak{E}$, also der unendlich fernen Punkte der beiden Axen a_1, a_2 und der Leitgeraden l, l' der beiden Gebüsche des Büschels $\Gamma_1\Gamma_2$; diese 4 Geraden sind zu den Ebenen parallel, welche nach dem unendlich fernen jene Nullpunkte enthaltenden Strahle des Netzes $\Gamma_1\Gamma_2$ gehen. Also können wir sie uns, für das Doppelverhältniss, in einem Büschel (B, β) liegend denken; daher ist

$$\varrho = (ll'\,a_1a_2) = \frac{\sin la_1 \,.\, \sin(l'a_1 + a_1a_2)}{\sin l'a_1 \,.\, \sin(la_1 + a_1a_2)} = \frac{\operatorname{cotg} a_1a_2 + \operatorname{cotg} l'a_1}{\operatorname{cotg} a_1a_2 + \operatorname{cotg} la_1}.$$

Weil l, l' polar sind in Bezug auf beide Gewinde, so trifft ihr gemeinsames Loth h auch a_1 und a_2 senkrecht; die 4 Fusspunkte seien $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, A_1, A_2. Auf dieser Geraden, auf der alle fraglichen kürzesten Entfernungen liegen, nehmen wir A_2A_1 als positiven Sinn an, und in diesem Sinn auf die Ebene β des Büschels sehend, beurtheilen wir den Sinn der Winkel der 4 Linien. Der spitze Winkel a_1a_2*) im Büschel, auf diese Weise betrachtet, hat dann den nämlichen Sinn, wie, aus a_2 betrachtet, der spitze Winkel von a_1 nach einer sie schneidenden Parallelen zu a_2. Damit haben wir in $a_1a_2 = \psi$ den Winkel der beiden Axen nach der Definition von Nr. 63.

Als kürzeste Entfernung von a_1a_2 nehmen wir $\Delta = A_2A_1$, so dass sie positiv ist, und folglich ist $\Delta\sin\psi$ das Moment der beiden Axen nach Nr. 66.

Wir erhalten also:

$$\cos(\Gamma_1\Gamma_2) = \frac{2\operatorname{cotg}\psi + (\operatorname{cotg} la_1 + \operatorname{cotg} l'a_1)}{2\sqrt{[\operatorname{cotg}\psi^2 + \operatorname{cotg}\psi(\operatorname{cotg} la_1 + \operatorname{cotg} l'a_1) + \operatorname{cotg} la_1 \,.\, \operatorname{cotg} l'a_1]}}.$$

*) Beim Doppelverhältnisse kommt es auf den positiven Sinn der Strahlen nicht an, er kann daher auf a_1 und a_2 so gewählt werden, dass a_1a_2 (der Winkel zwischen den positiven Schenkeln) spitz ist.

Nun ist aber:

$$(a_1 l') \operatorname{tang} l a_1 = k_1, \quad (a_2 l') \operatorname{tang} l a_2 = k_2,$$

worin die Vorzeichen so angenommen sind, wie es in Nr. 66 erörtert wurde, also auch die Entfernungen $(a_1 l')$ und $(a_2 l')$ mit Vorzeichen behaftet sind; oder:

$$A_1 \mathfrak{B}' \operatorname{tang} l a_1 = k_1, \ (\varDelta + A_1 \mathfrak{B}') \operatorname{tang} (\psi + l a_1) = k_2.$$

Aus der zweiten ergiebt sich wegen der ersten:

$$(\varDelta + k_1 \operatorname{cotg} l a_1)(1 + \operatorname{tang} \psi \operatorname{cotg} l a_1) = k_2 (\operatorname{cotg} l a_1 - \operatorname{tang} \psi)$$

oder:

$$k_1 \operatorname{tang} \psi \operatorname{cotg} l a_1^2 + (k_1 - k_2 + \varDelta \operatorname{tang} \psi) \operatorname{cotg} l a_1 + (k_2 \operatorname{tang} \psi + \varDelta) = 0.$$

Die Gleichungen: $(a_1 l) \operatorname{tang} l' a_1 = k_1$, $(a_2 l) \operatorname{tang} l' a_2 = k_2$ führen zu derselben quadratischen Gleichung für $\operatorname{cotg} l' a_1$; also ist:

$$\operatorname{cotg} l a_1 + \operatorname{cotg} l' a_1 = \frac{k_2 - k_1 - \varDelta \operatorname{tang} \psi}{k_1 \operatorname{tang} \psi},$$

$$\operatorname{cotg} l a_1 \,.\, \operatorname{cotg} l' a_1 = \frac{k_2 \operatorname{tang} \psi + \varDelta}{k_1 \operatorname{tang} \psi}.$$

Daraus folgt:

$$\cos (\Gamma_1 \Gamma_2) = \frac{2 k_1 + (k_2 - k_1 - \varDelta \operatorname{tang} \psi)}{2 \sqrt{[k_1^2 + k_1 (k_2 - k_1 - \varDelta \operatorname{tang} \psi) + k_1 \operatorname{tang} \psi (k_2 \operatorname{tang} \psi + \varDelta)]}}$$

$$= \frac{(k_1 + k_2) \cos \psi - \varDelta \sin \psi}{2 \sqrt{k_1 k_2}};$$

oder:

$$2 \sqrt{k_1 k_2} \cos (\Gamma_1 \Gamma_2) = (k_1 + k_2) \cos \psi - \varDelta \sin \psi$$

$$= (k_1 + k_2) \cos \psi - m (a_1, a_2).$$

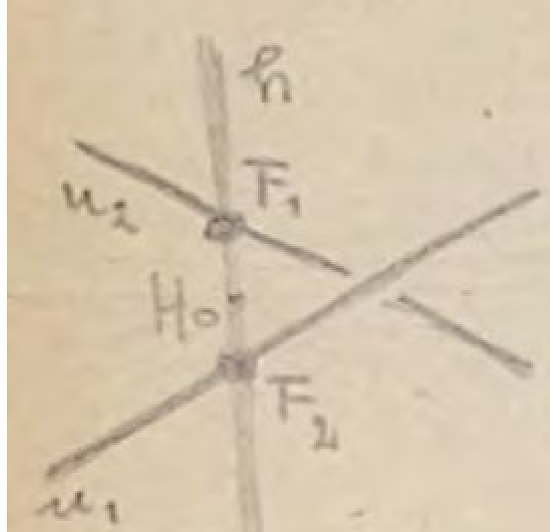
Diese Grösse $2 \sqrt{k_1 k_2} \cos (\Gamma_1 \Gamma_2)$ nennt man *das Moment der beiden Gewinde.**)

IV.

Damit wenden wir uns zur Betrachtung metrischer Eigenschaften 110
des Strahlennetzes und des Büschels von Gewinden.

Es sei $\mathfrak{h}$ der unendlich ferne Strahl eines Strahlennetzes, $\mathfrak{H}$ sein Pol nach dem absoluten Kegelschnitte (unendlich fernen Kugelkreis) $\mathfrak{K}^2$; der von $\mathfrak{H}$ kommende Strahl h des Netzes durchschneidet dann die beiden Leitgeraden des Netzes, welche wir im grösseren Theile dieses Abschnittes u_1 und u_2 nennen wollen, rechtwinklig. Dieser

*) Der Name stammt von F. Klein: Math. Annalen Bd. 2 S. 368; die obige Entwickelung gab Segre, Journal für Mathematik Bd. 99 S. 169.



Strahl möge der *Hauptstrahl* des Netzes heissen.*) Seine Schnittpunkte mit den Leitgeraden u_1, u_2 seien F_1, F_2: die *Scheitel* des Netzes. Nach den verschiedenen Punkten von $\mathfrak{h}$, den Nullpunkten der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ in Bezug auf die verschiedenen Gewinde des Büschels durch das Netz, gehen die Axen a dieser Gewinde, ihre Polaren also durch $\mathfrak{H}$. *Folglich schneidet der Hauptstrahl h die Axen aller Gewinde des Büschels rechtwinklig.*

Einem beliebigen Punkte H von h gehören in den verschiedenen Gewinden des Büschels die verschiedenen Ebenen durch h als Nullebenen zu, und der Büschel dieser Ebenen ist zu der Punktreihe auf $\mathfrak{h}$ projectiv, wobei sich eine Ebene durch h und ein Punkt von $\mathfrak{h}$ entsprechen, welche je Nullebene von H, Nullpunkt von $\mathfrak{E}$ in Bezug auf das nämliche Gewinde des Büschels sind. Zum Ebenenbüschel ist wiederum projectiv der Strahlenbüschel der Normalen, in H, zu seinen Ebenen; damit wird dieser Strahlenbüschel, dessen Ebene durch $\mathfrak{h}$ geht, projectiv zur Punktreihe auf $\mathfrak{h}$, und zwei von seinen Strahlen gehen durch die entsprechenden Punkte. Das sind dann zwei Axen, die durch H gehen; denn jede dieser beiden Geraden aus H ist senkrecht zu der Nullebene von H in Bezug auf dasjenige Gewinde des Büschels, nach dessen $\mathfrak{E}$-Nullpunkte (auf $\mathfrak{h}$) die Gerade geht.

Die Axen der Gewinde des Büschels bewirken also auf dem unendlich fernen Strahle $\mathfrak{h}$ und dem Hauptstrahle h des Grund-Strahlennetzes zwei Punktreihen in der Verwandtschaft [1, 2]: jedem Punkte von $\mathfrak{h}$ entspricht ein Punkt auf h, in dem h von der Axe des Gewindes getroffen wird, dessen $\mathfrak{E}$-Nullpunkt jener Punkt ist, jedem Punkte auf h aber entsprechen 2 Punkte auf $\mathfrak{h}$.

Demnach erzeugen die Axen der Gewinde eines Büschels eine cubische Regelfläche, für welche die Gerade h die doppelte, die $\mathfrak{h}$ aber die einfache Leitgerade ist (Nr. 39). *Auf der ersteren stehen alle Erzeugenden senkrecht.***)

Diese besondere Regelfläche 3. Grades wird, nach Cayley's Vorschlage, *Cylindroid* genannt.***)

*) Plücker nennt ihn *Axe*: Neue Geometrie S. 62 ff. in dem Paragraphen über die lineare Congruenz oder, wie Plücker sagt, „die Congruenz zweier linearer Complexe", auf welchen ich für diesen Abschnitt verweise. Hauptstrahl wurde er schon vorher von Möbius in einer interessanten Abhandlung aus dem Jahre 1862 genannt: Geometrische Entwickelung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel (Leipziger Sitzungsberichte Bd. 14 S. 1; Gesammelte Werke Bd. IV S. 569), die zu den ersten Untersuchungen über das Strahlennetz gehört und auf welche ich auch zur Vergleichung verweise.

**) Plücker, a. a. O. Nr. 86.

***) R. S. Ball, Theory of Screws (Dublin 1876) Kap. II und Titelbild; sowie

Unter den Erzeugenden dieser Fläche befinden sich auch die Leitgeraden u_1, u_2 des Netzes, weil sie die Axen der im Büschel befindlichen Gebüsche sind.

Ferner enthält die Fläche auch zwei unendlich ferne Erzeugende, die Tangenten von $\mathfrak{K}^2$ in seinen Schnitten mit $\mathfrak{h}$, welche die Axen von zwei imaginären Gewinden des Büschels sind, die je zu diesen Gewinden selbst gehören und also mit ihren Polaren zusammenfallen.

Die Ebenenpaare, welche h je mit den beiden von einem Punkte auf 111
h ausgehenden Axen verbinden, bilden eine Involution I_h.

Denn durch die Correspondenz [1, 2] zwischen h und $\mathfrak{h}$ entsteht auf $\mathfrak{h}$ durch die Paare der Punkte, die demselben Punkte auf h entsprechen, eine Involution (Nr. 21 und 39), welche aus h durch die Ebeneninvolution I_h projicirt wird.

Zu den Paaren von I_h gehört das Paar der Ebenen aus h, welche $\mathfrak{K}^2$ berühren.

Eine Involution mit einem Paar conjugirt imaginärer Elemente ist hyperbolisch; d. h. sie hat reelle Doppelebenen η_1, η_2. Denselben entsprechen *2 ausgezeichnete Punkte H_1, H_2 auf h, von denen jeder nur eine Axe aussendet: h_1, bezw. h_2.*

Sie bilden den Uebergang von den Punkten, von welchen zwei reelle Axen ausgehen, zu denen, bei welchen sie conjugirt imaginär sind.

Da nun aber vom unendlich fernen Punkte $\mathfrak{H}$ zwei imaginäre Axen ausgehen, so *kommen nur von den Punkten der endlichen Strecke $H_1 H_2$ zwei reelle Axen.*

Deshalb werden die beiden Punkte H_1, H_2 — die Cuspidalpunkte auf der Doppelgeraden h des Cylindroids — die *Grenzpunkte* des Hauptstrahles und die beiden Axen h_1, h_2 die *Grenzaxen* des Büschels genannt.

Die Scheitel F_1, F_2 liegen, wenn sie reell sind, innerhalb $H_1 H_2$.

Jede Ebene, die in einem Punkte der endlichen Strecke $H_1 H_2$ auf h senkrecht steht, schneidet zwei reelle Erzeugende aus dem Cylindroid aus; die beiden Ebenen, die in H_1 und H_2 normal sind, berühren dasselbe längs h_1, bezw. h_2 torsal und schliessen es also zwischen sich ein; sie können deshalb die *Grenzebenen* der Fläche und des Hauptstrahles genannt werden.

Die Doppelebenen η_1, η_2 der Involution I_h sind harmonisch zu jedem Paare derselben, also auch zu demjenigen, welches $\mathfrak{K}^2$ tangirt; also:

Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte (2. Aufl., Leipzig 1879, 1880) Bd. II S. 211, und Ball-Gravelius, Theoretische Mechanik starrer Systeme (Berlin 1889) Kap. III.

Die Doppelebenen η_1, η_2 *der Involution* I_h *sind rechtwinklig zu einander und halbiren deshalb die Flächenwinkel jedes anderen Paares der Involution.* Wir nennen sie die *Hauptebenen* des Hauptstrahles.

Die Involution I_h ist hyperbolisch-gleichseitig.

Auch die in den Hauptebenen gelegenen Grenzaxen h_1, h_2 *sind rechtwinklig zu einander.*

H_0 *sei der Mittelpunkt der Strecke* $F_1 F_2$ *zwischen den Scheiteln* oder, wenn wir ihn, da F_1, F_2 imaginär sein können, reell definiren wollen, der Punkt, welcher in der mit dem Netze verbundenen windschiefen Involution dem Punkte $\mathfrak{H}$ entspricht.

Die Ebene σ_0, welche in ihm senkrecht zu h ist und in der genannten Involution der Ebene $\mathfrak{E}$ entspricht, nennt Plücker die *Centralebene* des Netzes, und den Punkt H_0, der ein Symmetrie-Punkt für das Netz (und den Büschel) ist, den *Mittelpunkt* desselben.

Also hat auch die — stets reelle — Strecke $H_1 H_2$ *zwischen den Grenzpunkten den Punkt* H_0 *zur Mitte.*

Wir setzen $H_1 H_2 = 2d$, $F_1 F_2 = 2\delta$.

d ist stets reell, δ aber kann imaginär sein.

112 *Zwischen der Punktreihe auf* h *und dem Ebenenbüschel um* h *besteht ebenfalls eine Correspondenz* [1, 2]; *jedem Punkte entsprechen die beiden Ebenen, welche die von ihm ausgehenden Axen enthalten.*

Es sei r *die Entfernung eines beliebigen Punktes* H *auf* h *von einem zunächst beliebig angenommenen Anfangspunkte* O *auf* h, ω *sei der (concave) Winkel, den eine der beiden entsprechenden Ebenen mit der Hauptebene* η_1 *bildet* (von letzterer aus gemessen), oder, was dasselbe, der Winkel von der Axe h_1 nach der Axe in jener Ebene. Da nun r den Punkt, tang ω die Ebene eindeutig bestimmt, so entspricht der Correspondenz [1, 2] eine Beziehungsgleichung, die in r linear, in tang ω quadratisch ist:

$$(ar + a') \operatorname{tang} \omega^2 + (br + b') \operatorname{tang} \omega + (cr + c') = 0.$$

Nun haben je die beiden zu einem H gehörigen Ebenen die η_1 zur einen Halbirungsebene; d. h. diese in tang ω quadratische Gleichung hat, für jeden Werth von r, zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln; also $b = b' = 0$.

Es sei $OH_1 = r_1$, $OH_2 = r_2$; dann vereinigen sich für $r = r_1$ die beiden zugehörigen Ebenen in η_1, für $r = r_2$ in η_2; d. h. für $r = r_1$ und $r = r_2$ hat die Gleichung die Doppelwurzel 0, bezw. ∞, da $\eta_1 \eta_2 = \frac{\pi}{2}$. Dies fordert: $cr_1 + c' = 0$, $ar_2 + a' = 0$; also wird die Beziehungsgleichung:

$$a(r - r_2) \operatorname{tang} \omega^2 + c(r - r_1) = 0.$$

Dem Werthe $r = \infty$ entsprechen die beiden den absoluten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ berührenden Ebenen; für diese ist $\operatorname{tang} \omega = \pm i$.*) Dies giebt: $ai^2 + c = 0$ oder $c = a$; und *die Beziehungsgleichung zwischen r und ω gewinnt die Gestalt:*

$$(r - r_2) \operatorname{tang} \omega^2 + r - r_1 = 0$$

oder:

$$r = r_1 \cos \omega^2 + r_2 \sin \omega^2.$$

Legt man den Anfangspunkt O, von dem ab die Entfernungen r gemessen werden, *in den Mittelpunkt H_0*, so wird $r_2 = - r_1 = d$ und die Formel vereinfacht sich in:

$$r = - d \cos 2\omega.$$

Die beiden Werthe ω, die zu $r = 0$ gehören, sind $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$; das zugehörige Ebenenpaar ist also rechtwinklig: wir wollen es $\alpha_1 \alpha_2$ nennen. Also jedes der beiden reellen Ebenenpaare $\eta_1 \eta_2$, $\alpha_1 \alpha_2$ halbirt die Winkel des andern.

Auch die in α_1, α_2 gelegenen Axen a_1, a_2, ihre Schnitte mit der Centralebene σ_0, welche vom Mittelpunkte H_0 ausgehen, stehen auf einander senkrecht.

Plücker nennt sie die *Nebenaxen* des Netzes und die Gewinde, denen sie zugehören, die *Centralcomplexe* des Büschels.

Betrachten wir irgend eine von den Leitgeraden verschiedene 113
Axe a, also die Axe eines eigentlichen Gewindes des Büschels; sie treffe h in H. Die Geraden des Strahlennetzes, welche sie schneiden, — unter ihnen h und $\mathfrak{h}$ — schneiden sie alle rechtwinklig, weil sie auch zu demjenigen Gewinde des Büschels gehören, dessen Axe a ist.**) Folglich ist a gemeinsames Loth für irgend einen dieser Strahlen und den Hauptstrahl h.

Die Strahlen eines Netzes, welche die Axe a eines Gewindes des zugehörigen Büschels treffen, bilden die eine Regelschaar eines gleichseitigen Paraboloids.

Scheitelgeraden desselben sind der Hauptstrahl h und die Axe a, weil jede dieser beiden Geraden senkrecht zu den Leitebenen der

*) Für die gepaarten Ebenen einer rechtwinkligen Ebeneninvolution ist bekanntlich $\operatorname{tang} \omega \,.\, \operatorname{tang} \omega' = - 1$, wo ω und ω' die Winkel von irgend einer festen Ebene des Büschels bis zu ihnen sind; für jede der beiden Doppelebenen (welche $\mathfrak{K}^2$ tangiren) ist also: $\operatorname{tang} \omega^2 = - 1$.

**) Von dieser Eigenschaft einer Axe a, alle Geraden der Regelschaar $[u_1, u_2, a]$ rechtwinklig zu schneiden, ist Schoute in seiner Besprechung der Regelfläche der Axen ausgegangen (Mathematical Questions and Solutions from the „Educational Times" Bd. 52 S. 77).

andern Schaar ist; denn $\mathfrak{h}$ ist die eine unendlich ferne Gerade des Paraboloids, die andere liegt in den zu a senkrechten Ebenen.

Folglich sind jede zwei Geraden des Netzes, welche die Axe a in gleicher Entfernung vom Scheitel $H \equiv ha$ des Paraboloids treffen, gleich geneigt gegen h und diese Fläche geht durch eine halbe Rotation um h in sich selbst über und zwar jede der Geraden in eine Gerade derselben Schaar.

Mithin wird das Strahlennetz durch eine Drehung um 180° um seinen Hauptstrahl in sich selbst übergeführt.

Im Falle reeller Leitgeraden ist dies unmittelbar ersichtlich.

Da zu der cubischen Regelfläche der Axen auch die beiden Leitgeraden gehören, so *trifft jeder Strahl des Netzes nur eine Axe eines eigentlichen Gewindes des Büschels; diese ist dann für ihn und den Hauptstrahl gemeinsames Loth.*

Folglich kann man das Cylindroid auch bezeichnen als den Ort der gemeinsamen Lothe zwischen dem Hauptstrahl und den übrigen Strahlen des Netzes.

Jedes dieser Lothe gehört zu ∞^1 Strahlen des Netzes, welche die eine Regelschaar eines gleichseitigen Paraboloids bilden und daher in irgend einer zum Hauptstrahle senkrechten Ebene parallele Orthogonal-Projectionen haben.

114 Insbesondere ist es interessant, blos die ∞^1 dem Hauptstrahle unendlich nahen Strahlen des Netzes — jede der Axen führt zu einem — ins Auge zu fassen, und unter diesem Gesichtspunkte mögen die erhaltenen Ergebnisse in etwas anderer Form noch einmal ausgesprochen werden, weil sie in dieser Form, wie sich später zeigen wird, auf einen beliebigen Strahl einer beliebigen Congruenz verallgemeinbar sind.

Es seien der Hauptstrahl h eines Strahlennetzes und die ∞^1 ihm unendlich nahen Strahlen desselben betrachtet.

Zwei reelle oder imaginäre unter ihnen schneiden ihn: sie befinden sich in den Strahlenbüscheln des Netzes aus den Scheiteln F_1, F_2.

Wir wollen diese Schnitte aber jetzt die *Brennpunkte* des Hauptstrahles nennen, und die Ebenen, welche h mit diesen ihn schneidenden unendlich nahen Strahlen des Netzes verbinden, also die Ebenen der eben erwähnten Strahlenbüschel die *Brennebenen* (Focalebenen) des h. Die dem Brennpunkte $F_1 \equiv hu_1$, bezw. $F_2 \equiv hu_2$ zugehörigen Brennebenen φ_2, bezw. φ_1 gehen durch u_2, bezw. u_1.

Die gemeinsamen Lothe zwischen h und den unendlich nahen Strahlen des Netzes erzeugen durch ihre Träger eine cubische Regelfläche, für welche h doppelte Leitgerade ist. Die auf h gelegenen Fusspunkte dieser

Lothe erfüllen nur eine endliche Strecke mit den Grenzpunkten H_1, H_2. *Jeder innere Punkt derselben ist Fusspunkt für zwei Lothe, jeder der Grenzpunkte nur für eins. Die Ebenen* η_1, η_2 *durch* h, *welche die Lothe aus den Grenzpunkten enthalten, (Hauptebenen) halbiren die Winkel aller Ebenenpaare aus* h *nach zwei Lothen mit demselben Fusspunkte* H. *Die beiden Lothe, welche ihren Fusspunkt im Mittelpunkte* H_0 *der Strecke* $H_1 H_2$ *haben, sind senkrecht zu einander, ebenso wie die zugehörigen Ebenen, welche deshalb auch die Winkel von* η_1, η_2 *halbiren.*

H_0 *ist auch Mitte der Strecke zwischen den Brennpunkten und diese befinden sich, wenn sie reell sind, innerhalb* $H_1 H_2$.

Wenn r_1, r_2, r *die Entfernungen der Punkte* H_1, H_2, H *von einem beliebigen Anfangspunkte auf* h *sind und* ω *der (concave) Winkel von dem Lothe aus* H_1 *nach einem der Lothe aus* H *ist, so besteht die Gleichung:*

$$1)\qquad r = r_1 \cos \omega^2 + r_2 \sin \omega^2,$$

oder, wenn insbesondere die Entfernungen von der Mitte H_0 *von* $H_1 H_2$ *ab gemessen werden:*

$$1')\qquad r = - d \cos 2\omega,$$

wo $d = H_1 H_2$ *ist.*

Es seien ω_1, ω_2 die Winkel von h_1 nach u_1 und u_2, oder von η_1 nach den Brennebenen $\varphi_1 \equiv hu_1$, $\varphi_2 \equiv hu_2$. Von den beiden Lothen, welche ihren Fusspunkt in F_1 haben, ist das eine u_1; es gehört zu dem Strahle des Netzes in der Ebene, welche u_1 unendlich nahe an F_1 senkrecht schneidet. Das andere Loth (von der Länge 0) gehört zu dem unendlich nahen h in F_1 schneidenden Strahle und steht also in F_1 auf der Ebene $\varphi_2 \equiv hu_2$ senkrecht, in der dieser Strahl liegt; der concave Winkel von h_1 (oder η_1) nach ihm ist $\omega_2 \pm \frac{\pi}{2}$. Folglich gehören dem Werthe $r = H_0 H_1 = - \delta$ die beiden Werthe ω_1 und $\omega_2 \pm \frac{\pi}{2}$ zu; demnach ist, wegen 1'):

$$\delta = d \cos 2\omega_1, \quad \delta = d \cos (2\omega_2 \pm \pi) = - d \cos 2\omega_2;\text{*)}$$

woraus folgt:

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{\pi}{2};$$

oder ausführlicher geschrieben:

*) Für F_2 ergiebt sich, wenn man $H_0 F_2 = \delta'$ setzt:

$$\delta' = - d \cos 2\omega_2, \quad \delta' = d \cos 2\omega_1, \text{ also } \delta = \delta'$$

ist, womit nochmals erkannt ist, dass die Mitte von $H_1 H_2$ auch die von $F_1 F_2$ ist.

$$\sphericalangle(\eta_1\varphi_1) + \sphericalangle(\eta_1\,\varphi_2) = \frac{\pi}{2};$$

aber:

$$\sphericalangle(\eta_1\varphi_2) = (\eta_1\,\eta_2) - \sphericalangle(\varphi_2\,\eta_2) = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle(\varphi_2\eta_2);$$

also:

$$\sphericalangle(\eta_1\,\varphi_1) = \sphericalangle(\varphi_2\eta_2).$$

Folglich haben die beiden Brennebenen zu den Hauptebenen solche Lage, dass der Winkel von der einen Hauptebene zu der einen Brennebene in Grösse und Sinn übereinstimmt mit dem Winkel von der zweiten Brennebene zur zweiten Hauptebene. Die Brennebenen besitzen also dieselben Winkel-Halbirungsebenen α_1, α_2 (die Ebenen durch die Lothe, welche ihren Fusspunkt im Mittelpunkte H_0 haben) als die Hauptebenen.

Wir haben ferner:

$$2)\qquad \begin{cases} \cos\,\omega_1 = \sin\,\omega_2 = \sqrt{\dfrac{d+\delta}{2d}}, \\[2ex] \cos\,\omega_2 = \sin\,\omega_1 = \sqrt{\dfrac{d-\delta}{2d}}; \end{cases}$$

ist γ *der Winkel* $\varphi_1\varphi_2 = \omega_2 - \omega_1$ *der Brennebenen, so haben wir:*

$$3)\qquad \gamma = \frac{\pi}{2} - 2\,\omega_1 = 2\,\omega_2 - \frac{\pi}{2},$$

also:

$$4)\qquad \sin\gamma = \cos 2\,\omega_1 = \frac{\delta}{d}.$$

Damit sind, *für den Hauptstrahl eines Strahlennetzes,* synthetisch, die Formeln (16) in § 3, (18), (19), (20) in § 4 von Kummer's Abhandlung: „Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme"*) dargethan, welche dort, *für einen beliebigen Strahl einer beliebigen Congruenz,* analytisch abgeleitet sind. Die Verallgemeinerung erfolgt später.

115 *Die Strahlen eines Strahlennetzes, welche eine gegebene Neigung* φ *gegen den Hauptstrahl haben, erzeugen* (Nr. 8) *eine Regelfläche 4. Grades,* welche die Leitgeraden u_1, u_2 des Netzes zu doppelten Leitgeraden und einen gewissen unendlich fernen, den absoluten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ in seinen Schnitten mit $\mathfrak{h}$ berührenden Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ zur einfachen Leitcurve hat; denn die Erzeugenden sind parallel zu den Kanten eines gewissen Rotationskegels mit der Axe h, dessen unendlich ferne

*) Journal für Mathematik Bd. 57 S. 189. Von Formel 1) theilt Kummer dort mit, dass sie zuerst von W. R. Hamilton in einem in den Transactions of the Irish Academy Bd. 16 erschienenen Supplemente zu seiner Theory of systems of Rays gefunden worden ist. — Vergl. auch Bobek, Wiener Sitzungsberichte 1881 S. 885.

Curve, wie bekannt, den $\mathfrak{K}^2$ in seinen Schnitten mit $\mathfrak{h}$, der Polare des unendlich fernen Punktes von h nach $\mathfrak{K}^2$, berührt.

Die Gerade $\mathfrak{h}$ trifft u_1, u_2 und zweimal den $\mathfrak{C}^2$; also ist sie eine doppelte Erzeugende dieser Fläche; demnach ist *die Fläche von der Art VII* (Nr. 43) *und wird von den durch* $\mathfrak{h}$ *gehenden, also zu* h *senkrechten Ebenen* σ *in Kegelschnitten durchschnitten.* Da jeder Strahl des Netzes durch eine halbe Drehung um h wieder ein Strahl des Netzes wird und dabei seine Neigung gegen h behält, so haben diese Kegelschnitte ihren Mittelpunkt in $H \equiv \sigma h$.

Wir betrachten *den Kegelschnitt* (S) *in derjenigen Ebene* σ, *welche* h *in der Entfernung* $H_0 H = r$ *durchschneidet,* wollen aber die Leitgeraden u_1, u_2 zunächst reell annehmen.

Ihre sich in H schneidenden Normalprojectionen auf die Ebene σ seien u_1', u_2'; sie bilden den Winkel γ.

Auf einer Geraden g des Netzes, welche gegen h unter dem Winkel φ geneigt ist, hat die Strecke $U_1 U_2$ zwischen den Schnitten mit den Leitgeraden u_1, u_2 die feste Länge $2\delta \sec \varphi$, und *unsere Regelfläche ist also auch der Ort der Geraden, welche mit zweien ihrer Punkte* U_1, U_2 *auf den festen Geraden* u_1, u_2 *gleitet.* Der Punkt S, in dem g die Ebene σ durchbohrt, theilt $U_1 U_2$ in dem festen Verhältnisse

$$\frac{U_1 S}{U_2 S} = \frac{F_1 H}{F_2 H} = \frac{r + \delta}{r - \delta}.$$

Sind U_1', U_2' die Normalprojectionen von U_1, U_2 auf σ, so hat auch $U_1' U_2'$ die feste Länge $e = 2\delta \operatorname{tang} \varphi$ und S theilt $U_1' U_2'$ in demselben Verhältnisse.

Nach dem Satze von Proclus*) beschreibt dann S eine Ellipse, deren Mittelpunkt $H \equiv u_1' u_2'$ ist.

Die Ermittelung *der Axen* dieser Ellipse wollen wir etwas genauer besprechen. Es kommt darauf an, S als Punkt einer andern von $U_1' U_2'$ mitgenommenen Geraden zu erkennen, von welcher zwei Punkte sich auf zwei *zu einander senkrechten* Geraden bewegen, die sich ebenfalls in H schneiden.

Der Kreis C^2, welcher durch die Punkte H, U_1', U_2' geht, hat den unveränderlichen Halbmesser $e \operatorname{cosec} \gamma$; sein Mittelpunkt C aber ändert sich während der Bewegung. Wenn K ein von $U_1' U_2'$ mitgenommener Punkt dieses Kreises ist, so bleibt das gleichschenklige Dreieck $U_1' C K$ congruent, weil Schenkel und Basis ihre Länge beibehalten; also ändern

*) Chasles, Aperçu historique S. 49 der 2. Auflage (Paris 1875). — In Sohncke's Uebersetzung (Halle 1839) steht fälschlich: „auf den Seiten eines Dreiecks".

auch der Winkel $U_1'CK$ am Centrum und der Peripheriewinkel $U_1'HK$ sich nicht; d. h. aber, K bleibt auf demselben Strahl durch H.

Demnach bewegen sich alle Punkte des Kreises C^2 auf Geraden durch H.

Zieht man also durch S (in seiner augenblicklichen Lage) den Durchmesser AB dieses Kreises, so durchlaufen dessen Endpunkte die zu einander rechtwinkligen Geraden HA, HB.

Wenn nun HA_1 in Grösse, Richtung und Sinn mit AS und HB_1 mit BS übereinstimmt, dann stimmt auch A_1S mit HA und B_1S mit HB überein und S bewegt sich, nach der bekannten Construction,*) auf *der Ellipse* (S), *deren Axen in die Linien* HA *und* HB *fallen und die Längen* $2HB_1 = 2BS$, *bezw.* $2HA = 2AS$ *haben.*

Hinsichtlich der Lage der Axen zeigt die Figur, dass sie das rechtwinklige Paar in derjenigen Involution bilden, von welcher u_1', u_2' ein Paar und die Gerade HS mit der Tangente in H an C^2 ein zweites Paar bilden. Die geeignetste Lage von $U_1'U_2'$ für die Construction der Axen ist diejenige, bei der sie zu einer der Winkelhalbirenden von $u_1'u_2'$ normal und die genannte Tangente dann zu ihr parallel ist.

Wir setzen $AS = a$, $BS = b$, wobei wir annehmen wollen, dass AS die (absolut) grössere dieser beiden Strecken und positiv sei; ferner sei $U_1'S = x$, $U_2'S = y$. Dann haben wir:

$$x - y = e = 2\delta \operatorname{tang} \varphi, \quad a - b = e \operatorname{cosec} \gamma = 2d \operatorname{tang} \varphi$$

wegen 4) in Nr. 114.

Der Durchmesser $a - b$ von C^2 ist also auch dann reell, wenn u_1, u_2 und u'_1, u'_2 conjugirt imaginär sind; ist ja doch der Kreis C^2, weil bestimmt durch einen reellen Punkt und zwei conjugirt imaginäre, reell.

Ferner haben wir $x : y = r + \delta : r - \delta$; also:

$$x = \operatorname{tang} \varphi . (r + \delta), \quad y = \operatorname{tang} \varphi . (r - \delta);$$

$$ab = xy = \operatorname{tang} \varphi^2 (r^2 - \delta^2);$$

mithin sind die Halbaxen von (S):

$$a = \operatorname{tang} \varphi \left(\sqrt{d^2 - \delta^2 + r^2} + d\right),$$

$$b = \operatorname{tang} \varphi \left(\sqrt{d^2 - \delta^2 + r^2} - d\right);$$

dies b wird bei reellem δ negativ, falls $r < \delta$.

*) Steiner-Schröter's Vorlesungen über synthetische Geometrie S. 173 der 2. Aufl.

Wenn φ verändert wird, so ergiebt sich, indem man das dem neuen φ entsprechende $U_1' U_2'$ dem obigen parallel annimmt, eine Figur, die zur früheren ähnlich und ähnlich gelegen ist in Bezug auf H als Aehnlichkeitspunkt; also:

Die den verschiedenen Neigungen φ gegen den Hauptstrahl h entsprechenden Regelflächen 4. Grades werden von der nämlichen zu h senkrechten Ebene in concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen geschnitten.

Es sei nun in der Ebene σ um H als Mittelpunkt ein Kreis (ϱ) 116
construirt mit dem Halbmesser ϱ; die Strahlen des Netzes, welche ihn treffen, erzeugen gleichfalls eine Regelfläche 4. Grades ϱ^4 ebenfalls von der Art VII, welche u_1 und u_2 zu doppelten Leitgeraden und $\mathfrak{h}$ zur doppelten Erzeugenden (und zwar zu einer isolirten) hat und also von allen Ebenen durch $\mathfrak{h}$ oder senkrecht zu h in Kegelschnitten geschnitten wird. Diese Kegelschnitte haben ebenfalls den jeweiligen Spurpunkt von h zum Mittelpunkt; also sind auch für den Kegelschnitt in der unendlich fernen Ebene der unendlich ferne Punkt von h und $\mathfrak{h}$ Pol und Polare und *für den Kegel k^2*, der denselben aus irgend einem Punkte O projicirt, *dessen Kanten also zu den Erzeugenden der Regelfläche parallel sind, ist die Parallele h' durch O zu h Axe.* Und zwar ist sie die ins Innere des Kegels fallende Axe, denn in die zu ihr senkrechte Ebene durch O fällt keine reelle Kante des Kegels, weil die isolirte Erzeugende $\mathfrak{h}$ der Regelfläche mit den übrigen reellen Erzeugenden nicht im Zusammenhange steht.

Die halben Oeffnungen α und β dieses Kegels k^2 in den beiden Symmetrie-Ebenen durch diese Axe sind die grösste und kleinste Neigung, welche eine Erzeugende von ϱ^4 gegen h haben kann.

Wenn nun eine Neigung φ so beschaffen ist, dass die grosse Halbaxe der dieser Neigung in σ zugehörigen Ellipse kleiner als der Radius ϱ unseres Kreises ist, oder so, dass die kleine Halbaxe grösser ist als ϱ, dann kommt dieses φ unter den Neigungen der Erzeugenden von ϱ^4 nicht vor; also sind die Werthe von α und β gegeben durch:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\varrho}{\sqrt{d^2 - \delta^2 + r^2} - d},$$

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\varrho}{\sqrt{d^2 - \delta^2 + r^2} + d},$$

wo wir freilich in der ersten Formel den absoluten Werth des Nenners nehmen oder aber, wozu die Stetigkeit auffordert, für α auch negative Werthe zulassen müssen.

Um O sei eine Kugel mit dem Halbmesser Eins gelegt; der eine Mantel des Kegels schneidet in dieselbe eine sphärische Ellipse mit den sphärischen Halbaxen α und β ein. Ist Φ deren Inhalt, so bilden wir das Verhältniss desselben zum Inhalte $\varrho^2\pi$ des Kreises in σ; den Grenzwerth, den dasselbe erhält für unendlich kleines ϱ, nennen wir, mit Kummer*) und analog zu Gauss' Definition des Krümmungsmasses einer Fläche, *das Dichtigkeitsmass des Hauptstrahls h im Punkte H.* Auf der Grenze ist die sphärische Ellipse eine ebene geworden mit den unendlich kleinen Halbaxen:

$$\alpha = \frac{\varrho}{\sqrt{d^2 - \delta^2 + r^2} - d}, \quad \beta = \frac{\varrho}{\sqrt{d^2 - \delta^2 + r^2} + d}$$

und dem Inhalte:

$$\Phi = \alpha\beta\pi = \frac{\varrho^2\pi}{r^2 - \delta^2},$$

und *folglich ist das Dichtigkeitsmass:*

$$\frac{1}{r^2 - \delta^2},$$

also gleich dem reciproken Werthe des Products der Entfernungen des Punktes H von den beiden Brennpunkten des Hauptstrahles.

Damit ist dieser interessante Kummer'sche Satz durch rein geometrische Ueberlegungen zunächst für den Hauptstrahl eines Strahlennetzes bewiesen.

Sind die Leitgeraden imaginär, also δ^2 negativ, so ist das Dichtigkeitsmass durchweg positiv.

Wenn sie aber reell sind, so ist es positiv für Punkte H auf h, welche ausserhalb F_1F_2 liegen, negativ für die innern Punkte, unendlich gross in den Brennpunkten F_1 und F_2 selbst.

117 Es könnte als eine Beeinträchtigung der Allgemeinheit erscheinen, dass ein unendlich kleiner Kreis um H, statt mit Kummer eine beliebige unendlich kleine den Punkt H umgebende Curve, angenommen worden ist. Ich will daher noch zeigen, dass sich diese allgemeinere Annahme auf jene zurückführen lässt.

Wir wissen, dass das Strahlennetz in zwei Ebenen, welche sich in einem von seinen Strahlen schneiden, collineare Felder hervorruft, in denen dieser Strahl sich selbst entspricht, die Spuren aber jedes andern Strahles des Netzes einander entsprechen (Nr. 77). In den sich in $\mathfrak{h}$ schneidenden auf h senkrechten Ebenen entstehen also affine Felder.

*) a. a. O. § 6.

Folglich sind die Kegelschnitte, in denen ϱ^4 von diesen Ebenen geschnitten wird, alle unter sich und zum Kreise (ϱ) affin. Die Strahlen des Netzes, welche bezw. zwei conjugirte Durchmesser von (ϱ) treffen, treffen auch zwei conjugirte Durchmesser jedes dieser Kegelschnitte, also auch des unendlich fernen; die Ebenen, welche diese unendlich fernen conjugirten Durchmesser aus O projiciren und zu denen also jene Strahlen des Netzes bezw. parallel sind, sind conjugirte Ebenen des Kegels k^2, welche sich in der Axe h' schneiden.

Handelt es sich nun wieder um einen unendlich kleinen Kreis (ϱ), so schneiden diese Ebenen in die Ebene der Ellipse (α, β), welche zur Axe h' des Kegels senkrecht ist, conjugirte Durchmesser dieser Ellipse ein.

Folglich sind auch der Kreis (ϱ) und die Ellipse (α, β) entsprechende Figuren in zwei affinen Feldern: entsprechende Punkte sind ein Punkt der Ebene σ des Kreises und derjenige Punkt der Ebene von (α, β), in welchem sie von der Parallelen durch O zu dem von jenem Punkte ausgehenden Strahle des Netzes getroffen wird.

Wegen der Affinität hat ein Sector von (α, β) zu dem entsprechenden Sector von (ϱ) constantes, auch von ϱ unabhängiges Verhältniss, nämlich dasjenige $\frac{1}{r^2 - \delta^2}$ der ganzen Flächen.*)

Die Fläche F einer beliebigen unendlich kleinen den Punkt H umgebenden Curve der Ebene σ denken wir uns in unendlich schmale Kreissectoren aus H zerlegt, zu verschieden grossen unendlich kleinen Kreisen (ϱ) gehörig; die Fläche Φ der entsprechenden Figur auf der Kugel (gelegen in einer zu h' senkrechten Ebene) wird in Ellipsensectoren getheilt, welche zu verschieden grossen unendlich kleinen ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen (α, β) gehören. Also ist auch das Verhältniss $\frac{\Phi}{F}$ gleich dem constanten Verhältniss aller entsprechenden Sectoren.

Wir wenden uns dazu, einen Ausdruck für *den Parameter irgend eines Gewindes des Büschels durch* $[u_1, u_2]$ zu ermitteln. 118

Nehmen wir die Leitgeraden u_1, u_2 wiederum zunächst reell an; und behufs bequemerer Beschreibung wollen wir uns den Hauptstrahl h vertical vorstellen mit dem positiven Sinne $H_1F_1H_0F_2H_2$ nach oben; $H_0H_2 = d$ und $H_0F_2 = \delta$ sind also positiv. Alle in der Centralebene gelegenen Winkel seien positiv oder negativ, je nachdem sie, von

*) Das ist, was für unendlich schmale Sectoren die Formel (18) in § 6 bei Kummer ausspricht.

oben betrachtet, der Uhrzeigerdrehung entgegengesetzten Sinn haben oder nicht.

Von den beiden Axen a_1, a_2 in der Centralebene (Nebenaxen) sei a_1 diejenige, für welche $\sphericalangle \eta_1 a_1 = +\frac{\pi}{4}$ ist (Nr. 112); statt der Winkel ω, die, nach Kummer's Vorgange, von η_1 ab gemessen werden, wollen wir nun, mit Plücker, von a_1 (oder α_1) ab gemessene Winkel λ einführen; so dass $\lambda = \omega - \frac{\pi}{4}$.

Dadurch geht: $r = -d \cos 2\omega$ über in:

1) $$r = d \sin 2\lambda = \frac{\delta \sin 2\lambda}{\sin \gamma}.$$

Unter dem Winkel γ von u_1 nach u_2 oder besser von u_1' nach u_2' sei derjenige verstanden, welcher a_1 einschliesst; weshalb $\sphericalangle a_1 u_2' = \frac{1}{2}\gamma$ (Nr. 112).

Bei dieser Definition von γ ist γ stets positiv, wie dies auch die Formel $\delta = d \sin \gamma$ erfordert. Er ist spitz oder stumpf, je nachdem der u_1 und u_2 einschliessende Flächenwinkel $\eta_1 \eta_2$ der Hauptebenen (oder sein Schnittwinkel mit der Centralebene) positiv oder negativ ist; im letzteren Falle umschliesst der als γ zu nehmende Winkel $u_1 u_2$ den positiven und a_1 enthaltenden Flächenwinkel $\eta_1 \eta_2$.

Die Axe a des betrachteten Gewindes Γ (und ihre Projection a') bilde mit a_1 den Winkel $a_1 a = a_1 a' = \lambda$ und schneide h in der Entfernung $H_0 H = r$ vom Mittelpunkte.

Den Parameter k des Γ bestimmen wir, da er für alle Strahlen des Gewindes der nämliche ist (Nr. 64), vermittelst eines zum Netze gehörigen Strahles g, welcher a_1 trifft. Er selbst, sowie seine Projection g' schneiden a_1 rechtwinklig (Nr. 113) in der Entfernung $H_0 G = \varrho$; der Punkt $g' u_2' \equiv U_2'$ ist die Projection von $g u_2 \equiv U_2$ und $U_2' U_2 = H_0 F_2 = \delta$.

Wir führen als eine zweite Projectionsebene π die Ebene durch h ein, die zu a und a' senkrecht ist; die (Normal)-Projectionen auf sie seien mit zwei Strichen bezeichnet. Die Schnittlinie s beider Projectionsebenen (Grundlinie) ist die Senkrechte in der Centralebene im Punkte H_0 auf a'. Wir wollen uns, in der üblichen Weise der darstellenden Geometrie, die beiden Projectionsebenen durch Drehung um s vereinigt denken.*) Auf der Grundlinie liegt G''; ferner sei (U_2) die Projection von U_2, sowie von U_2' und U_2'' auf s;

$$(U_2)\, U_2'' = U_2' U_2 = \delta;$$

*) Der Leser wird ersucht, die Figur nach dieser Beschreibung zu zeichnen.

$G''U_2''$ ist g''. Die Axe a hat zur zweiten Projection den Punkt H. Weil das gemeinsame Loth p zwischen a und g zur zweiten Projectionsebene parallel ist, so bleibt sowohl die Länge desselben, als auch der rechte Winkel gp in der zweiten Projection erhalten; denn ein rechter Winkel, dessen einer Schenkel zur Projectionsschaar parallel ist, hat einen rechten Winkel zur Normalprojection auf dieselbe. Also ist p gleich dem Lothe HQ'' aus H auf g''. Da ferner a zu π normal ist, so sind der spitze Winkel φ zwischen g und a und der Winkel $g\pi$ oder gg'' complementär.

Wir haben:

$$\sphericalangle a_1 s = \frac{\pi}{2} + \lambda, \quad \sphericalangle u_2' s = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\gamma}{2} - \lambda\right), \quad \sphericalangle g' s = \lambda;$$

also:

$$G U_2' = \varrho \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}, \quad G''(U_2) = \varrho \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} \cos \lambda,$$

$$H_0 G'' = -\varrho \sin \lambda, \quad G'' G = \varrho \cos \lambda;$$

$$H_0 U_2' = \frac{\varrho}{\cos \frac{\gamma}{2}}, \quad (U_2) U_2' = \frac{\varrho}{\cos \frac{\gamma}{2}} \cos \left(\frac{\gamma}{2} - \lambda\right)$$

$$= \varrho \left(\cos \lambda + \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} \sin \lambda\right);$$

daher:

$$(U_2) U_2' - G'' G = \varrho \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} \sin \lambda.$$

Ferner ist:

$$\operatorname{tang} sg'' = \frac{\delta}{\varrho \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} \cos \lambda}, \quad G'' U_2'' = \frac{\delta}{\sin sg''};$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{cotg} gg'' = \frac{G'' U_2''}{(U_2) U_2' - G'' G} = \frac{\delta}{\varrho \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} \sin \lambda \sin sg''}.$$

Es sei L'' der Schnittpunkt hg'' (die zweite Projection eines Punktes L von g, dessen erste Projection L' der Schnitt $a'g'$ ist), so ist:

$$H_0 L'' = \delta \cdot \frac{G'' H_0}{G''(U_2)} = \delta \frac{\operatorname{tang} \lambda}{\operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}};$$

sodann ist

$$H_0 H = r = \delta \frac{\sin 2\lambda}{\sin \gamma},$$

also:

$$L'' H = \delta \left(\frac{\sin 2\lambda}{\sin \gamma} - \frac{\operatorname{tang} \lambda}{\operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}}\right) = 2\delta \frac{\cos \lambda^2 - \cos \frac{\gamma}{2}^2}{\sin \gamma} \operatorname{tang} \lambda.$$

Nun ist $\sphericalangle L''HQ'' = sg''$, also:

$$p = HQ'' = L''H \cos sg'';$$

und:

$$k = p \operatorname{tang} \varphi = \frac{L''H \,.\, \delta}{\varrho \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} \sin \lambda \operatorname{tang} s\, g''} = L''H \,.\, \operatorname{cotg} \lambda,$$

und endlich:

$$k = 2\delta \,.\, \frac{\cos \lambda^2 - \cos \frac{\gamma^2}{2}}{\sin \gamma}.$$

Um zu erkennen, ob diese Formel auch dem Vorzeichen nach richtig ist, wollen wir den Fall $0 < \lambda < \frac{1}{2}\gamma$ betrachten. Da δ und γ positiv sind, so ist nach der Formel k positiv. Die Formel für $L''H$ zeigt aber, dass H höher wie L'' liegt, d. h. dass „beim scheinbaren Schnitte“ $a'g' \equiv L'$ die a über g weggeht, und für den in a befindlichen Beobachter ist der spitze Winkel von g nach einer sie in L schneidenden Parallelen zu a — welchen Winkel zu betrachten der Beobachter nach unten sehen muss —, ebenso wie seine Projection $g'a'$ negativ, also auch der Parameter, und *deshalb lautet die Formel für den Parameter:*

2) $$k = 2\delta \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \cos \lambda^2}{\sin \gamma} = 2d\,(\cos \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \cos \lambda^2).$$

Zwei Gewinde des Büschels, deren Axen entgegengesetzt gleiche Winkel mit a_1 (oder a_2) bilden, haben also gleichen Parameter.

119 *Es seien k_1, k_2 die Parameter der Centralcomplexe,* die zu den Axen a_1, a_2 gehören, für welche $\lambda = 0, \frac{\pi}{2}$ ist; dann ist:

$$k_1 = -\delta \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = -\delta \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma}, \quad k_2 = \delta \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = \delta \frac{1 + \cos \gamma}{\sin \gamma};$$

also:

$$k_1 k_2 = -\delta^2, \quad \frac{k_1}{k_2} = -\operatorname{tang} \frac{\gamma^2}{2}.$$

Schreibt man 2) in der Form:

$$k = \delta \left(\operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} - 2\frac{\cos \lambda^2}{\sin \gamma}\right),$$

so ist, wegen

$$\frac{2}{\sin \gamma} = \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}:$$

3) $$k = k_1 \cos \lambda^2 + k_2 \sin \lambda^2 = (k_2 - k_1) \sin \lambda^2 + k_1.$$

Ferner:

$$k_1 - k_2 = -2\delta \cdot \frac{1}{\sin \gamma} = -2d;$$

also:

4) $$r = \tfrac{1}{2}(k_1 - k_2) \cos 2\omega = (k_2 - k_1) \sin \lambda \cos \lambda.$$

Aus 2) folgt:

$$k - k_1 = (k_2 - k_1)\sin\lambda^2,\quad k - k_2 = (k_1 - k_2)\cos\lambda^2;$$

daraus ergiebt sich:

$$5)\qquad r^2 + (k - k_1)(k - k_2) = 0.$$

Für die beiden Grenzaxen h_1, h_2 ist $\lambda = \pm\frac{\pi}{4}$, also:

$$k_h = \delta \operatorname{cotg}\gamma = d\cos\gamma = \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Man findet leicht, dass k_2 Maximum und k_1 Minimum der Parameter ist.

Wenn die Leitgeraden des Grundnetzes des Büschels conjugirt imaginär sind, also δ^2 und $\sin\gamma^2$ negativ sind, sind k_1 und k_2 reell.

$\frac{\delta}{\sin\gamma} = d$ ist positiv; ist nun $\sin\gamma^2 = -c^2$, so ergiebt sich, je nachdem $\cos\gamma = +\sqrt{1 + c^2}$ oder $= -\sqrt{1 + c^2}$, für k durchweg ein positiver oder durchweg ein negativer Werth.

Das Spiegelbild eines Strahlennetzes in Bezug auf seine Centralebene hat Plücker *das conjugirte Strahlennetz* genannt. Hält man die Benennungen der Punkte auf h fest, so haben dann η_1 und η_2 und die Focalebenen φ_1 und φ_2 ihre Stelle vertauscht; es geht γ in seinen Supplementwinkel über oder $\cos\gamma$ ändert sein Zeichen, das einer Ebene durch h zugehörige λ aber vermindert sich um $\frac{\pi}{2}$, infolge der Vertauschung von η_1, η_2 und der daraus sich ergebenden Vertauschung von α_1 und α_2.

Ersetzt man aber in 2) $\cos\frac{\gamma^2}{2} = \frac{1 + \cos\gamma}{2}$ durch $\frac{1 - \cos\gamma}{2}$ und $\cos\lambda$ durch $\sin\lambda$, so ändert sich nur das Zeichen von k; dasselbe gilt für r.

Indem also durch Uebergang von dem einen Netze zum conjugirten jede Axe in ihr Spiegelbild übergeht, wechselt ihr Parameter sein Zeichen, wie das ja unmittelbar klar ist, da durch die Spiegelung die Windung sich ändern muss.

Wenn blos $\cos\gamma$ durch $-\cos\gamma$ ersetzt wird, aber λ bleibt, so bleiben η_1, η_2, h_1, h_2, a_1, a_2 unverändert. Das neue Strahlennetz heisst, nach Plücker, dem gegebenen *adjungirt;* die Axen a_1 und a_2 tauschen ihre Parameter aus mit zugleich veränderten Vorzeichen: $k_1^* = -k_2$, $k_2^* = -k_1$; $k_h^* = -k_h$.

Ueberhaupt gehören zu jeder Axe des gegebenen Netzes und der zu ihr senkrechten Axe des adjungirten entgegengesetzt gleiche Parameter.

Da r von dieser Aenderung nicht beeinflusst wird, so *bleibt die cubische Regelfläche der Axen die nämliche.*

Die Leitgeraden des adjungirten Netzes sind also die zweiten Erzeugenden dieser Regelfläche, welche aus F_1 bezw. F_2 kommen und, nach Nr. 114, zu den Ebenen φ_2 bezw. φ_1 normal sind.

Spiegelt man noch das adjungirte Netz in der Centralebene, so hat man *das adjungirt-conjugirte Netz.*

120 Wird auf einer der beiden Grenzaxen, z. B. h_1, in einem der beiden Sinne vom Schnittpunkte mit dem Hauptstrahle aus der Parameter des zugehörigen Gewindes aufgetragen und dies continuirlich bei den übrigen Axen fortgesetzt, so gelangt man nach einer halben Drehung der Ebene und nachdem $H_1 H_2$ hin und zurück vom Punkte H durchlaufen ist, dazu, auf h_1 nochmals aber im entgegengesetzten Sinn den Parameter auftragen zu müssen, also muss dies, damit eine geschlossene Figur sich ergebe, fortgesetzt werden.

Folglich muss auf jeder Axe der zugehörige Parameter von H aus in beiden Sinnen aufgetragen werden.

Dies ist in Uebereinstimmung damit, dass für die Feststellung des Windungssinnes eines linearen Complexes kein bestimmter Sinn auf der Axe erforderlich ist; welches auch für den in der Axe befindlichen Beobachter der Sinn von den Füssen nach dem Kopfe ist, der Windungssinn des Complexes und seiner Schraubenlinien ist der nämliche.*)

Man erhält durch die Endpunkte der aufgetragenen Strecken eine auf dem Cylindroid verlaufende Raumcurve, welche nach Plücker *die charakteristische Curve des Strahlennetzes* heisst.

Sie ist ersichtlich eine Raumcurve *6. Ordnung,* denn *sie hat auf dem Hauptstrahle h zwei* (reelle oder imaginäre) *vierfache Punkte F_1, F_2* und in jeder Ebene durch h nur noch die Endpunkte der beiden Strecken der einzigen in ihr befindlichen Axe. Jede Kante des Cylinders, der sie aus dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{H}$ von h projicirt und h zur vierfachen Kante hat, schneidet das Cylindroid nur in $\mathfrak{H}$ doppelt und im projicirten Punkte der Curve; der noch fehlende Restschnitt 4. Ordnung besteht aus den beiden unendlich fernen Erzeugenden dieser Fläche, welche dem Kegel doppelt angehören.

*) Eine Schraube selbst inducirt noch nicht einen Sinn auf der Axe, erst eine Schrauben*bewegung.* — Wenn daher Plücker (Neue Geometrie S. 98) sagt, dass die Parameter „mit Berücksichtigung ihres Vorzeichens" aufgetragen werden müssen, so ist das nicht richtig; er würde von der Curve Fig. 7 S. 99 nur die Hälfte erhalten, wie er dies übrigens auf S. 101 selbst bemerkt.

Wenn a die unendlich nahe Axe an u_1 ist und A', A'' die Endpunkte auf ihr, deren Entfernung von h unendlich klein ist, so sind $F_1 A'$, $F_1 A''$ die beiden Tangenten in F_1 an die Curve; beide liegen in der Ebene ha oder auf der Grenze in $hu_1 \equiv \varphi_1$.

Je zwei von den vier Tangentialebenen des Cylinders längs der Kante h sind zusammengefallen oder der Cylinder geht zwei Selbstberührungen längs dieser Kante ein.

Der Schnitt desselben mit der Centralebene oder die Projection der charakteristischen Curve auf dieselbe ist eine Curve 6. Ordnung, welche im Punkte H_0 zwei (reelle oder imaginäre) Selbstberührungen hat mit den Tangenten u_1', u_2'.*)

Die zu zwei conjugirten Strahlennetzen gehörigen charakteristischen Raumcurven sind verschieden, aber ihre Projectionen auf der Centralebene sind identisch. Plücker nimmt beide Raumcurven nur halb und ungeschlossen; dann geben die beiden Projectionen zusammen die ganze Curve 6. Ordnung.

V.

Mit jedem Strahlennetze ist ein gleichseitiges hyperbolisches Para- 121
boloid verbunden. Dasselbe wird durch die Ebenen eingehüllt, welche auf den Strahlen g des Netzes je in der Mitte G zwischen den Schnitten U, V mit den Leitgeraden, die nun wieder u, v heissen mögen, *senkrecht stehen.*

Sagen wir von diesen Ebenen kurz, dass sie die Strahlen des Netzes halbiren.

Wenn eine Ebene einen Büschel durchläuft, so beschreibt der unendlich ferne Punkt der jeweiligen Normalen zu ihr eine projective Punktreihe, der Strahl des Netzes, der aus ihm kommt und also zu der Ebene senkrecht ist, die eine Regelschaar eines Paraboloids, welche in die Centralebene eine zu ihr und zum Ebenenbüschel projective Punktreihe einschneidet; also gehen 2 Ebenen des Büschels durch die entsprechenden Punkte dieser Punktreihe, d. i. durch die Mitten der auf ihnen normalen Strahlen des Netzes.

Oder: Die Spiegelbilder der einen Leitgeraden u des Netzes in allen Ebenen des Büschels bilden die eine Regelschaar eines einmanteligen Rotationshyperboloids, dessen andere Regelschaar durch die

*) Die Formel 3) in Nr. 119 mit k und λ als Polarcoordinaten ist die Polargleichung dieser Curve; durch Multiplication mit k^2 ergiebt sich die auf die beiden Axen a_1, a_2 in der Centralebene bezogene Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^3 = (k_1 x^2 + k_2 y^2)^2.$$

Drehung von u um die Axe des Büschels entsteht. Da zwei Gerade von jener der zweiten Leitgeraden v begegnen, so giebt es 2 Ebenen im Büschel, in Bezug auf welche ein gewisser Punkt von v zu einem auf u symmetrisch ist.

Demnach ist die untersuchte Fläche 2. Klasse.

Wir wollen die Leitgeraden u, v zunächst wiederum reell annehmen. Es sei μ die zum Strahle g gehörige Ebene, und M der Punkt, in dem sie von der Schnittlinie der beiden Ebenen durchbohrt wird, welche in U, V auf u, v senkrecht stehen. Dann sind die Lothe MU, MV auf u und v einander gleich, und M ist ein Punkt des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids, dessen Punkte von u und v gleichweit entfernt sind.*)

Wenn M' ein beliebiger anderer Punkt des Schnittes von μ mit diesem Paraboloide ist, so sind $M'U$ und $M'V$ gleich, weil M' in μ liegt, die Lothe $M'U'$ und $M'V'$ auf u, v aber, weil M' dem Paraboloide angehört; also sind die rechtwinkligen Dreiecke $M'UU'$ und $M'VV'$ congruent und UU' und VV' gleich; folglich hat MM' gleiche Normalprojectionen auf u und v und ist daher gegen diese beiden Geraden gleich geneigt. Ist nun M'' ein dritter Punkt auf MM' mit den Lothen $M''U''$, $M''V''$, so ist $M''U = M''V$, $UU'' = VV''$, also $M''UU'' \simeq M''VV''$ und $M''U'' = M''V''$.

Folglich wird μ von dem Paraboloide in zwei durch M gehenden Geraden geschnitten und ist Berührungsebene desselben in M.

Die Fläche, welche von den Ebenen eingehüllt wird, die auf den Strahlen eines Netzes [u, v] in den Mitten der Strecken UV zwischen den Leitgeraden senkrecht stehen, ist das gleichseitige hyperbolische Paraboloid, dessen Punkte von u und v gleiche Entfernungen haben.

Der Berührungspunkt jeder der einhüllenden Ebenen ist die Spur der Schnittlinie der beiden Ebenen, welche in U und V auf den Leitgeraden normal sind.

Die beiden Geraden, in denen sie das Paraboloid schneidet, sind je gleich geneigt gegen u und v.

Jede Gerade g des Paraboloids hat gleiche Neigung gegen u und v, jeder Punkt auf ihr gleiche Entfernung von u und v, also sind auch die kürzesten Entfernungen zwischen g und u, bezw. g und v von gleicher Länge; d. h. u, v liegen auf einem Drehungshyperboloide, das g zur Axe hat.

*) Schönflies, Synth. geometrische Untersuchungen über Flächen 2. Grades, Dissertation Berlin 1877; Schröter, Journal f. Mathematik Bd. 85 S. 26; Theorie der Oberflächen 2. Ordnung § 30.

Umgekehrt die Axe jedes Drehungshyperboloids, das durch u und v geht, muss auf dem Paraboloide liegen, weil eben ihre Punkte gleiche Entfernung von u und v haben.

Also gehen durch u und v 2 einfach unendliche Systeme von Rotationshyperboloiden, deren Axen die beiden Schaaren unseres Paraboloids bilden.

Ferner weil eine Gerade g des Paraboloids gegen u und v und also auch gegen die Projectionen u' und v' gleich geneigt, so ist sie parallel zu einer der beiden Ebenen, welche die Winkel $u'v'$ senkrecht halbiren, oder welche die Winkel (hu, hv) halbiren.

Folglich sind die Halbirungsebenen der Winkel der Brennebenen hu, hv die Leitebenen der beiden Schaaren des Paraboloids und ihre unendlich fernen Geraden gehören demselben an.

Die beiden in die genannten Halbirungsebenen selbst fallenden Geraden sind die beiden Axen a_1, a_2, welche vom Mittelpunkt des Netzes ausgehen, die Nebenaxen des Netzes (Nr. 112). Alle Geraden des Netzes, welche eine von denselben treffen, schneiden sie rechtwinklig, weil sie Axe ist (Nr. 113), und ihre Strecken UV werden durch sie halbirt, da sie in der Centralebene liegt. Die zu ihnen senkrechten Ebenen μ durch diese Mitten gehen also alle durch diese Axe.

Die beiden Nebenaxen a_1, a_2 sind die Scheitelgeraden des Paraboloids, h ist seine Axe und der Mittelpunkt des Netzes sein Scheitel; a_1, a_2 werden von den Mittelpunkten der oben erwähnten Rotationshyperboloide erfüllt.

Die Hauptebenen η_1, η_2, welche die Winkel dieser Leitebenen $\alpha_1 \equiv ha_1$, $\alpha_2 \equiv ha_2$ halbiren (Nr. 112), sind daher die Symmetrie- oder Hauptebenen des Paraboloids.*)

Werden die beiden Leitgeraden u, v *imaginär*, dann bleibt die jetzige Erzeugungsweise der Fläche doch reell, denn jeder reelle Strahl des Netzes hat eine reelle Mitte.

Die beiden Halbirungsebenen der Winkel $h(u, v)$ sind ebenfalls reell; also sind alle 4 ausgezeichneten Geraden reell und *die Fläche ist ebenfalls ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid.*

Schröter hat an beiden Orten gezeigt, dass es ∞^1 Paare von 122
Geraden giebt, von denen die Punkte eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids je gleiche Entfernungen haben, und wie man sie erhält. Wir haben also, unserer Betrachtung entsprechend, zu zeigen, dass

*) Man vergleiche die in gewisser Weise hierzu duale Schröter'sche Darstellung.

es ∞^1 *Strahlennetze giebt, zu denen das nämliche Paraboloid gehört, wie zu* $[u, v]$.

Dies wird auch dadurch gefordert, dass es ∞^8 Strahlennetze und nur ∞^7 gleichseitige hyperbolische Paraboloide giebt.

Die Leitgeraden aller dieser Netze sind die Axen der Gewinde des Büschels durch $[u, v]$.

Die Leitgeraden u, v des gegebenen Netzes gehören ja auch zu diesen Axen; sie treffen den Hauptstrahl h in zwei gleichweit vom Mittelpunkte H_0 entfernten Punkten und befinden sich in zwei Ebenen durch h, welche dieselben Halbirungsebenen ihrer Winkel haben, als die Hauptebenen η_1, η_2.

Wir nehmen *zwei andere Axen* u_1, v_1, *welche ebenfalls* h *in gleicher absoluter Entfernung* δ_1 *von* H_0 *treffen und in Ebenen durch* h *gelegen sind, die auch* α_1, α_2 *zu Halbirungsebenen ihrer Winkel haben* und daher in demselben rechten Winkel (η_1, η_2) und zwar so liegen, dass

$$\sphericalangle(\eta_1, hu_1) = \sphericalangle(hv_1, \eta_2).$$

Wenn γ_1 der a_1 einschliessende Winkel (hu_1, hv_1) ist, also $\sphericalangle(a_1, hv_1) = \frac{1}{2}\gamma_1$, so ist, nach Formel 1) in Nr. 118:

$$\delta_1 = d \sin \gamma_1.$$

Auf diese Weise ist jeder Axe eines Gewindes des Büschels durch $[u, v]$ *eindeutig und involutorisch eine zweite zugeordnet, und wir erhalten so auf dem Cylindroide* (Nr. 110) *eine Involution.* In derselben sind gepaart: die Leitgeraden u, v des gegebenen Netzes, die beiden unendlich fernen (imaginären) Axen, die beiden zu einander rechtwinkligen Grenzaxen h_1, h_2 aus den Grenzpunkten H_1, H_2, die beiden andern Axen, welche aus den zwei Punkten von h kommen, in denen diese Gerade von zwei gepaarten Axen getroffen wird, und endlich ist jede von den beiden Axen a_1, a_2 aus dem Mittelpunkte H_0 zu sich selbst gepaart, also ein Doppelstrahl der Involution.

Daher ist die Involution hyperbolisch und hat auch Paare von conjugirt imaginären Geraden.

Auf der unicursalen Schnittcurve der cubischen Regelfläche mit einer Ebene entsteht durch die Spuren gepaarter Axen eine Involution. Die Verbindungslinien gepaarter Punkte umhüllen also einen Kegelschnitt, die Directionscurve derselben (Nr. 23).

Folglich erzeugen alle Geraden, welche zwei gepaarte Geraden der Involution auf dem Cylindroide zugleich treffen, einen Complex 2. Grades A^2, *zu welchem das Strahlenfeld in der unendlich fernen Ebene, sowie der Bündel der Parallelstrahlen zum Hauptstrahle* h *vollständig gehören,* wegen

der beiden unendlich fernen gepaarten Strahlen. Für einen unendlich fernen Punkt zerfällt der Complexkegel in zwei Strahlenbüschel, von denen nur der eine ins Endliche kommt.

Die Strahlen also, welche von einem beliebigen unendlich fernen Punkte nach irgend zwei gepaarten Axen u_1, v_1 unserer Involution kommen, oder die von ihm kommenden Strahlen der verschiedenen Netze, welche je diese u_1, v_1 zu Leitgeraden haben, bilden einen Strahlenbüschel.

Weil u_1, v_1 den h in gleicher Entfernung von H_0 treffen und die Winkel der Ebenen hu_1, hv_1 durch α_1, α_2 halbirt werden, so haben die Paraboloide, welche zu den verschiedenen Netzen $[u_1, v_1]$ gehören, ihre Scheitelgeraden a_1, a_2 und die unendlich fernen Geraden (in α_1, α_2) gemeinsam.

Für den Nachweis der Identität genügt es daher zu zeigen, dass auch noch irgend eine Berührungsebene (welche durch keine von diesen 4 Geraden geht) gemeinsam ist. Wenn irgend eine Ebene μ auf den zu ihr senkrechten Strahlen zweier Netze die Strecken zwischen den Leitgeraden halbirt, so geht sie durch zwei Punkte des Schnittes der Centralebene mit dem Strahlenbüschel aus dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{M}$ in senkrechter Richtung zu μ, also durch die ganze Schnittlinie und halbirt auch auf jedem der übrigen Strahlen des Büschels je die Strecke zwischen den Leitgeraden des Netzes, zu dem sie gehört, senkrecht; eine solche Ebene ist dann eine allen Paraboloiden gemeinsame Berührungsebene.

Betrachten wir das gegebene Netz $[u, v]$ und dasjenige, welches 123
die Grenzaxen h_1, h_2 zu Leitgeraden hat. Der jetzigen Bezeichnung der Leitgeraden durch u, v entsprechend, bezeichnen wir die Punkte F_1, F_2, die Ebenen φ_1, φ_2, die Winkel ω_1, ω_2 durch F_u, F_v, φ_u, φ_v, ω_u, ω_v. Wir haben dann: $F_u H_0 = H_0 F_v = \delta$; $\sin\gamma = \frac{\delta}{d}$, wo $\sphericalangle\gamma = (u, v)$; ferner: $\sphericalangle(\eta_1, \varphi_u) = (\varphi_v, \eta_2) = (h_1, u) = (v, h_2) = \omega_u$ und $\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\omega_u$ (Nr. 114).

Den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{M}$ legt man am besten in eine der beiden Hauptebenen η_1. Jede Ebene, deren Normalen nach $\mathfrak{M}$ gehen, ist dann senkrecht auf η_1 und ihre Spur in der Centralebene σ_0 senkrecht auf der Spur $h' \equiv \eta_1\sigma_0$, welche zugleich Projection von h und h_1 aus $\mathfrak{M}$ auf σ_0 ist; und umgekehrt durch jede Gerade der Centralebene, welche zu h' normal ist, geht eine zur Richtung nach $\mathfrak{M}$ senkrechte Ebene.

Die Spuren, in der Centralebene, der beiden Strahlen, die aus $\mathfrak{M}$

zu den Netzen $[h_1, h_2]$ und $[u, v]$ kommen, sind die Schnitte der Projectionen h', h_2'; u', v' der Leitgeraden aus $\mathfrak{M}$ auf σ_0.*) Nun ist h_2 senkrecht zu h_1; weil aber beide parallel zu σ_0 sind, so bleibt ihr rechter Winkel bei der Parallelprojection erhalten; also hat man, da die Normalität der Verbindungslinie der Punkte $h'h_2'$ und $u'v'$ zu h' darzuthun ist, nur zu zeigen, dass $u'v'$ auf h_2' liegt. Auch die Winkel $h_1 u$ und $h_1 v$ bleiben bei der Parallelprojection aus $\mathfrak{M}$ erhalten, so dass $\sphericalangle h'u' = \omega_u$, $\sphericalangle h'v' = \omega_v = \frac{\pi}{2} - \omega_u$. Endlich bleiben auch die Theilverhältnisse auf h erhalten; also

$$H_0 F_v' = H_0 H_2' \sin\gamma = d' \sin\gamma = d' \cos 2\omega_u.$$

Die Abschnitte nun, welche u' und v' auf h_2' machen, von H_2' ab, sind

$$(H_0 H_2' + F_u' H_0) \operatorname{tg} \omega_u = d' (1 + \cos 2\omega_u) \operatorname{tg} \omega_u$$

und

$$(H_0 H_2' - H_0 F_v') \operatorname{tg} \omega_v = d' (1 - \cos 2\omega_u) \operatorname{cotg} \omega_u.$$

Diese beiden Grössen sind aber einander gleich, so dass u' und v' die h_2' in demselben Punkte schneiden.

Folglich ist h_2' in σ_0 die Spur der Ebene des Büschels der Strahlen, die aus $\mathfrak{M}$ an die verschiedenen Netze kommen, und die Ebene μ durch h_2', die zu diesen Strahlen senkrecht ist, ist gemeinsame Berührungsebene aller Paraboloide.

*Mit dem gegebenen Strahlennetze $[u, v]$ haben das gleichseitige hyperbolische Paraboloid der senkrecht halbirenden Ebenen gemeinsam alle die Netze, deren Leitgeraden gepaart sind in derjenigen Involution J' in der Schaar der Erzeugenden des Cylindroids der Axen der Gewinde durch $[u, v]$, welche durch das Paar uv und das Paar der Grenzaxen bestimmt ist oder welche die beiden Scheitelgeraden a_1, a_2 des Paraboloids zu Doppelstrahlen hat.***)

Alle diese Netze haben die Strahlen h und $\mathfrak{h}$ gemein.

Das adjungirte Netz eines jeden von ihnen befindet sich auch unter ihnen (Nr. 119).

Zu allen diesen Netzen gehört dieselbe cubische Regelfläche der Axen, welche von den den verschiedenen Netzen zugehörigen charakteristischen Curven überzogen wird.

*) Hier bezeichnen also die Striche die *schrägen* Projectionen auf σ_0 aus $\mathfrak{M}$.

**) Die gepaarten Geraden dieser Involution liegen nicht in gepaarten Ebenen der Involution J_h (Nr. 111); vielmehr sind diese Involution J_h und diejenige, welche unsere Involution J' aus h projicirt, so beschaffen, dass die Doppelebenen η_1, η_2, bezw. α_1, α_2 der einen ein Paar in der andern bilden; sie sind „harmonisch".

Aus jedem von ihnen ergeben sich in gleicher Weise die nämlichen Grenzaxen und Nebenaxen und überhaupt die ganze Involution J′ und das System der andern Netze.

Die Figur (Cylindroid mit seiner Involution und Paraboloid) ist bestimmt, sobald h gegeben ist und auf ihr H_0, H_1 und durch sie η_1, so dass wir ∞^7 derartige Figuren haben, womit dann die achtfache Unendlichkeit der Strahlennetze von neuem erkannt ist.

Der Ort aller der zu derselben Figur gehörigen Strahlennetze ist der oben gefundene Complex 2. Grades A^2, und je zwei von den Netzen senden also in einen gegebenen Strahlenbüschel einen Strahl.

Aber die Strahlen dieses Complexes haben zu den Geraden eines Paares der Involution, z. B. zu u, v, noch eine einfache Beziehung. Es sei u_1, v_1 wieder ein beliebiges anderes Paar; die Ebene α_1 halbirt beide Winkel (hu_1, hv_1) und (hu, hv); also haben (Nr. 118) von den Gewinden durch $[u_1, v_1]$ diejenigen, welche u und v zu Axen haben, gleichen Parameter. Nennt man auch bei *zwei Geraden* g und u das Product aus ihrer kürzesten Entfernung in die Tangente ihres spitzen Winkels ihren *Parameter*,*) so haben alle Strahlen des den beiden genannten Gewinden gemeinsamen Netzes, d. i. des Netzes $[u_1, v_1]$, gleichen Parameter mit u und v.

Alle Strahlen des Complexes A^2 *haben also gleichen Parameter mit u und v, und ebenso auch mit je zwei Geraden, die in der Involution J′ gepaart sind.*

Jede Congruenz führt in Bezug auf einen gegebenen Punkt zu 124
einer Fusspunkte-Fläche, d. h. zum Orte der Fusspunkte der aus dem Punkte auf ihre Strahlen gefällten Lothe, so auch ein Strahlennetz.

Die Curve der Fusspunkte aus O auf die Geraden einer Regelschaar ist eine Raumcurve 4. Ordnung 2. Art, welche den Geraden der Schaar selbst je einmal, denen der Leitschaar je dreimal begegnet.

Ist nämlich l eine Gerade der letzteren Schaar, so umhüllen die Ebenen, welche in ihren Punkten auf der jeweiligen Verbindungslinie mit O normal sind, einen parabolischen Cylinder, welcher mit der Trägerfläche beider Schaaren, ausser seiner durch l gehenden Berührungsebene längs der Scheitelkante, noch 3 Tangentialebenen gemein hat; die Schnitte derselben mit l sind die 3 Fusspunkte auf dieser Geraden.

*) Eine Vertauschung der beiden Geraden ändert das Vorzeichen des Parameters nicht: ob der Beobachter sich in u befindet und den spitzen Winkel *von* g nach einer sie schneidenden Parallelen zu u betrachtet oder ob er sich in g befindet und den spitzen Winkel *von* u nach einer sie schneidenden Parallelen zu g betrachtet, beidemal hat der Winkel denselben Sinn (Nr. 63).

Wird nun die Regelschaar durch die sich auf l stützenden Geraden des Strahlennetzes gebildet, so folgt aus diesem Ergebnisse, dass *die Fusspunkte-Fläche eines Strahlennetzes von der 3. Ordnung ist.**) *Auf ihr liegen die beiden Leitgeraden des Netzes, der unendlich ferne Strahl* $\mathfrak{h}$ *und noch 4 andere stets imaginäre Strahlen desselben.* Die letzteren treffen den absoluten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ so, dass die Verbindungsebene mit O diese Curve berührt. Bei diesen 5 auf der Fusspunkte-Fläche gelegenen Strahlen des Netzes ist jeder beliebige von ihren Punkten Fusspunkt.

Die weitere Untersuchung dieser Fläche 3. Ordnung, welche durch den absoluten Kegelschnitt geht und, je nachdem das Strahlennetz reelle oder conjugirt imaginäre Leitgeraden hat, 7 reelle Geraden, 4 punktirte Geraden (imaginäre Geraden 1. Art nach Staudt) und 16 imaginäre (imaginäre Geraden 2. Art) — die eine reelle $\mathfrak{h}$ wird von den übrigen reellen und den 4 punktirten geschnitten — oder 3 reelle, 12 punktirte und 12 imaginäre Geraden hat,**) überlassen wir dem Leser.

125 Wir wenden uns nun noch zur Besprechung einiger besonderer Fälle, in denen die cubische Regelfläche der Axen der Gewinde eines Büschels *ausartet.*

Wenn die Treffgerade eines Gebüsches den absoluten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ schneidet, dann hat das Gebüsche nicht blos diese Treffgerade zur Axe, sondern jeden Strahl des Büschels, der durch sie und die Tangente an $\mathfrak{K}^2$ im Treffpunkte bestimmt wird (Nr. 61).

Wenn also die eine Leitgerade des Grund-Strahlennetzes eines Büschels von Gewinden den $\mathfrak{K}^2$ *trifft,* so sondert sich von der cubischen Regelfläche der Axen ein Strahlenbüschel ab und es bleibt, als Erzeugniss der Axen der übrigen Gewinde des Büschels, eine Regelschaar; treffen beide Leitgeraden den $\mathfrak{K}^2$, so bleibt nur ein Strahlenbüschel für die Axen der übrigen Gewinde.

Letzteres tritt auch ein, wenn *die beiden Leitgeraden einander schneiden;* denn dann besteht (Nr. 108) der Gewinde-Büschel aus lauter Gebüschen, deren Axen den Strahlenbüschel der beiden Leitgeraden bilden. Zwei von ihnen treffen $\mathfrak{K}^2$.

Liegt die eine Leitgerade v eines Strahlennetzes im Unendlichen, so liefert das Gebüsche des Büschels, für welches diese Gerade die Treffgerade ist, allein ∞^2 Axen (Nr. 61). Für die übrigen Gewinde des

*) Bei einer Congruenz m^{ter} Ordnung n^{ter} Klasse ist sie $(2m + n)^{ter}$ Ordnung.

**) Vergleiche meine Synthetischen Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung Kapitel VII, insbesondere Nr. 94 und 95.

Büschels ist der Schnittpunkt der $\mathfrak{E}$ mit der endlichen Leitgeraden u gemeinsamer $\mathfrak{E}$-Nullpunkt; *die Axen derselben bilden den Parallelstrahlen-Büschel*, welcher aus diesem Punkte die Gerade des Netzes projicirt, die sich in irgend einer zur Richtung nach $u\mathfrak{E}$ senkrechten Ebene befindet.

Wenn die unendlich ferne Leitgerade v den Ebenen gemeinsam ist, welche zur andern Leitgeraden u normal sind, dann ist diese letztere Axe für alle Gewinde des Büschels.

Und umgekehrt, alle Gewinde, welche eine und dieselbe Gerade zur Axe haben, bilden einen Büschel. Das Gebüsche der Geraden, welche zu dieser Geraden rechtwinklig sind, entspricht dem Parameterwerth ∞ in Bezug auf die Axe.

Die linearen Systeme zweiter und dritter Stufe (Netz und Gebüsche) von Strahlengewinden.*)

I.

Drei Complexe bezw. vom Grade m, n, p haben (Nr. 35) eine 126
Regelfläche vom Grade $2mnp$ gemein, also *durchschneiden sich 3 Strahlengewinde Γ_1, Γ_2, Γ_3 in einer Regelschaar G.* In der That, es giebt 2 Strahlen, welche eine beliebige Gerade und ihre Polaren nach den 3 Gewinden zugleich treffen.

Die Regelschaar ist auch dem Strahlennetze, in dem sich zwei der 3 Gewinde durchschneiden, und dem dritten Gewinde gemeinsam; also befindet sie sich auch in allen ∞^1 Strahlennetzen, in denen eins der 3 Gewinde mit einem Gewinde aus dem Büschel der beiden andern sich durchschneidet, und in allen ∞^2 Gewinden, welche durch diese Netze gehen.

Die Leitgeraden dieser ∞^1 Strahlennetze, oder, was dasselbe ist, die Leitgeraden der Strahlengebüsche, welche sich unter diesen ∞^2 Gewinden befinden, bilden die Leitschaar L der Regelschaar G.

*) In Bezug auf die linearen Systeme von Gewinden sehe man: d'Ovidio, Annali di Matematica Ser. II Bd. 7 S. 25; Atti dell' Accademia dei Lincei Ser. II Bd. 3, drei Aufsätze: Alcune proprietà metriche dei complessi e delle congruenze lineari in geometria projettiva; Sulle reti di complessi lineari nella geometria metrico-projettiva; Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella geometria metrico-projettiva; Reye, G. d. L. II S. 275; de Paolis, Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari, Memorie dell' Accademia dei Lincei Ser. IV Bd. 1; Caporali-del Pezzo a. a. O.; Schoute a. in Nr. 65 a. O.

Dass die gemeinsamen Strahlen der 3 Gewinde eine Regelschaar bilden, kann man auch so aussprechen:

Auf jeder Geraden l giebt es zwei Punkte, deren Nullebenen in Bezug auf die 3 Gewinde nicht blos ihren Nullpunkt, sondern eine Gerade gemeinsam haben.

Durchläuft X die l, so beschreiben die Nullebenen ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei mit der Punktreihe l perspective Ebenenbüschel; die 3 projectiven Strahlenbüschel, welche sie in eine beliebige Ebene einschneiden, haben, wie bekannt, 3 Tripel homologer Strahlen, die in einen Punkt zusammenlaufen; einer dieser Punkte ist der Spurpunkt von l; nach den beiden andern gehen die beiden Geraden, in welche je drei entsprechende Nullebenen zusammenlaufen.

Hinsichtlich der *Realität* einer solchen 3 Gewinden gemeinsamen Regelschaar möge zunächst folgendes bemerkt werden.

Wenn eins der 3 Gewinde ein Gebüsche ist, dann sind die gemeinsamen Geraden diejenigen, welche von der Axe des Gebüsches nach dem Strahlennetze gehen, das den beiden andern Gewinden gemeinsam ist; und die von diesen Geraden gebildete Regelschaar ist reell.

Wenn also unter den 3 Gewinden sich zwei ungleichartig gewundene befinden, etwa Γ_1, Γ_2, so enthält der Büschel $\Gamma_1\Gamma_2$ zwei reelle Gebüsche und die Regelschaar ist gemeinsam einem derselben und dem Strahlennetze $\Gamma_1\Gamma_3$ (oder $\Gamma_2\Gamma_3$).

Drei Strahlengewinde, welche nicht alle gleichartig gewunden sind, durchschneiden sich in einer reellen Regelschaar.

127 Wir haben schon oben aus den 3 Gewinden ein doppelt unendliches System S_2 abgeleitet, indem wir eins derselben mit den sämmtlichen Gewinden des Büschels der beiden andern verbanden.

Die Sylvester'sche Erzeugung des Strahlengewindes liefert uns in einer sehr anschaulichen Weise dieses System 2. Stufe, das man *ein Netz von Gewinden* nennt.

Es sei (A, α) wiederum ein beliebiger Strahlenbüschel und (B_1, β_1), (B_2, β_2), (B_3, β_3) seien die 3 zu ihm projectiven Büschel, welche ihm in den Nullsystemen der 3 gegebenen Complexe Γ_1, Γ_2, Γ_3 entsprechen. Γ_1 wird durch (A, α), (B_1, β_1) erzeugt u. s. w.

Die 3 Punkte B_1, B_2, B_3 liegen in der Ebene α, die Ebenen β_1, β_2, β_3 gehen durch A.

Jedes Quadrupel entsprechender Strahlen der 4 Büschel hat zwei Transversalen, welche allen 3 Gewinden angehören, und durch diese Transversalenpaare entsteht die gemeinsame Regelschaar G der 3 Gewinde, auf der sich so schon eine involutorische Paarung ergiebt.

Wir vervollständigen die Büschel, welche die gegebenen Gewinde verbinden. Ein beliebiger Punkt B_x auf B_1B_2 und die ihn mit $\beta_1\beta_2$ verbindende Ebene β_x bestimmen einen Strahlenbüschel, welcher (Nr. 101) durch das Strahlennetz $\Gamma_1\Gamma_2$ projectiv auf (A, α) bezogen wird und mit diesem Büschel ein Gewinde Γ_x erzeugt, das zum Büschel $\Gamma_1\Gamma_2$ gehört. In ähnlicher Weise erhalten wir Gewinde Γ_y, Γ_z, welche bezw. zu $\Gamma_1\Gamma_3$, $\Gamma_2\Gamma_3$ gehören.

Wir beziehen nun das Punktfeld (α) *in der Ebene* α *und den Ebenenbündel* (A) *um den Punkt* A *so correlativ auf einander, dass den Punkten* A, B_1, B_2, B_3 *die Ebenen* α, β_1, β_2, β_3 *entsprechen.* Der Strahlenbüschel (A, α) von (A) ist dann so zu dem Strahlenbüschel (A, α) von (α) projectiv, dass den Strahlen $A(B_1, B_2, B_3)$ die Strahlen $\alpha(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, d. h. dieselben Strahlen entsprechen. Also entspricht jeder Strahl von (A, α) sich selbst. Sind nun B und β irgend zwei entsprechende Elemente der Correlation, so ist AB identisch mit $\alpha\beta$; *folglich sind zwei entsprechende Elemente* B *und* β *stets incident.* Da nun der Geraden B_1B_2 die Gerade $\beta_1\beta_2$ correspondirt, so entsprechen sich auch B_x und β_x und ebenso B_y und β_y, B_z und β_z.

Es kommt also jetzt noch darauf an, den Strahlenbüschel (B, β) in geeigneter Weise projectiv auf (A, α) zu beziehen, damit ein dem Netze angehöriges Gewinde sich ergebe. B_x sei der Schnitt (B_3B, B_1B_2); dann ist die Verbindungsebene $(\beta_3\beta, \beta_1\beta_2)$ die durch B_x gehende Ebene β_x.

Alle Strahlen des Netzes $\Gamma_1\Gamma_2$, welche einen bestimmten Strahl a von (A, α) und also auch die beiden entsprechenden Strahlen b_1, b_2 von (B_1, β_1) und (B_2, β_2) treffen, schneiden auch (Nr. 101) einen und denselben Strahl b_x von (B_x, β_x); zu ihnen gehören auch die beiden Geraden der Regelschaar G, welche a, b_1, b_2, b_3 treffen, und da sie a, b_3, b_x schneiden, so treffen sie auch beide denselben Strahl b von (B, β); denn wie B_x auf B_1B_2 liegt und β_x ihn mit $\beta_1\beta_2$ verbindet, so liegt B auf B_3B_x und wird durch β mit $\beta_3\beta_x$ verbunden.

So wird durch die Regelschaar G jedem Strahle a von (A, α) ein Strahl b von (B, β) zugeordnet, und da b nur diese beiden Strahlen von G trifft, so wird auch jedem b nur ein a zugeordnet; d. h. *die beiden Strahlenbüschel* (A, α) *und* (B, β) *werden durch* G *projectiv gemacht und erzeugen ein Gewinde, das durch* G *geht*, und so liefert jedes Paar entsprechender Elemente B, β der obigen Correlation ein Gewinde, und die vorangehende Betrachtung zeigt, dass das System dieser Gewinde identisch mit demjenigen ist, das durch die Büschel entsteht, welche Γ_3 mit den Gewinden von $\Gamma_1\Gamma_2$ verbinden.

Aber B und β sind einander durch die Correlation zugeordnet

worden, nicht dadurch, dass wir unter den 3 Gewinden eins, wie eben Γ_3, bevorzugen, und ebenso hängt die projective Beziehung von (A, α) und (B, β) von G, demnach von allen 3 Gewinden gleichartig ab.

Also entsteht dasselbe System S_2 auch durch die Büschel, welche Γ_1 oder Γ_2 mit den Gewinden von $\Gamma_2\Gamma_3$, bezw. von $\Gamma_1\Gamma_3$ verbinden.

128 Weiter, wenn (B', β'), (B'', β'') zwei so erhaltene und projectiv auf (A, α) bezogene Strahlenbüschel und Γ', Γ'' die durch sie erzeugten Gewinde sind, so sind B, ein beliebiger Punkt auf $B'B''$, und β, die Ebene, welche ihn mit $\beta'\beta''$ verbindet, ebenfalls entsprechende Elemente in der Reciprocität.

Die beiden Strahlen von G, welche einen Strahl a von (A, α) treffen, treffen also auch die nämlichen Strahlen b', b'', b von (B', β'), (B'', β''), (B, β); weil sie a, b', b'' treffen, sind sie Strahlen des Strahlennetzes $\Gamma'\Gamma''$. Also ist die Projectivität, welche zwischen (A, α) und (B, β) durch G bewirkt wird und ein Gewinde unseres Netzes $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ erzeugt, dieselbe wie die, welche durch das Strahlennetz $\Gamma'\Gamma''$ bewirkt wird und ein Gewinde des Büschels $\Gamma'\Gamma''$ erzeugt.

Jeder Büschel also, der zwei Gewinde des Netzes $S_2 \equiv \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ verbindet, gehört ganz dem Netze an.

Jeder solche Büschel von Gewinden in S_2 entspricht einer geraden Punktreihe in (α) oder einem Ebenenbüschel von (A). *Also enthält das Netz ∞^2 solche Büschel, von jedem seiner Gewinde Γ gehen ∞^1 aus,* welche man sich am besten als Verbindungsbüschel jenes Gewindes mit den Gewinden irgend eines Büschels des Netzes S_2 vorstellt, der Γ nicht enthält.

Wie zwei Punktreihen in (α) einen Punkt gemeinsam haben, so *haben zwei Büschel eines Netzes S_2 ein Gewinde gemein.*

Auch damit ist gesagt, dass zwei Strahlennetze, die eine Regelschaar gemein haben, in demselben Gewinde sich befinden (Nr. 98).

Wir können das Netz durch jede 3 von seinen Gewinden, welche nicht zu demselben Büschel gehören, constituiren.

Die Zahl dieser constituirenden Tripel ist $\infty^{3.2}$; demnach *giebt es $\infty^{3.5-3.2}$, also ∞^9 Netze von Gewinden,* so viele nothwendigerweise, als es Regelschaaren giebt.

Alle Büschel des Netzes, die von einem Gewinde Γ desselben ausgehen, bewirken in der Leitschaar L der „Grund-Regelschaar“ G des Netzes durch die Paare der Leitgeraden ihres „Grund-Strahlennetzes“ oder der Axen der Gebüsche, die sie je enthalten, die Paare einer Involution, und jedem der ∞^2 Gewinde des Netzes entspricht so eine der ∞^2 Involutionen in dieser Regelschaar L, den ∞^1 Gebüschen entsprechen die parabolischen Involutionen.

A und α sind auch entsprechend in der Reciprocität zwischen 129
(α) und (A); das ihnen zugehörige Gewinde von S_2 ist offenbar dasjenige, für welches jeder Strahl von (A, α) zu sich selbst polar ist, oder welches den Strahlenbüschel (A, α) enthält.

In einem Netze von Gewinden giebt es stets ein Gewinde, das durch einen gegebenen Strahlenbüschel hindurch geht.

Man kann diese doppelte*) Bedingung offenbar in die zwei einfachen zerlegen, durch zwei Strahlen des Büschels zu gehen; denn jedes Gewinde, welches das thut, enthält dann den ganzen Büschel, weil dadurch die Ebene desselben Nullebene des Scheitels wird.

Jeder Punkt einer festen Ebene bestimmt also im Netze ein Gewinde, für welches er der Nullpunkt der Ebene ist, und umgekehrt; ebenso dual: Durchläuft das Gewinde einen Büschel, dann beschreibt der Punkt eine Gerade und umgekehrt, und *wir können Netz und Punktfeld collinear zu einander nennen.*

Die Strahlen b in den verschiedenen Büscheln (B, β), welche in den Projectivitäten derselben zu (A, α) einem Strahle a dieses Büschels entsprechen, erzeugen ein Strahlennetz, von welchem die beiden von a getroffenen Strahlen der Grund-Regelschaar G die Leitgeraden sind und zu dem a selbst gehört.

Ist g eine beliebige Gerade und a der von ihr getroffene Strahl von (A, α), so bilden die ebenfalls g treffenden Geraden b des zu a gehörigen Strahlennetzes eine Regelschaar, zu welcher auch a gehört; also erzeugen die Spuren, in α, dieser Geraden, d. h. die Scheitel B der Büschel (B, β), denen sie angehören, eine Gerade, die in α befindliche Leitgerade dieser Regelschaar, und die Ebenen β bilden ebenso einen Ebenenbüschel um die durch A gehende Leitgerade.

Diese Büschel (B, β) aber erzeugen mit (A, α) Gewinde des Netzes, die durch g gehen.

Die Gewinde eines Netzes S_2, welche durch eine gegebene Gerade gehen, erzeugen einen Büschel.

Eine zweite Gerade scheidet dann aus diesem Büschel ein Gewinde aus.

In einem Netze S_2 von Gewinden giebt es ein Gewinde, das durch zwei gegebene Geraden geht.

Davon ist der obige Satz nur ein besonderer Fall.

Jedes Gewinde, welches durch die Regelschaar G geht, d. h. durch 3 Gerade derselben, *gehört zum Netze, dessen Grund-Regelschaar sie ist.* Denn sind g_1, g_2 zwei beliebige Geraden eines solchen Gewindes, so

*) Ein Gewinde hat ∞^3, der Raum ∞^5 Strahlenbüschel.

giebt es im Netze auch ein Gewinde, das durch sie geht; folglich haben beide diese Geraden und 3 Gerade der Regelschaar gemein und sind identisch.

130 Das oben zu jedem Strahle a von (A, α) gefundene Strahlennetz kann noch anders beschrieben werden. Die Strahlen b, welche es beschreiben, sind ja nichts anderes als die Polaren von a bezüglich der verschiedenen Gewinde von S_2.

Wie (A, α), so ist auch a beliebig im Raume; also:

Die Polaren einer Geraden l in Bezug auf die verschiedenen Gewinde eines Netzes bilden ein Strahlennetz; zu demselben gehört l selbst als zu sich selbst polar in Bezug auf alle Gewinde des Netzes, welche sie enthalten. Leitgeraden sind die beiden von l getroffenen Geraden der Grund-Regelschaar des Netzes. Folglich gehört die ganze Leitschaar L zu diesem Strahlennetze; wird sie doch durch die Axen der Gebüsche des Netzes gebildet, die ja, je in Bezug auf ihr Gebüsche, polar zu l sind.

Denken wir uns das Netz S_2 durch die Büschel erzeugt, welche eine der 3 Constituenten Γ_3 des Netzes mit den Gewinden des Büschels $\Gamma_1 \Gamma_2$ der beiden andern verbinden, so sehen wir dieses Strahlennetz auf die in Nr. 92 beschriebene Weise entstehen. Die Polaren l_x von l nach den Gewinden Γ_x von $\Gamma_1 \Gamma_2$ bilden eine Regelschaar, die durch l, l_1, l_2 geht; die Polaren wiederum nach den Gewinden des Büschels $\Gamma_3 \Gamma_x$ eine Regelschaar, welche durch l, l_x, l_3 geht.

Man sieht, in welcher Weise die Bestimmung eines Netzes von Gewinden durch 3 Gewinde mit der Bestimmung eines Strahlennetzes durch 4 Strahlen zusammenhängt.

Analoges gilt für die Regelschaar und den Büschel von Gewinden, für das Strahlengewinde und das Gebüsche von Gewinden, das demnächst betrachtet werden soll.

In dieser Weise ist das Netz von Gewinden in ein Netz von Strahlen abgebildet, so dass jedem Gewinde ein Strahl entspricht und umgekehrt, einem Büschel von Gewinden in jenem eine Regelschaar in diesem, aber nicht umgekehrt; denn im Strahlennetze haben wir an und für sich ∞^3 Regelschaaren, hier ergeben sich aber nur diejenigen, welche die Gerade l enthalten, durch deren Polaren das Strahlennetz gebildet wird.

Unter diesen ∞^2 Regelschaaren giebt es ∞^1, welche in Strahlenbüschel-Paare zerfallen. Sie entsprechen denjenigen Büscheln des Netzes S_2, deren eines Gebüsche eine der beiden von l getroffenen Geraden der Schaar L zur Axe hat (Nr. 59).

131 Wir fanden, dass die Bedingung, zu einem gegebenen Gewinde in Involution zu sein, für ein Gewinde eine einfache Bedingung ist

(Nr. 107). Also giebt es ∞^3 Gewinde, welche zu zwei Gewinden Γ_1 und Γ_2 in Involution sind und infolge dessen zu allen Gewinden des Büschels $\Gamma_1 \Gamma_2$ (Nr. 107). Dieses dreifach unendliche System von Gewinden hat die Eigenschaft, dass jeder Büschel, der zwei von seinen Gewinden verbindet, ihm ganz angehört (wegen des eben angeführten Satzes). Es ist das Gebüsche von Gewinden, mit dem wir uns erst noch genauer vertraut machen müssen, ehe wir in dieser Betrachtung weiter vorschreiten können.

Gleichzeitig aber zu 3 Gewinden Γ_1, Γ_2, Γ_3 sind ∞^2 Gewinde Λ in Involution. Alle diese Gewinde sind dann in Involution zu allen Gewinden Γ_x des Büschels $\Gamma_1 \Gamma_2$ und also wiederum zu allen Gewinden aller Büschel $\Gamma_x \Gamma_3$.

Alle ∞^2 Gewinde, welche in Involution sind zu 3 Gewinden, sind auch in Involution zu allen Gewinden des Netzes, das diese 3 constituiren.

Andererseits aber hat dieses doppelt unendliche System der Λ auch die Eigenschaft, dass jeder Büschel, der zwei von seinen Gewinden verbindet, ihm ganz angehört, und kann also aus 3 seiner Gewinde durch Reihen von Büscheln erzeugt werden, welche eins der 3 Gewinde zur gemeinsamen einen Constituente haben, während die andere den Büschel der beiden anderen Gewinde durchläuft.

Aber es zeigt sich noch unmittelbarer, dass alle Λ durch eine und dieselbe Regelschaar gehen, nämlich die L. Die Geraden dieser Regelschaar L sind ja die Axen der Gebüsche im gegebenen Netze, das wir nun, zur Unterscheidung, $S_2(\Gamma)$ nennen wollen; und da die Λ alle auch auf diese Gebüsche sich stützen, so enthalten sie deren Axen (Nr. 108).

Mit jedem Netze $S_2(\Gamma)$ von Gewinden ist ein anderes Netz $S_2(\Lambda)$ verbunden, derartig, dass jedes Gewinde des einen Netzes zu jedem des andern in Involution ist. Die Grund-Regelschaaren G und L dieser beiden Netze sind verbundene Schaaren, d. h. die beiden Regelschaaren einer und derselben Fläche 2. Grades.

Von zwei solchen Netzen sagt man dann, dass *sie in Involution sind,* oder *sich gegenseitig stützen.*

In jedem Büschel eines Netzes S_2, der von einem Gewinde Γ desselben ausgeht, giebt es (Nr. 107) ein Gewinde, das sich auf Γ stützt; also bilden sämmtliche Gewinde von S_2, die zu Γ in Involution sind, einen Büschel; denn der Büschel, welcher irgend zwei von ihnen verbindet, ist sowohl vollständig in S_2 enthalten, als auch vollständig in Involution zu Γ.

In diesem Büschel haben wir eine Involution von Paaren von 132
Gewinden, welche sich je auf einander stützen (Nr. 106).

Also haben wir, weil es ∞^8 Büschel giebt, ∞^9 *Paare von Gewinden, die zu einander in Involution sind.*

Ferner ergeben sich in jedem Netze von Gewinden sowohl ∞^3 *Paare, als auch* ∞^3 *Tripel von Gewinden, welche zu einander, bezw. von denen je zwei zu einander in Involution sind.*

Das dritte Gewinde jedes Tripels ist eindeutig durch die beiden andern bestimmt, als Schnitt zweier Büschel des Netzes (Nr. 128).

Ordnet man irgend einem dieser Tripel ein ebenso beschaffenes in dem Netze zu, das zum gegebenen in Involution ist, so hat man 6 Gewinde, von denen je zwei in Involution sind, eine Figur,*) mit der wir uns noch eingehend zu beschäftigen haben werden.

Da die Anzahl der Netze ∞^9 ist, so giebt es $\infty^{9+3} = \infty^{12}$ Tripel von Gewinden, von denen je zwei in Involution sind. Dieselbe Mannigfaltigkeit ergiebt sich auch daraus, dass zu je einem Gewinde ∞^4 Gewinde, zu zweien aber ∞^3 in Involution sind, also *ist die Anzahl der „Involutionspaare" und „Involutionstripel" von Gewinden* ∞^{5+4}, *bezw.* ∞^{5+4+3}. Weil wir nun aus dem Netze, welches sich auf das durch ein Involutionstripel constituirte Netz stützt, ∞^2 einzelne Gewinde, ∞^3 Involutions-Paare oder -Tripel herausnehmen können, so *ist die Anzahl der Gruppen von 4, 5 oder 6 Gewinden, welche gegenseitig in Involution sind,* ∞^{14}, ∞^{15}, ∞^{15}.

133 *Die gemeinsame Regelschaar G dreier Gewinde* Γ_1, Γ_2, Γ_3 kann, wie wir uns noch überzeugen werden, vollständig imaginär sein; daher ist es wünschenswerth, *für ihre Trägerfläche 2. Grades das sie repräsentirende reelle Polarsystem zu haben.*

Zu demselben führen uns die 3 Strahlennetze $\Gamma_2\Gamma_3$, $\Gamma_3\Gamma_1$, $\Gamma_1\Gamma_2$; ihre Leitgeradenpaare u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3 gehören zur Leitschaar L. Mit jedem derselben ist, wie wir wissen, eine windschiefe Involution verbunden (Nr. 81, 83, 87). Zwei entsprechende Punkte z. B. der zu $\Gamma_2\Gamma_3$ gehörigen liegen auf einem Strahle dieses Netzes und sind harmonisch zu den beiden Punkten, in denen er u_1, v_1 trifft; also sind sie conjugirt in Bezug auf die genannte Trägerfläche.

Construirt man daher zu irgend einem Punkte X des Raumes die entsprechenden in den windschiefen Involutionen, welche zu den Strahlennetzen gehören, in denen die Gewinde Γ_1, Γ_2, Γ_3 *sich zu je zweien durchschneiden, so ist die Verbindungsebene dieser 3 Punkte die Polarebene von X nach der Trägerfläche der Regelschaar, welche den 3 Gewinden und allen Gewinden ihres Netzes* $S_2(\Gamma)$ *gemeinsam ist.*

*) F. Klein, Mathem. Annalen Bd. 2 S. 203.

Das Netz, welches zu $S_2(\Gamma)$ in Involution ist, führt genau zu demselben Polarsysteme. —

Einen speciellen Fall des Netzes erhalten wir, wenn die Grund-Regelschaar in zwei Strahlenbüschel (S, σ), (S', σ') mit gemeinsamem Strahle zerfällt.

Das Netz, welches zu einem solchen Netze in Involution ist, ist von derselben Art; seine Grund-Regelschaar besteht aus den beiden Büscheln (S, σ'), (S', σ).

Alle Gewinde aber, welche zwei Strahlenbüschel (S, σ), (S', σ') ohne gemeinschaftlichen Strahl gemein haben, haben die beiden Geraden SS' und $\sigma\sigma'$ zu Polaren, bilden also nur einen Büschel, dessen Grund-Strahlennetz diese beiden Geraden zu Leitgeraden hat.

Wir fanden, dass im allgemeinen die Axen der Gewinde eines 134
Büschels S_1 von Gewinden eine cubische Regelfläche erzeugen. Der unendlich ferne Strahl und der Hauptstrahl des Grund-Strahlennetzes des Büschels sind die einfache, bezw. doppelte Leitgerade dieser Regelfläche. Die beiden in die unendlich ferne Ebene $\mathfrak{E}$ fallenden Erzeugenden berühren den absoluten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$.

Wenn eins der Strahlengebüsche des Büschels eine unendlich ferne Treffgerade hat, so erzeugen die Axen der übrigen Gewinde einen Strahlenbüschel (Nr. 125).

Untersuchen wir jetzt *die Congruenz der Axen eines Netzes von Gewinden S_2 (mit der Grund-Regelschaar G).*

Jedes Gewinde, dessen Axe zu einer gegebenen Ebene π parallel ist, hat seinen der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ zugehörigen Nullpunkt auf $\pi\mathfrak{E}$, also bilden diese Gewinde im Netze einen Büschel, und von ihren Axen, deren cubische Regelfläche die $\pi\mathfrak{E}$ zur einfachen Leitgeraden hat, fallen 2 in die Ebene π.

Folglich ist unsere Congruenz 2. Klasse.

Wenn P ein beliebiger Punkt des Raumes ist, so gehört jeder Strahlenbüschel (P, π) aus ihm zu einem Gewinde von S_2. Der $\mathfrak{E}$-Nullpunkt $\mathfrak{U}$ desselben und der Punkt $\mathfrak{P}$, welcher unendlich fern ist in normaler Richtung zu π, bewegen sich collinear in $\mathfrak{E}$, wenn π sich um P dreht; in der That, wenn $\mathfrak{P}$ sich auf einer Geraden in $\mathfrak{E}$ bewegt, so beschreibt π einen Ebenenbüschel; die Gewinde von S_2, welche die Axe desselben enthalten, erzeugen einen Büschel und ihre $\mathfrak{U}$ also eine Punktreihe. Die Strahlen, welche aus P nach den 3 sich selbst entsprechenden Punkten dieser beiden collinearen Felder in $\mathfrak{E}$ gehen, sind die durch P gehenden Axen von Gewinden des S_2.

Demnach ist die Congruenz 3. Ordnung.

Die Axen der Gewinde eines Netzes S_2 erzeugen eine Congruenz 2. Klasse und 3. Ordnung.

Zu dieser Congruenz gehört die ganze Leitschaar L der Grund-Regelschaar G, weil sie durch die Axen der Gebüsche von S_2 gebildet wird.

135 Unsere Congruenz hat aber zur Grund-Regelschaar G des Netzes eine noch innigere Beziehung.

Die Geraden von G gehören zu allen Gewinden des Netzes. Also schneidet jeder Strahl der Congruenz, als Axe eines Gewindes des Netzes, die beiden Geraden von G, welche er trifft, rechtwinklig und enthält die kürzeste Entfernung zwischen ihnen.

Umgekehrt, jede Gerade, welche 2 Gerade von G rechtwinklig schneidet, ist die Axe eines Gewindes durch G, das durch irgend zwei andere die Gerade rechtwinklig schneidende Strahlen bestimmt ist (Nr. 60).

Demnach bilden die Geraden der kürzesten Entfernungen zwischen je zwei Geraden einer Regelschaar G eine Congruenz 2. Klasse 3. Ordnung, welche mit der Congruenz der Axen der durch G gehenden Gewinde identisch ist.

Jede Gerade der Leitschaar L von G gehört zu dieser Congruenz und ist also zu zwei Geraden von G normal.

Wir wollen Ordnung und Klasse für diese Congruenz nachweisen, insofern sie auf die jetzige Weise entstanden ist.

Es sei g^2 der Kegelschnitt, in dem G von einer Ebene π geschnitten wird; wir untersuchen die in π fallenden Senkrechten auf den Strahlen von G oder die Spuren der Ebenen, welche auf diesen Geraden in ihren Stützpunkten auf g^2 senkrecht stehen. Sie bewirken auf dem Kegelschnitte g^2 und der unendlich fernen Geraden $\pi\mathfrak{E}$ eine Correspondenz [2, 1]; jedem Punkte von $\pi\mathfrak{E}$ entsprechen diejenigen 2 Punkte von g^2, durch welche die Geraden von G gehen, die von der Polare des Punktes nach dem absoluten Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ getroffen werden.

Diese Punktepaare auf g^2 bilden eine Involution und der Büschel um das Involutions-Centrum ist zur Punktreihe auf $\pi\mathfrak{E}$ projectiv; die beiden Strahlen desselben, welche durch die entsprechenden Punkte auf $\pi\mathfrak{E}$ gehen, sind doppelte Spuren oder doppelte Tangenten der von den Spuren eingehüllten Curve, welche 4. Klasse ist, da sie ersichtlich die $\pi\mathfrak{E}$ zur Doppeltangente hat (herrührend von den Schnitten mit g^2) und von einem beliebigen Punkte derselben noch zwei andere Tangenten erhält. 3 Doppeltangenten waren auch für diese Curve zu

erwarten wegen der eindeutigen Beziehung ihrer Tangenten auf die Punkte von g^2.

Die beiden endlichen Doppeltangenten aber beweisen die Klasse 2 der Congruenz.

Sei P ein beliebiger Punkt und π durch ihn gelegt, so zeigt die Klasse 4 der Spuren-Curve in π, dass von den aus P auf die Geraden von G gefällten Lothen 4 in π fallen und also auch ihre Fusspunkte in dieser Ebene haben; so erkennen wir nochmals (Nr. 124), dass die Fusspunkte-Curve einer Regelschaar G in Bezug auf den Punkt P 4. Ordnung ist. Wir fanden a. a. O., dass sie den Geraden von G je einmal, denen der Leitschaar je dreimal begegnet und also 2. Art ist. Sie erhält daher aus einem beliebigen Punkte 3 Doppelsecanten; dies sind die 3 Strahlen unserer Congruenz aus diesem Punkte.*)

Da jeder Punkt von $\mathfrak{E}$ nur Nullpunkt für ein Gewinde des Netzes 136
ist, so kommt von jedem unendlich fernen Punkte nur eine ins Endliche gehende Axe zu unserer Congruenz. Die beiden andern Congruenzstrahlen aus ihm fallen in $\mathfrak{E}$. *Daher enthält die Ebene* $\mathfrak{E}$ ∞^1 *Congruenzstrahlen, die einen Kegelschnitt umhüllen:* sie ist eine sogenannte *singuläre Ebene 2. Grades* der Congruenz.

Dieser Kegelschnitt ist der absolute Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$; denn jede der zur Congruenz gehörigen cubischen Regelflächen, die von den Büscheln des Netzes herrühren, hat 2 in die Ebene $\mathfrak{E}$ fallende und $\mathfrak{K}^2$ tangirende Erzeugenden.

Die Congruenz hat noch andere singuläre Ebenen. Das Netz besitzt 4 Strahlengebüsche, deren Treffgerade sich auf den absoluten Kegelschnitt stützen; seien l_1, l_2, l_3, l_4 diese 4 Geraden aus der Regelschaar L, g_1, g_2, g_3, g_4 die nach denselben Punkten von $\mathfrak{K}^2$ gehenden Geraden von G und $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, $\mathfrak{t}_4$ die Tangenten an $\mathfrak{K}^2$ in den nämlichen Punkten, so wissen wir aus Nr. 125, dass das Gebüsche, für welches l_i Treffgerade ist, alle Strahlen des Büschels $(l_i\mathfrak{t}_i)$ zu Axen hat.

Die 6 Büschel, welche durch je zwei von diesen 4 Gebüschen constituirt werden, liefern noch je einen dritten Strahlenbüschel (Nr. 125), der durch die Axen der übrigen Gewinde des betreffenden Büschels gebildet wird, und *so haben wir im Ganzen 10 zur Congruenz gehörige Strahlenbüschel,* unter denen jedoch nur 2 von den 6 letzteren reell sind.

*) Vergl. Wälsch, Ueber ein Strahlensystem beim Hyperboloid, Wiener Sitzungsberichte Bd. 95 (1887), wo diese Congruenz noch eingehender untersucht wird.

Endlich in den 4 Ebenen $g_i \mathfrak{t}_i$ befinden sich auch ∞^1 Strahlen der Congruenz, welche je einen Kegelschnitt umhüllen. Denn für den Büschel des Netzes, der seine $\mathfrak{E}$-Nullpunkte z. B. auf $\mathfrak{t}_1$ hat, zerfällt die cubische Regelfläche der Axen in den Strahlenbüschel $l_1 \mathfrak{t}_1$, der allein zum Gebüsche $[l_1]$ gehört, und eine Regelschaar; aber die Geraden derselben fallen alle in die Ebene $g_1 \mathfrak{t}_1$ und folglich artet sie in einen Kegelschnitt aus. Sei nämlich $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{p}$ seine Polare nach dem absoluten Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$, die durch $g_1 \mathfrak{t}_1$ geht; die Polare von $\mathfrak{p}$ nach dem Gewinde, dessen $\mathfrak{E}$-Nullpunkt $\mathfrak{P}$ ist, d. i. die Axe dieses Gewindes muss durch $\mathfrak{P}$ gehen und g_1 treffen, weil $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{E}$ liegt und auch g_1 trifft.

So sind die 5 singulären Kegelschnitte und 10 singulären Strahlenbüschel, welche wir für eine Congruenz 2. Klasse und 3. Ordnung (ohne singuläre Linie) später allgemein nachweisen werden, für diese Congruenz dargethan. Von den Kegelschnitten ist im vorliegenden Falle keiner reell, und nur einer, $\mathfrak{K}^2$, in reeller Ebene gelegen.

Die Geraden dieser Congruenz haben je gleichen Parameter in Bezug auf 3 (und dann auf alle) Geraden der Grund-Regelschaar G (Nr. 123).

Hieraus folgt, dass, wenn G eine paraboloidische Regelschaar ist, in welchem Falle alle Lothe auf der Leitebene der Schaar den Parameter ∞ in Bezug auf alle Geraden der Schaar haben, als Ort der Axen, nach Abzug dieses Bündels, sich eine Congruenz 2. Ordnung und 2. Klasse ergiebt.

II.

137 Gehen wir über zum *linearen System 3. Stufe S_3* von Gewinden, das man *ein Gebüsche von Gewinden* nennt.

Es wurde schon erwähnt, dass die ∞^3 Gewinde, welche zu zwei gegebenen Gewinden A_1, A_2 und infolge dessen zu allen Gewinden des Büschels $A_1 A_2$ in Involution sind, ein System 3. Stufe bilden von der Eigenschaft, dass alle Gewinde eines Büschels, welcher zwei Gewinde des Systems verbindet, demselben angehören (Nr. 131).

Auch jedes Netz, das durch 3 Gewinde dieses Systems constituirt wird, und das wir uns ja durch Büschelreihen erzeugt denken können, die von einer der 3 Constituenten ausgehen, gehört vollständig dem Systeme an.

Die Axen der beiden Strahlengebüsche im Büschel $A_1 A_2$ sind nach Nr. 108 allen Gewinden unseres Systems gemeinsam.

Suchen wir nun aber ein solches System aus *4 constituirenden Gewinden Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4* abzuleiten. *Diese Gewinde haben zwei gemein-*

same Strahlen g', g'' (Nr. 35, 98). Dieselben sind, wie wir wissen, auch die gemeinsamen Geraden der beiden Strahlennetze, in denen sich zwei von den 4 Gewinden und die beiden übrigen durchschneiden.

Zwei der Regelschaaren, welche dreien von den 4 gegebenen Gewinden gemeinsam sind, z. B. $G_{123} \equiv \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ und $G_{124} \equiv \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_4$ haben zwei gemeinsame Leitgeraden, diejenigen des Strahlennetzes $\Gamma_1 \Gamma_2$, also haben sie, nach Steiner's Satz, selbst zwei gemeinsame Geraden (Nr. 10).

Da diese beiden gemeinsamen Geraden g', g'' auch imaginär werden können, so ist es wünschenswerth, die darstellende windschiefe Involution (Nr. 87) zu besitzen, von welcher sie die Axen sind, oder auch eine elliptisch-involutorische Regelschaar, welche sie zu Doppelstrahlen hat. Wir haben gelernt (Nr. 133), für die Trägerfläche jeder der 4 Regelschaaren G_{123}, G_{124}, G_{134}, G_{234} zu einem beliebigen Punkte X die Polarebene zu construiren. Diese 4 Polarebenen müssen in den Punkt X' zusammenlaufen, der auf dem Strahle, welcher von X ausgeht und g', g'' trifft, der dem X zugeordnete 4[te] harmonische Punkt ist in Bezug auf die beiden Treffpunkte mit g', g''. In X und X' haben wir zwei entsprechende Punkte der gesuchten windschiefen Involution und sind also im Stande, beliebig viele solche entsprechende Punkte uns zu verschaffen; so dass wir die genannte Collineation als gegeben ansehen dürfen und damit auch *das Strahlennetz, von welchem* g' *und* g'' *die Leitgeraden sind.*

Es sei γ eine zu diesem Strahlennetze gehörige Regelschaar; die Geraden ihrer Leitschaar λ entsprechen sich zu je zweien in dieser Collineation und wir erhalten so eine involutorische Regelschaar λ, deren Doppelstrahlen g', g'' sind und welche uns dieselben in noch etwas einfacherer Weise darstellt, falls sie imaginär sind.*)

Schneiden wir in diesem Falle λ mit einer Ebene, so sind die Spuren von g', g'' in derselben durch eine conische Involution dargestellt, also auch durch eine gerade Involution, nämlich die der in Bezug auf den Träger-Kegelschnitt conjugirten Punkte auf der Involutionsaxe, welche, da sie die beiden Spuren verbindet, der in die Ebene fallende Strahl des Netzes $[g', g'']$ ist. Folglich sind auch die beiden Strahlen eines Büschels in dieser Ebene, welche nach den Spuren hingehen, durch eine Strahleninvolution dargestellt. Geschieht

*) Man beachte, dass, während es für zwei conjugirt imaginäre Geraden 1. Art (mit gemeinsamem reellen Punkte) nur eine darstellende elliptische Strahleninvolution giebt, bei zwei conjugirt imaginären Geraden 2. Art ∞^3 darstellende elliptisch-involutorische Regelschaaren möglich sind; das eindeutige *darstellende Gebilde ist die „elliptische“ windschiefe Involution* (Nr. 87).

dasselbe auch noch bei einem zweiten Strahlenbüschel, so *kann man nun diese beiden Büschel so projectiv auf einander beziehen, dass die* g', *bezw.* g'' *treffenden Strahlen homolog sind, und ausserdem noch zwei gegebene reelle Strahlen* a, a_1; die elliptischen Involutionen in den beiden Strahlenbüscheln seien J, J_1; ac, $a_1 c_1$ seien die Paare derselben, zu denen a, bezw. a_1 gehören, und bd, $b_1 d_1$ die zu ihnen harmonischen Paare (Nr. 85). Dann ist $abcd$ oder kürzer abc die Darstellung des einen von den beiden conjugirt imaginären Strahlen nach den Spuren von g', g'' und cba die des andern, und wenn $a_1 b_1 c_1$ *) der Sinn im andern Strahlenbüschel ist, in den durch Vermittelung der geraden und der conischen Punktreihen und der Regelschaar λ der Sinn abc übergeht, $a_1 b_1 c_1$ die Darstellung desjenigen von den beiden conjugirt imaginären Strahlen des zweiten Büschels, der dem ersten von den vorhinigen Strahlen entspricht, d. h. dieselbe von den beiden Geraden g', g'' trifft wie dieser, $c_1 b_1 a_1$ aber die des andern.

Zur Festlegung der Projectivität hat man a und a_1, b und b_1 c und c_1 entsprechen zu lassen.**)

138 Nun sind wir im Stande, *vermittelst der Sylvester'schen Erzeugung des Strahlengewindes, das lineare System 3. Stufe oder Gebüsche* S_3 *von Gewinden aus seinen 4 Constituenten* $\Gamma_1, \ldots \Gamma_4$ *herzustellen, denen* g', g'' *gemeinsam sind.*

Es sei (A, α) *wiederum ein beliebiger Strahlenbüschel,* (B, β) *ein anderer, der mit ihm einen Strahl c gemein hat; solcher giebt es* ∞^3. *Alle diese Büschel* (B, β) *beziehen wir so projectiv auf* (A, α), *dass der Strahl c sich selbst entspricht und die von* g', *bezw.* g'' *getroffenen Strahlen einander entsprechen. Die* ∞^3 *durch diese Paare projectiver Büschel erzeugten Strahlengewinde haben infolge dessen alle* g', g'' *gemeinsam und bilden das verlangte System.*

Da auch umgekehrt jedes Gewinde, das durch g', g'' geht, dem Strahlenbüschel (A, α) einen Büschel (B, β) zuordnet, der mit ihm einen Strahl gemein hat und so zu ihm projectiv ist, dass dieser Strahl sich selbst entspricht und die von g', bezw. g'' getroffenen Strahlen einander, so *ergeben sich auf die obige Weise alle durch* g', g'' *gehenden Gewinde.*

Es seien 2 oder 3 Gewinde aus dem Gebüsche S_3 *genommen;* das Strahlennetz, bezw. die Regelschaar, die ihnen gemeinsam sind, enthalten g', g''; *also befinden sich alle Gewinde des Büschels, bezw. des Netzes, das sie constituiren, in* S_3.

*) Danach richtet man die Benennung der beiden Strahlen c_1, d_1 ein.

**) Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage Nr. 150.

Jedes Netz des Gebüsches ruft, wie wir wissen, zwischen dem 139
Felde (α) und dem Bündel (A) eine Correlation hervor, in der sich ein Punkt B von jenem und eine Ebene β von diesem entsprechen, die durchweg incidiren und deren Strahlenbüschel (B, β), in geeigneter Weise projectiv auf (A, α) bezogen, mit diesem Büschel ein Gewinde des Netzes erzeugt.

Zwei Netze von S_3 bewirken also zwei Correlationen zwischen (α) und (A) und machen deshalb zwei in α befindliche Felder so collinear, dass zwei Punkte oder zwei Geraden einander entsprechen, welche in den beiden Correlationen derselben Ebene oder demselben Strahle von (A) correspondiren. In beiden Correlationen entspricht jeder der Strahlen von (A, α) sich selbst, also thut er dies auch in der Collineation; wenn aber zwei collineare Felder der nämlichen Ebene einen Büschel mit lauter sich selbst entsprechenden Strahlen haben, dann besitzen sie auch eine Punktreihe mit lauter sich selbst entsprechenden Punkten.*) Folglich haben wir eine gerade Linie in (α), deren Punkten B in beiden Correlationen je dieselbe Ebene β entspricht. Die Gewinde, welche von diesen auf (A, α) projectiv bezogenen Büscheln (B, β) herkommen, gehören also zu beiden Netzen, und da die B in (α) in gerader Linie liegen, so bilden sie einen Büschel.

Zwei zu demselben Gebüsche von Gewinden gehörige Netze haben einen Büschel gemein.

Dass es ∞^1 und nur ∞^1 gemeinsame Gewinde giebt, folgt daraus, dass diese Gewinde, ausser der zweifachen Bedingung der Zugehörigkeit zum Gebüsche, noch den beiden einfachen Bedingungen zu genügen haben, den beiden Netzen des Gebüsches anzugehören. Befänden sich aber irgend 3 von ihnen nicht in demselben Büschel, so würde der Büschel, der zwei von ihnen, und dann wieder jeder Büschel, der irgend ein Gewinde dieses Büschels mit dem dritten verbindet, zu beiden Netzen gehören, was nicht möglich ist.

Ein Netz des Gebüsches und ein Büschel desselben, der nicht im Netze sich befindet, haben ein Gewinde gemein.

Sie können nur eine endliche Zahl von Gewinden gemein haben; wären es mindestens 2, so würde deren verbindender Büschel, d. i. der gegebene dem Netze angehören.

Das Netz bewirkt eine Correlation zwischen (α) und (A), der Büschel eine Projectivität zwischen einer Punktreihe d in (α) und einem Ebenenbüschel d_1 in (A). In beiden Beziehungen sind ent-

*) Reye, Geometrie der Lage 2. Abtheilung S. 17 der 2. Auflage.

sprechende Punkte und Ebenen incident. In der Correlation entspreche der d von (α) die Gerade d' von (A); dann wird in beiden Beziehungen der Ebene $d_1 d' \equiv \beta$ der Punkt $B \equiv \beta d$ entsprechen; und dieser Büschel (B, β) giebt, in der vorgeschriebenen Weise projectiv auf (A, α) bezogen, mit diesem das gemeinsame Gewinde.

Drei Netze des Gebüsches haben also ein Gewinde gemein.

Hingegen haben zwei Büschel des Gebüsches im allgemeinen kein Gewinde gemeinsam.

140 Das Gebüsche S_3 mit ∞^3 Gewinden hat $\infty^{2.3-2}$, also ∞^4 Büschel, von denen von jedem Gewinde ∞^2 ausgehen, und $\infty^{3.3-2.3}$, also ∞^3 Netze, von denen von jedem Gewinde ∞^2 ausgehen, durch jeden Büschel aber nur ∞^1.

Demnach ist das Gebüsche mit seinen ∞^3 Gewinden, ∞^4 Büscheln, ∞^3 Netzen vergleichbar dem Punktraume mit seinen ∞^3 Punkten, ∞^4 Geraden und ∞^3 Ebenen.

Wir vermuthen daraus die Möglichkeit, das Gebüsche auf den Punktraum collinear zu beziehen, d. h. so, dass den Büscheln und Netzen Gerade und Ebenen entsprechen.

Die projective, bezw. collineare Beziehung des Büschels auf eine Gerade, des Netzes auf eine Ebene ergab sich von selbst: sie sind projectiv, bezw. collinear zur geraden Punktreihe, zum Punktfelde ihrer Nullpunkte für eine feste Ebene und damit auch beziehbar auf jede andere Gerade, oder Ebene.

Geht man aber nun zum Gebüsche über, so erfüllen die Nullpunkte nicht den ganzen Raum, sondern nur die feste Ebene: jeder ist Nullpunkt für ∞^1 Gewinde des Gebüsches.

Wir führen daher die Vergleichung des Gebüsches mit dem Punktraume noch etwas weiter.

Die ∞^2 Büschel von Gewinden eines Gebüsches, die durch ein Gewinde gehen, und die ∞^2 Netze, die es thun, sind vergleichbar den Strahlen und Ebenen eines Bündels des Punktraumes, die ∞^1 Netze, die durch einen Büschel gehen, den Ebenen eines Büschels.

Sei $S_2{}^0$ ein Netz des Gebüsches, das jenes gemeinsame Gewinde der Büschel und Netze eines „Bündels“ nicht enthält, so hat jeder Büschel des Bündels mit demselben ein (veränderliches) Gewinde, jedes Netz einen Büschel gemein, und die Möglichkeit, das Netz $S_2{}^0$ collinear zu beziehen, hat zur Folge, dass *auch ein solcher Bündel von Büscheln und Netzen eines Gebüsches von Gewinden collinear bezogen werden kann.*

Sei zweitens $S_1{}^0$ ein Büschel des Gebüsches, der mit dem gemein-

samen Büschel eines „Büschels" von Netzen kein Gewinde gemein hat, „windschief gegen ihn ist", so hat jedes Netz dieses Netzebüschels mit dem S_1^0 ein (veränderliches) Gewinde gemein, und die Möglichkeit, den Büschel S_1^0 projectiv zu beziehen, hat zur Folge, dass *auch ein Büschel von Netzen in einem Gebüsche von Gewinden projectiv bezogen werden kann.*

Wenn nun Γ_1, Γ_2, ... Γ_5 5 beliebige Gewinde eines Gebüsches S_3 141
sind und A_1, A_2, ..., A_5 5 beliebige Punkte eines Punktraumes Σ, so wollen wir eine collineare Beziehung zwischen S_3 und Σ herstellen, in welcher jene diesen entsprechen.

Wir beziehen erstens den Netzebüschel durch $\Gamma_1\Gamma_2$ so projectiv auf den Ebenenbüschel um A_1A_2, dass den Netzen $\Gamma_1\Gamma_2(\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5)$ die Ebenen $A_1A_2(A_3, A_4, A_5)$, zweitens den Netzebüschel durch $\Gamma_1\Gamma_3$ so auf den Ebenenbüschel A_1A_3, dass den Netzen $\Gamma_1\Gamma_3(\Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_5)$ die Ebenen $A_1A_3(A_2, A_4, A_5)$, und endlich den Netzebüschel durch $\Gamma_2\Gamma_3$ so auf den Ebenenbüschel A_2A_3, dass den Netzen $\Gamma_2\Gamma_3(\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_5)$ die Ebenen $A_2A_3(A_1, A_4, A_5)$ correspondiren. Jedem Gewinde Γ des Gebüsches S_3 ist dann der Punkt A zugeordnet, in den die 3 Ebenen durch A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 zusammenlaufen, welche den nach Γ gehenden Netzen der 3 Netzebüschel durch $\Gamma_1\Gamma_2$, $\Gamma_1\Gamma_3$, $\Gamma_2\Gamma_3$ entsprechen.

Durchläuft nun Γ einen Büschel S_1 in S_3, so werden die 3 Netzebüschel unter einander projectiv, derartig, dass je drei Netze sich entsprechen, die nach demselben Gewinde von S_1 hingehen; da nun S_1 mit dem Netze $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ auch ein Gewinde gemein hat, so entspricht in den jetzigen Projectivitäten dieses Netz sich selbst. Daher werden auch die 3 Ebenenbüschel A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 projectiv, derartig, dass 3 Ebenen einander entsprechen, welche in den früheren Projectivitäten zwischen $\Gamma_1\Gamma_2$ und A_1A_2, u. s. w. 3 Netzen entsprechen, die jetzt zu einander homolog sind, d. h. nach demselben Gewinde von S_1 hingehen. Also entspricht die Ebene $A_1A_2A_3$, welche in allen 3 früheren Projectivitäten dem Netze $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ correspondirt, sich selbst.

Folglich erzeugen je zwei der 3 projectiven Büschel A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 einen Strahlenbüschel und alle drei eine Gerade durch die Schnitte entsprechender Ebenen.

Jedem Büschel des Gebüsches S_3 correspondirt also eine Gerade im Punktraume Σ.

Ein Netz lassen wir entstehen durch die Büschel, welche von einem festen Gewinde nach den einzelnen Gewinden eines Büschels S_1 hingehen; diesen Büscheln entsprechen also die Strahlen von einem festen Punkte nach den einzelnen Punkten einer Geraden; folglich entspricht einem Netze des Gebüsches eine Ebene im Punktraume.

Damit ist die collineare Beziehung zwischen S_3 und Σ erreicht.

142 Da ein Netz und ein Büschel eines Gebüsches von Gewinden ein Gewinde gemein haben, so *construirt man das ganze Gebüsche aus seinen 4 Constituenten, wenn man*

1) *eine von ihnen, etwa Γ_1, durch Büschel mit allen Gewinden Γ_x des Netzes verbindet, das durch die 3 andern constituirt wird;* denn der Büschel, welcher Γ_1 mit irgend einem Gewinde Γ von S_3 verbindet, hat mit dem Netze $\Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$ ein Gewinde Γ_x gemein;

2) *wenn man zwei der Constituenten, etwa Γ_1, Γ_2, mit allen Gewinden Γ_x des Büschels $\Gamma_3 \Gamma_4$ der beiden übrigen durch Netze, oder,* was infolge der Büschelerzeugung eines Netzes auf dasselbe hinauskommt, *wenn man alle Gewinde Γ_y von $\Gamma_1 \Gamma_2$ mit allen Γ_x von $\Gamma_3 \Gamma_4$ durch Büschel verbindet;* denn das Netz, welches von irgend einem Gewinde Γ von S_3 mit $\Gamma_1 \Gamma_2$ bestimmt wird, hat mit dem Büschel $\Gamma_3 \Gamma_4$ ein Gewinde Γ_x gemein.

Hieraus folgt, dass *die Polaren einer Geraden l in Bezug auf alle Gewinde eines Gebüsches ein Gewinde erzeugen;* denn wenn l_1, l_2, l_3, l_4, l_x die Polaren von l nach Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_x sind, so wird der Ort der Polaren durch alle Regelschaaren $(l l_1 l_x)$ erzeugt, bei denen l_x das Strahlennetz $(l l_2 l_3 l_4)$ durchwandert, oder durch alle Strahlennetze $(l l_1 l_2 l_x)$, deren l_x die Regelschaar $(l l_3 l_4)$ beschreibt (Nr. 92, 105, 130).

Damit haben wir die Abbildung des Gebüsches S_3 auf ein Gewinde. Und weiter ersieht man, dass *es in einem Gebüsche stets ein Gewinde giebt, in Bezug auf welches eine gegebene Gerade ihre Polare in einem gegebenen Strahlenbüschel hat.*

143 Denken wir (Nr. 138) die sämmtlichen Gewinde von S_3 durch den festen Büschel (A, α) und den veränderlichen (B, β) erzeugt, so sind die Strahlen b, welche je dem festen Strahle a von (A, α) homolog sind, die Polaren in Bezug auf die verschiedenen Gewinde; also erfüllen dieselben ebenfalls ein Gewinde, zu dem a gehört.

Ist nun g wiederum eine gegebene Gerade, so soll der Inbegriff der sie enthaltenden Gewinde des Gebüsches ermittelt werden. Der von ihr getroffene Strahl von (A, α) sei a; die g treffenden Geraden des a zugehörigen Gewindes der b erzeugen ein Strahlennetz, zu welchem auch a gehört. Indem wir jeden Strahl desselben mit α in B schneiden und mit A durch β verbinden, werden das Feld (α) und der Bündel (A) reciprok bezogen. Denn jede Ebene β von (A) enthält nur einen Strahl des Netzes und dieser liefert einen Punkt B in (α); ebenso umgekehrt. Beschreibt β einen Ebenenbüschel in (A), so durchläuft der in ihr gelegene Strahl des Netzes eine Regelschaar, zu welcher

auch a gehört, also seine Spur in (α) eine Gerade. Die Büschel (B, β), deren Scheitel und Ebene in dieser Reciprocität entsprechend sind und die einen Strahl b des Netzes enthalten, erzeugen also mit (A, α), wenn sie so projectiv auf diesen Büschel bezogen werden, dass die von den gemeinsamen Geraden g', g'' getroffenen Strahlen einander entsprechen und der gemeinsame Strahl sich selbst, — die von g getroffenen a und b thun es infolge der Construction — die Gewinde eines Netzes.

Alle Gewinde eines Gebüsches, welche eine Gerade g gemein haben, bilden ein Netz; Grund-Regelschaar ist $(gg'g'')$.

Demnach bilden alle diejenigen, welche zwei Gerade g, g_1 gemeinsam haben, einen Büschel; Grund-Strahlennetz ist $(gg_1g'g'')$; insbesondere entsteht auch durch alle Gewinde eines Gebüsches, die durch einen gegebenen Strahlenbüschel gehen, ein Büschel.

Zu den 4 Constituenten eines Gebüsches S_3 und also, weil das- 144
selbe ja büschelweise erzeugt werden kann, zu allen Gewinden des Gebüsches oder kurz zum Gebüsche, sind ∞^1 Gewinde in Involution, welche nothwendig, infolge der Grundeigenschaft sich stützender Gewinde, einen Büschel bilden müssen.

S_3 enthält ∞^2 Strahlengebüsche und deren Axen müssen, weil g', g'' zu allen gehören, diese beiden Grundgeraden von S_3 treffen, und umgekehrt gehört jedes Strahlengebüsche, dessen Axe die Grundgeraden g', g'' von S_3 trifft, zu S_3, weil damit diese beiden Geraden Strahlen des Gebüsches werden.

Die Leitgeraden der Strahlengebüsche, die sich in einem linearen Systeme 3. Stufe S_3 von Gewinden befinden, erfüllen das Strahlennetz $[g', g'']$, dessen Leitgerade die Grundgeraden des S_3 sind.

Alle diese Geraden müssen nun zu allen Gewinden gehören, welche zu S_3 in Involution sind; also:

Der Büschel von Gewinden, der zu einem Gebüsche von Gewinden in Involution ist, geht durch das Strahlennetz, dessen Leitgerade die Grundgeraden des Gebüsches sind (vergl. Nr. 137).

Jedes Gebüsche von Gewinden ist mit einem Büschel, und jeder Büschel mit einem Gebüsche verbunden, und demnach ist die Zahl der Gebüsche die nämliche, wie die der Büschel oder Strahlennetze: ∞^8 (Nr. 88).

Andererseits: jedes Gebüsche kann auf $\infty^{4.3}$ Weise durch 4 Gewinde constituirt werden. An sich lassen sich 4 Gewinde auf $\infty^{5.4}$ Weisen zusammenstellen; also ist die Mächtigkeit der Gebüsche ∞^{20-12}.

Zu jedem Gewinde Γ eines Gebüsches haben wir in jedem der ∞^2

Büschel des Gebüsches, die von ihm ausgehen, je ein Gewinde, das zu Γ in Involution ist (Nr. 107); diese ∞^2 Gewinde bilden ein Netz, in welchem es ∞^3 Gruppen von 3 Gewinden giebt, die sich gegenseitig stützen (Nr. 132); also *enthält das Gebüsche ∞^6 Gruppen von je 4 Gewinden, die sich gegenseitig stützen*, und da jede solche Gruppe ein Gebüsche constituirt, haben wir ∞^{14} solche Gruppen im Raume (vergl. Nr. 132). Zu jeder können wir aus dem Büschel, der zu ihr und ihrem Gebüsche in Involution ist, ∞^1 Paare sich gegenseitig stützender Gewinde herausnehmen und haben so wieder die ∞^{15} Gruppen von je 6 Gewinden, die gegenseitig in Involution sind. —

Wenn die beiden Grundgeraden eines Gebüsches einander schneiden, so haben alle Gewinde desselben den durch sie bestimmten Strahlenbüschel gemeinsam, und wir erhalten so den interessanten Specialfall *des Inbegriffs aller Gewinde, welche einen Strahlenbüschel oder einen Punkt und seine Nullebene gemeinsam haben.*

Der Büschel, der zu einem solchen linearen Systeme 3. Stufe in Involution ist, besteht aus lauter Gebüschen, welche die Strahlen des „Grund-Strahlenbüschels" des Systems zu Leitgeraden haben.

145 Das Gebüsche wollen wir nun auch dazu benutzen, um festzustellen, dass *die 3 Gewinden gemeinsame Regelschaar auch ganz imaginär sein kann und in welcher Weise der Uebergang von reellen zu imaginären Regelschaaren stattfindet.*

Es seien Γ_1, Γ_2, Γ_3 derartig, dass keiner der 3 verbindenden Büschel ein reelles Gebüsche enthält (Nr. 126); mag nun die gemeinsame Regelschaar reell oder imaginär sein, jedenfalls giebt es Gerade, welche sie nicht reell schneiden. Sei l eine solche Gerade und Γ_4 das Strahlengebüsche, das sie zur Axe hat. Also sind die Grundgeraden g', g'' des Gebüsches $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$ imaginär. Wenn Γ_x den Büschel $\Gamma_3 \Gamma_4$ durchläuft, so haben die Trägerflächen der Regelschaaren $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_x$ diese Grundgeraden g', g'' und die beiden ebenfalls imaginären Leitgeraden l', l'' des Strahlennetzes $\Gamma_1 \Gamma_2$ gemein. Jeder Fläche dieses Flächenbüschels und ihrer g', g'' enthaltenden Regelschaar entspricht ein Gewinde Γ_x von $\Gamma_3 \Gamma_4$, bestimmt durch irgend eine Gerade dieser Regelschaar, und umgekehrt. Zu dem Flächenbüschel gehören auch zwei Ebenenpaare aus conjugirt imaginären Ebenen $g'l'$, $g''l''$; $g'l''$, $g''l'$, welche durch ihre reellen Doppelgeraden, von denen die eine die conjugirt imaginären Punkte $g'l''$ und $g''l'$, die andere die ebenfalls conjugirten Punkte $g'l'$ und $g''l''$ verbindet, reelle entsprechende Gewinde Γ_0, Γ_{00} im Büschel $\Gamma_1 \Gamma_2$ bestimmen.

Diese Ebenenpaare bilden im Flächenbüschel den Uebergang von

den einmanteligen Hyperboloiden zu den imaginären Ellipsoiden, — denn nur diese haben rein imaginäre Geraden und zwar jene neben reellen, diese ohne solche; die zweimanteligen Hyperboloide und die reellen Ellipsoide haben nur punktirte Geraden — und die Regelschaaren gehen von reellen über durch ein Paar von imaginären Strahlenbüscheln mit reellem gemeinsamen Strahle $(g'l'', g'l')$ *), $(g''l', g''l'')$, bezw. $(g'l', g'l'')$, $(g''l'', g''l')$ zu ganz imaginären. Das Hyperboloid hat sich, immer enger werdend, beim Uebergange auf seine nicht reell schneidende Axe zusammengezogen.

Da Γ_4, als Gebüsche, mit $\Gamma_1 \Gamma_2$ eine reelle Schaar gemein hat, (Nr. 126), so ist die Regelschaar $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ reell oder imaginär (d. h. zu einem reellen einmanteligen Hyperboloide oder zu einem imaginären Ellipsoide gehörig), je nachdem im Continuum der Gewinde des Büschels $\Gamma_3 \Gamma_4$ das Gewinde Γ_3 von Γ_4 durch keins der beiden Gewinde Γ_0, Γ_{00} getrennt, oder durch eins getrennt wird, oder je nachdem, wenn g_3, g_4, g_0, g_{00} die 4 Strahlen sind, welche diese Gewinde einem beliebigen Strahlenbüschel zusenden, die Paare $g_3 g_4$, $g_0 g_{00}$ eine hyperbolische oder elliptische Involution bestimmen oder, kürzer, hyperbolisch oder elliptisch liegen.

Ist die Grund-Regelschaar imaginär, so hat das Netz kein einziges reelles Strahlengebüsche.

Ein Gebüsche von Gewinden aber enthält immer ∞^2 *reelle Strahlengebüsche*, da das Strahlennetz $[g', g'']$, das durch die Axen derselben erzeugt wird, reell ist, mögen die Grundgeraden g', g'' des Gebüsches reell, oder conjugirt imaginär sein.

Wir haben nun den Complex zu untersuchen, der durch die Axen 146
eines Gebüsches S_3 von Gewinden gebildet wird.

Es sei (P, ε) ein beliebiger Strahlenbüschel, $\mathfrak{P}$ ein Punkt, der die $\varepsilon\mathfrak{E}$ durchläuft; dann dreht sich die zu $P\mathfrak{P}$ normale Ebene π, die durch P geht, um die Senkrechte g_0 auf ε in P. Jeder der Strahlenbüschel (P, π) scheidet aus S_3 einen Büschel S_1 aus, dessen Gewinde durch ihn gehen (Nr. 143). Alle diese Büschel befinden sich in dem Netze S_2 der Gewinde von S_3, welche g_0 enthalten; zur Grund-Regelschaar desselben gehört g_0; und die Gerade l_0 der Leitschaar, welche durch P geht (d. i. der Strahl aus P nach dem Netze $[g', g'']$), ist Axe eines Strahlengebüsches, zu dem alle ∞^1 Strahlenbüschel (P, π) gehören und welches deshalb allen S_1 gemeinsam ist. Die $\mathfrak{E}$-Nullpunkte der Gewinde eines solchen Büschels liegen auf einer Geraden $\mathfrak{u}$ und

*) $(g'l'', g'l')$ ist der Strahlenbüschel mit dem Scheitel $g'l''$ und der Ebene $g'l'$.

diese Geraden bilden in 𝔈 einen Strahlenbüschel um den 𝔈-Nullpunkt des Gebüsches $[l_0]$. Derselbe ist ersichtlich zu dem Ebenenbüschel der π und zur Punktreihe der 𝔓 projectiv und zweimal geht deshalb ein Strahl 𝔲 durch den entsprechenden 𝔓; dann ist 𝔓 Nullpunkt von 𝔈 in Bezug auf ein Gewinde desjenigen Büschels S_1, der durch den Büschel (P, π) geht, dessen Ebene π zu P𝔓 normal ist; d. h. P𝔓 ist Axe dieses Gewindes. In den Büschel (P, ε) fallen also 2 Axen.

Die Axen der Gewinde eines linearen Systems 3. Stufe S_3 von Gewinden bilden einen Complex 2. Grades.

Zu demselben gehört das Strahlennetz $[g', g'']$, dessen Leitgerade die Grundgeraden von S_3 sind, vollständig, weil es durch die Axen der Gebüsche von S_3 gebildet wird.

Da dieses Strahlennetz einen Strahl 𝔥 in 𝔈 hat, so enthält S_3 ein Strahlengebüsche mit unendlich ferner Treffgeraden und also ∞^2 Axen, von welchen die einen den Bündel der sämmtlichen Normalen zu den Ebenen nach jener Geraden, die andern das Strahlenfeld in 𝔈 bilden (Nr. 125).

Folglich gehört zu unserm Complexe der Bündel aller Parallelen zum Hauptstrahle h des Strahlennetzes $[g', g'']$ und das unendlich ferne Strahlenfeld.

Letzteres lehrt, dass *alle endlichen Axen von Gewinden des Gebüsches, die von einem unendlich fernen Punkte 𝔘 herkommen, einen Strahlenbüschel bilden.*

Das ist unmittelbar ersichtlich; denn alle Gewinde von S_3, für welche 𝔘 der 𝔈-Nullpunkt ist, d. h. die den Strahlenbüschel (𝔘, 𝔈) enthalten, bilden einen Büschel S_1. Jener Strahlenbüschel projicirt die gerade Punktreihe der Nullpunkte, in Bezug auf die verschiedenen Gewinde von S_1, einer Ebene, die zur Richtung nach 𝔘 normal ist.

In Bezug auf alle Strahlen dieses Complexes haben g' und g'' je gleichen Parameter, da sie zugleich in jedem der Gewinde sind, die diese Strahlen zu Axen haben. *Also ist er identisch mit dem in Nr. 122, 123 betrachteten Complexe A^2; er gehört nicht blos zum Gebüsche (g', g''), sondern noch zu ∞^1 andern,* deren Grundgeraden aus g', g'' so construirt werden, wie a. a. O. die u_1, v_1 aus den u, v.

Zu diesem quadratischen Complexe gehören aber auch die beiden Strahlennetze der Geraden, welche g', bezw. g'' rechtwinklig schneiden. Denn das Gewinde, welches g'' enthält und eine g' rechtwinklig schneidende Gerade zur Axe hat, enthält deshalb auch g'.

Sind daher g', g'', g''' drei beliebige Geraden, so haben die beiden zu g' und g'', bezw. zu g' und g''' gehörigen Complexe, ausser dem Strahlenfeld in der unendlich fernen Ebene und dem Strahlennetze

der g' rechtwinklig schneidenden Geraden, noch eine Congruenz 3. Ordnung 2. Klasse gemein, die Congruenz der Axen der Gewinde durch die Regelschaar $(g'g''g''')$ (Nr. 134).

Die Gewinde, welche eine gemeinsame Axe g' haben, bilden einen Büschel (Nr. 125); folglich giebt es in jedem Strahlenbüschel einen Strahl, der einen bestimmten Werth des Parameters in Bezug auf g' hat. Daraus erhellt, dass die beiden Büschel, welche g', bezw. g'' zur gemeinsamen Axe aller ihrer Gewinde haben, zu einander projectiv sind mit solchen Gewinden als entsprechenden, die denselben Parameter besitzen. Unser quadratischer Complex ist daher der Ort der Strahlennetze, in denen entsprechende Gewinde dieser Büschel sich durchschneiden (vergl. Nr. 159). Im Strahlennetze $[g', g'']$ schneiden sich die Gewinde vom Parameter 0, im unendlich fernen Felde und dem Bündel der Parallelstrahlen zu h die beiden vom Parameter ∞, die Gebüsche der zu g', bezw. g'' rechtwinkligen Strahlen.

Das lineare System vierter Stufe (Gewebe) von Gewinden und der Inbegriff aller Gewinde.

I.

Zu einem *linearen Systeme 4. Stufe S_4 von Strahlengewinden*, von 147
Reye*) lineares Gewebe von Complexen genannt, führt uns der Inbegriff der ∞^4 Gewinde, welche sich auf ein gegebenes Gewinde A stützen; weil eben in jedem Büschel, welcher zwei von diesen Gewinden verbindet, alle Gewinde in Involution zu A sind.

Gehen wir aber von 5 gegebenen Gewinden $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_5$ aus, so werden wir das durch sie constituirte System S_4 am besten erhalten, wenn wir alle Gebüsche $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_x$ herstellen, deren veränderliche Constituente Γ_x den Büschel $\Gamma_4\Gamma_5$ durchläuft.

Die verschiedenen Gewinde Γ_x schneiden in die Grund-Regelschaar G_{123} des Netzes $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ die Paare der Grundgeraden $g_x'g_x''$ jener Gebüsche ein und dadurch wird diese Regelschaar involutorisch; denn jede Gerade der Regelschaar als g_x' oder g_x'' bestimmt die andere eindeutig und in gleicher Weise.

Demnach haben wir erstens den Satz:

*) Journal f. Mathematik Bd. 95 S. 334. — Ich werde es kurz „*Gewebe*“ ohne „linear“ nennen, um so für alle 4 Stufen linearer Systeme von Gewinden einen bequemeren Namen zu haben.

Die Paare der Geraden, welche eine Regelschaar mit den verschiedenen Gewinden eines Büschels gemein hat, bilden eine Involution,

und zweitens folgende Entstehungsweise eines linearen Systems 4. Stufe von Gewinden:

Sämmtliche Gebüsche von Gewinden, welche je zwei gepaarte reelle oder conjugirt imaginäre Geraden einer involutorischen Regelschaar zu Grundgeraden haben, bilden ein lineares System 4. Stufe von Gewinden.

Da also die Leitgerade eines Strahlengebüsches dieses Systems S_4 zwei zusammengehörige Grundgeraden trifft und umgekehrt jede Gerade, die dies thut, Leitgerade eines Strahlengebüsches von S_4 ist, so hat man (Nr 71):

Die Leitgeraden der Strahlengebüsche eines linearen Systems 4. Stufe von Gewinden bilden selbst ein Gewinde A.

Wenn die 5 constituirenden Gewinde einen Strahl gemein haben, so wird die involutorische Regelschaar parabolisch und alle Gewinde von S_4 enthalten diesen Strahl. Wir nennen ein solches specielles Gewebe *Gewebe mit Grundstrahl.*

148 Es sei wiederum (A, α) ein beliebiger Strahlenbüschel, (B, β) einer von den ∞^3 Strahlenbüscheln, welche mit ihm einen Strahl gemein haben. So stellen wir zwischen (A, α) und (B, β) die Projectivität her, in der dieser Strahl c sich selbst entspricht und die Strahlen von (B, β), welche irgend zwei gepaarte Geraden $g_x' g_x''$ der involutorischen Regelschaar G_{123} treffen, den Geraden von (A, α) correspondiren, die bezw. dasselbe thun; wir erhalten so die sämmtlichen Gewinde eines der obigen Gebüsche $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_x$ und wenn wir $g_x' g_x''$ durch die involutorische Regelschaar bewegen, unser ganzes Gewebe S_4.

Es seien (B_6, β_6), (B_7, β_7) irgend zwei der möglichen Büschel (B, β), g_6', g_6''; g_7', g_7'' die Paare der involutorischen Regelschaar, die zur Bestimmung der Projectivität zwischen (B_6, β_6), bezw. (B_7, β_7) und (A, α) dienen, und Γ_6, Γ_7 die erzeugten Gewinde; ferner sei B ein Punkt von $B_6 B_7$ und β die Ebene, die ihn mit $\beta_6 \beta_7$ verbindet. Dann hat (B, β) auch einen Strahl mit (A, α) gemein und der Büschel $\Gamma_6 \Gamma_7$ enthält ein Gewinde Γ, das vermittelst der Strahlenbüschel (A, α), (B, β) entsteht. Dieser Büschel schneidet ferner in die Regelschaar G_{123} eine Involution, von welcher g_6', g_6''; g_7', g_7'' zwei Paare sind, die also mit der obigen identisch ist; folglich schneidet auch Γ ein Paar g', g'' dieser Involution ein. In der Projectivität zwischen (A, α) und (B, β), welche Γ erzeugt, sind also auch die von g', g'' getroffenen Strahlen dieser Büschel homolog; d. h. Γ gehört zu S_4.

Der Büschel, der zwei Gewinde eines Gewebes S_4 verbindet, gehört ganz zu demselben.

Und da ein Netz, ein Gebüsche aus ihren Constituenten büschelweise hergestellt werden können, so folgt weiter:

Das Netz oder das Gebüsche, das durch 3, bezw. 4 Gewinde eines Gewebes S_4 constituirt wird, gehört ganz zu demselben.

Weil der Büschel $\Gamma_6 \Gamma_7$ dieselbe involutorische Regelschaar in G_{123} hervorruft, wie $\Gamma_4 \Gamma_{5'}$, so sehen wir, dass bei der Herstellung des Systems S_4 dieser Büschel durch jenen, also jeden beliebigen Büschel von S_4 ersetzt werden kann.

Der Inbegriff aller Gewinde des Systems S_4, welche durch eine 149
gegebene Gerade g' gehen, wird durch alle Netze gebildet, welche aus den erzeugenden Gebüschen $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_x$ oder kürzer $G_{123} \Gamma_x$ durch diejenigen ihrer Gewinde ausgeschieden, welche g' enthalten. Die Grund-Regelschaaren G_x dieser Netze sind durch g' und irgend zwei gepaarte Geraden $g_x' g_x''$ der involutorischen Regelschaar G_{123} bestimmt. Wir haben nachzuweisen, dass alle G_x noch eine zweite Gerade gemein haben.

Die zugehörigen Leitschaaren L_x haben ersichtlich alle die beiden von g' getroffenen Geraden l', l'' der Leitschaar L_{123} von G_{123} gemein; also folgt zunächst, dass auch zwei G_x ausser g' noch eine zweite Gerade gemein haben; g'' sei diejenige, die zweien von diesen Regelschaaren, G_1, G_2, gemeinsam ist. F_1, F_2 seien die Trägerflächen von G_1, G_2; alle Flächen des Büschels $F_1 F_2$, welcher das Vierseit $l' l'' g' g''$ zur Basis hat, haben mit L_{123} zwei Gerade gemein, nämlich sämmtlich die beiden Geraden l', l'', also nach Steiner's Satz auch zwei Gerade mit G_{123}, und da diese beiden Geraden sich gegenseitig eindeutig und gleichartig bestimmen, so bilden sie eine Involution, welche mit der vorhandenen der $g_x' g_x''$ die beiden Paare g_1', g_1''; g_2', g_2'' gemein hat, also mit ihr identisch ist; folglich sind die Flächen unseres Büschels diejenigen, welche die Schaaren G_x tragen, und diese haben alle g'' gemein. Also:

Alle Regelschaaren, welche durch eine feste Gerade g' und je die Paare einer involutorischen Regelschaar gehen, haben noch eine zweite Gerade g'' gemein.

Und:

Alle Gewinde eines linearen Systems 4. Stufe S_4, welche durch eine Gerade g' hindurchgehen, gehen noch durch eine zweite g'' und bilden also ein Gebüsche in S_4. Und folglich bilden alle diejenigen, welche durch 2, 3 gegebene Geraden hindurch gehen, ein Netz, einen Büschel im Gewebe S_4.

Durch 4 Gerade wird aus S_4 ein Gewinde ausgeschieden.

Ein Gebüsche und ein Büschel von S_4 haben ein Gewinde gemein: es ist dasjenige des Büschels, das durch eine der Grundgeraden des Gebüsches geht.

Daraus folgt wiederum, dass *man ein beliebiges Netz des Gewebes S_4 mit allen Gewinden eines beliebigen Büschels von S_4 verbinden kann, um S_4 zu erzeugen.*

150 *Durch jedes Netz des Gewebes S_4 gehen also ∞^1 Gebüsche desselben: ein Büschel von Gebüschen des Gewebes.* Die einzelnen Gewinde eines beliebigen Büschels S_1 von S_4 bestimmen mit dem Netze die Gebüsche. Die sich so ergebende eindeutige Beziehung der Gebüsche auf die Gewinde des Büschels, bei der jedes Gebüsche dem Gewinde entspricht, durch welches es geht, lehrt, dass *ein solcher Büschel von Gebüschen projectiv bezogen werden kann;* wir werden dies bald benutzen, um zu erkennen, dass und wie S_4 auf ein anderes lineares Gebilde 4. Stufe collinear bezogen werden kann.

Ebenso folgt aus dem obigen Satze, dass *von jedem Gewinde des S_4 ∞^3 Büschel ausstrahlen, die zu S_4 gehören;* sie gehen nach den verschiedenen Gewinden eines Gebüsches von S_4.

Auf der Grund-Regelschaar jedes Netzes von S_4 hat man eine Involution, welche durch jeden beliebigen Büschel von S_4 eingeschnitten wird, der mit dem Netze kein Gewinde gemein hat und also mit ihm zur Herstellung von S_4 benutzt werden kann.

Alle Gewinde von S_4, welche 2 Gerade g_1', g_2' der Grund-Regelschaar eines Netzes von S_4 enthalten, gehen durch die ganze Regelschaar und gehören zum Netze.

Denn da die Gewinde des Netzes durch g_1', g_2' gehen, so müssen die beiden Geraden g_1'', g_2'', durch welche nach dem obigen Satze (Nr. 149) alle g_1', g_2' enthaltenden Gewinde von S_4 gehen, der Grund-Regelschaar angehören; also haben alle fraglichen Gewinde mit derselben 4 Gerade gemein.

Ebenso gehört ein Gewinde des Gewebes S_4 zu einem Büschel desselben, wenn es durch 3 Strahlen des Grund-Strahlennetzes des Büschels geht.

Denn es hat dann 6 Strahlen mit demselben gemein. Es scheint, als wenn 2 Strahlen g_1', g_2' genügen, weil früher erkannt ist, dass ein Strahlennetz einem Gewinde ganz angehört, wenn es 4 Strahlen mit ihm gemein hat; aber das müssen 4 solche Strahlen sein, die ein Strahlennetz bestimmen, also nicht 4 Strahlen einer Regelschaar, wie das g_1', g_2', g_1'', g_2'' nach Obigem sein würden.*)

*) Wir erhalten analog bei S_3:
Ein Gewinde von S_3 gehört zu einem Netze, bezw. einem Büschel dieses Sy-

Also ist das gemeinsame Gewinde eines Gebüsches und eines Büschels des Systems S_4 auch dasjenige des ersteren, das durch 3 beliebige Strahlen des Grund-Strahlennetzes des letzteren geht.

Zwei Netze von S_4 haben, im allgemeinen, ein Gewinde gemein: dasjenige des einen, das durch zwei Gerade der Grund-Regelschaar des andern, also dasjenige von S_4, das durch zwei Gerade von jeder der beiden Grund-Regelschaaren geht.

Wenn sie zwei gemein haben, so gehört der verbindende Büschel zu beiden Netzen, und sie befinden sich dann in demselben Gebüsche von S_4, das wir durch zwei Gewinde dieses Büschels und je ein weiteres aus jedem der beiden Netze constituiren.

Durch jeden Büschel von S_4 gehen ∞^2 Netze von S_4.

Zwei Gebüsche des Gewebes haben ein Netz gemein: den Inbegriff aller Gewinde von S_4, die durch je eine Grundgerade des einen und des andern Gebüsches gehen.

Ein Gebüsche und ein Netz oder, was dasselbe ist, *3 Gebüsche von S_4 haben einen Büschel gemein.*

4 Gebüsche von S_4 haben ein Gewinde gemein.

Ein Netz und ein Büschel oder zwei Büschel eines S_4 sind ohne gemeinsames Gewinde, also „windschief gegen einander".

Wenn aber ein Netz und ein Büschel von S_4 ein, jedoch nur ein Gewinde gemein haben, so befinden sie sich in demselben Gebüsche von S_4, das durch das gemeinsame Gewinde, je zwei weitere aus dem Netze und ein weiteres aus dem Büschel constituirt wird. Zwei gemeinsame Gewinde bringen den Büschel ganz in das Netz.

Zwei Büschel aus S_4, welche durch dasselbe Gewinde gehen, „sich schneiden", gehören demselben Netze an.

Die Mächtigkeit der linearen Systeme 4. Stufe S_4 von Gewinden 151
und der niedrigeren linearen Systeme in einem S_4 wollen wir lieber durch eine allgemeine Betrachtung ermitteln, die auch die früheren Fälle mit umfasst.

Ein lineares System i^{ter} Stufe S_i von Gewinden hat $i+1$ Constituenten, die man aus seinen ∞^i Gewinden auf $\infty^{i(i+1)}$ Weisen wählen kann, so dass es auf so viele Weisen constituirt werden kann. Aus den ∞^5 Gewinden des Raumes kann man die $i+1$ Constituenten

stems, wenn es durch 1 Strahl der Grund-Regelschaar, bezw. durch 2 Strahlen des Grund-Strahlennetzes geht,

und bei S_2:

Ein Gewinde eines Netzes gehört zu einem Büschel desselben, wenn es durch 1 Strahl des Grund-Strahlennetzes geht.

auf $\infty^{5(i+1)}$ Weisen, aus den ∞^k Gewinden eines S_k auf $\infty^{k(i+1)}$ Weisen herausnehmen.

Es giebt daher $\infty^{(5-i)(i+1)}$ *lineare Systeme* i^{ter} *Stufe* S_i *von Gewinden im Raume, also* ∞^8 *Büschel,* ∞^9 *Netze,* ∞^8 *Gebüsche,* wie wir schon gefunden haben, *und* ∞^5 *lineare Systeme 4. Stufe. Ferner in einem linearen Systeme* k^{ter} *Stufe von Gewinden giebt es* $\infty^{(k-i)(i+1)}$ *Systeme* i^{ter} *Stufe* $(i < k)$, *also insbesondere stets* ∞^k S_{k-1}.

Wir haben ∞^2 *Büschel in einem Netze,* ∞^4 *Büschel und* ∞^3 *Netze in einem Gebüsche und endlich* ∞^6 *Büschel,* ∞^6 *Netze,* ∞^4 *Gebüsche in einem linearen Systeme* S_4 *von Gewinden.**)

152 Es kann nur noch eine endliche Zahl von Gewinden geben, die zu den 5 Constituenten eines S_4 und, weil dieses aus ihnen durch lineare Systeme niedrigerer Stufe erzeugt werden kann, zum ganzen Systeme in Involution sind; diese Zahl ist 1, weil 2 Gewinde von dieser Eigenschaft einen ganzen Büschel nach sich ziehen würden.

Zu jedem linearen Systeme 4. Stufe von Gewinden giebt es stets ein Gewinde, das zu ihm, d. h. zu allen seinen Gewinden in Involution ist (vergl. Nr. 147).

Die Axen der Strahlengebüsche von S_4 müssen sich nach Nr. 108 in diesem Gewinde befinden; nun erhielten wir aber in Nr. 147, dass diese Axen selbst ein Gewinde bilden.

Also ist das Gewinde, das zu einem gegebenen linearen Systeme 4. Stufe von Gewinden in Involution ist, das Gewinde A *der Leitgeraden der* ∞^3 *Strahlengebüsche in dem Gewebe.*

Die ∞^6 *Paare, die man aus den Strahlen von* A *bilden kann, sind die Paare der Leitgeraden der Grund-Strahlennetze der* ∞^6 *Büschel, die* ∞^6 *Regelschaaren von* A *die Leitschaaren der Grund-Regelschaaren der* ∞^6 *Netze und die* ∞^4 *Strahlennetze von* A *sind die Oerter der Axen der Strahlengebüsche in den* ∞^4 *Gebüschen des Gewebes.***)

Da diese Axen je sämmtlich die beiden Grundgeraden g', g'' des

*) Da die Zahl der Kegelschnitte in einer Ebene ebenfalls ∞^5 ist, so gelten dieselben Ergebnisse auch für die linearen Systeme von Kegelschnitten.

**) Mit jedem linearen Systeme k^{ter} Stufe $(k < 5)$ von Kegelschnitten ist, wie bekannt (Reye, Geometrie der Lage Abtheil. I 3. Aufl. S. 223ff.), durch eine ähnliche lineare Bedingung, zu deren Benennung Reye auch das Wort „stützen" anwendet, ein lineares System $(4-k)^{\text{ter}}$ Stufe verbunden, aber nicht derselben, sondern dualer Art; in dem einen sind die Kegelschnitte Punkt-, im andern Tangentengebilde.

In unserm Falle jedoch sind die Systeme in sich duale Gebilde und daher die beiden einander zugeordneten von gleicher Art, nur (im allgemeinen) in der Stufe verschieden.

Gebüsches treffen, so sind diese die Leitgeraden des betreffenden Strahlennetzes. Also auch:

Die ∞^4 Paare von Grundgeraden g', g'' der Gebüsche des Gewebes S_4 sind die Paare der Leitgeraden der Strahlennetze von A, oder kürzer:

Je zwei zusammengehörige Grundgeraden g', g'' eines Gebüsches des Gewebes sind in Bezug auf A polar.

Wie, aus einer involutorischen Regelschaar, ein Gewebe dadurch abgeleitet wird, dass man alle gepaarten Geraden der Regelschaar zu Grundgeraden eines Gebüsches macht; so wird das Gewinde A, das zum Gewebe in Involution ist, durch die involutorische Regelschaar erzeugt, d. h. ist dasjenige, dessen Strahlen je zwei gepaarte Geraden der Regelschaar zugleich treffen (Nr. 71).

In einem Gewebe giebt es stets ein Gewinde, welches durch zwei ge- 153
gebene Strahlenbüschel geht, oder, was dasselbe ist, für welches zwei gegebene Geraden polar sind.

Die Bedingung, zwei gegebene Geraden l, l' zu Polaren zu haben, ist für ein Gewinde vierfach, aber der Specialfall davon, dass eine Gerade l zu sich selbst polar ist oder dem Gewinde angehört, ist nur einfach. Dieser Widerspruch löst sich in folgender Weise auf. Wenn die beiden Geraden l und l' verschieden sind, so ist für das Gewinde ein Strahlennetz vollständig gegeben und damit kann man im allgemeinen Falle die Bedingung als äquivalent ansehen; durch das Strahlennetz werden die Punktreihe auf einer der beiden Geraden und der Ebenenbüschel um die andere projectiv gemacht; fällt aber l' mit l zusammen, so wird das Strahlennetz unbestimmt und erst dann festgelegt, wenn die Projectivität zwischen der Punktreihe auf l und dem Ebenenbüschel um l bestimmt wird, was auf ∞^3 Weisen möglich ist. *Also ist die Bedingung, dass die Gerade l zu sich polar sei, erst, wenn sie mit einer bestimmten Projectivität zwischen ihrer Punktreihe und ihrem Ebenenbüschel vereinigt wird, mit der Bedingung, dass l und l' polar seien, gleichwerthig.*

Wenn eine der beiden Geraden l und l' die unendlich ferne Gerade der zur andern senkrechten Ebenen ist, so wird diese Axe des Gewindes.

Es giebt also in einem Gewebe stets ein Gewinde, das eine gegebene Gerade zur Axe hat.

Oder, wir benutzen die involutorische Regelschaar, durch welche wir, nach Nr. 147, das Gewebe erzeugen; die Gewinde, welche eine gegebene Gerade zur Axe haben, schneiden in dieselbe Regelschaar eine zweite Involution ein; das gemeinsame Paar beider Involutionen giebt das Gewinde im Gewebe, das die gegebene Axe hat.

154 Hält man nun l' fest und lässt l den Raum durchwandern, so *hat man eine eindeutige Abbildung des Gewebes S_4 auf den Strahlenraum.* Jedem Gewinde des S_4 entspricht eine Gerade l und umgekehrt. Bewegt sich das Gewinde innerhalb S_4 in einem Büschel, einem Netze, oder einem Gebüsche, so durchläuft l eine Regelschaar (Nr. 105), ein Strahlennetz (Nr. 130), ein Strahlengewinde (Nr. 142).

Alle diese Gebilde gehen durch l', so dass dieser Strahl *ein singulärer Strahl der Abbildung ist;* ihm entspricht nicht blos ein Gewinde in S_4, wie jedem andern Strahle des Raumes, sondern ∞^3, die ein Gebüsche S_3' bilden, da sie alle l' enthalten. Dies Gebüsche S_3' hat mit jedem Büschel, Netze oder andern Gebüsche von S_4 ein Gewinde, einen Büschel, ein Netz gemein. Demnach ist bei der Abbildung eines Büschels von S_4 in eine Regelschaar l' nicht ausgezeichnet, wohl aber bei der Abbildung eines Netzes, bezw. Gebüsches von Gewinden in ein Strahlennetz, bezw. Strahlengewinde; dabei entspricht der l' ein ganzer Büschel im Netze, bezw. ein ganzes Netz im Gebüsche.

Weil die Regelschaar und das Gewinde, die einem Büschel, bezw. einem Gebüsche von S_4 entsprechen, ausser l' nur noch einen Strahl gemein haben, so zeigt sich auch hieraus, dass der Büschel und das Gebüsche ein Gewinde gemeinsam haben. Das Strahlennetz und das Gewinde, die einem Netze, einem Gebüsche von S_4 entsprechen, durchschneiden sich in einer durch l' gehenden Regelschaar; dieser entspricht der Büschel, welcher dem Netze und dem Gebüsche gemeinsam ist.

Welche Systeme aber von Gewinden in S_4 entsprechen einem Strahlen-Büschel, -Bündel oder -Felde des Raumes (l)?

Es seien l_1, l_2 zwei Strahlen eines Strahlenbüschels (L, λ) in (l), Γ_1, Γ_2 die Gewinde von S_4, in Bezug auf welche l_1, l_2 Polaren von l' sind; dann liegt der Nullpunkt der Ebene λ in Bezug auf beide auf l', oder beide Gewinde sowie sämmtliche übrigen des Büschels $\Gamma_1 \Gamma_2$ haben den Strahlenbüschel $(\lambda l', \lambda)$ gemein; daher ist der Punkt $\lambda l'$ ein Punkt der einen Leitgeraden des Grund-Strahlennetzes oder die Axe des einen Strahlengebüsches des Büschels $\Gamma_1 \Gamma_2$ trifft l'; in Bezug auf dieses hat dann l' nicht blos eine, sondern ∞^1 Polaren, welche einen Strahlenbüschel bilden (Nr. 59). Demnach zerfällt die dem Büschel $\Gamma_1 \Gamma_2$ zugehörige Regelschaar in diesen Strahlenbüschel und einen andern, zu dem l_1, l_2 gehören, der also (L, λ) ist.

Jedem Strahlenbüschel von (l) entspricht daher in S_4 ein Büschel, in dem sich ein Strahlengebüsche befindet, dessen Axe die Gerade l' trifft.

Das System S_4 enthält ∞^3 Strahlengebüsche, von denen ∞^2 die Gerade l' enthalten (und mit ihren Axen ein Strahlennetz erzeugen);

jedes gehört zu ∞^3 Büscheln von S_4. So ergeben sich ∞^5 derartige Büschel in S_4, so viel als es Strahlenbüschel in (l) giebt.

Wiederum seien l_1, l_2, l_3 drei (nicht zum selben Büschel gehörige) Strahlen eines Strahlenbündels L in (l); Γ_1, Γ_2, Γ_3 die Gewinde von S_4, nach denen sie Polaren von l' sind.

Die Nullebene von L nach allen dreien geht durch l' oder der Strahlenbüschel (L, Ll') ist ihnen gemeinsam. Daraus folgt, dass die gemeinsame Regelschaar G_{123} in diesen Büschel und einen zweiten zerfällt. Die Leitschaar aber einer in zwei Strahlenbüschel zerfallenden Regelschaar besteht ebenfalls aus zwei Strahlenbüscheln mit denselben Ebenen und denselben Scheiteln, aber vertauscht; denn so allein kann das Schneiden der Geraden der einen Schaar mit denen der andern bestehen.

Folglich haben wir in der Ebene Ll' ∞^1 Axen von Strahlengebüschen des Netzes $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ (Nr. 126) und da diese die l' treffen, so hat jedes dieser Strahlengebüsche ∞^1 Polaren von l'. Alle diese ∞^2 Polaren erfüllen das Strahlenfeld der Ebene Ll'. Das Strahlennetz also der Polaren von l' nach den Gewinden von $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ zerfällt in dieses Feld und demnach noch einen Bündel, und zwar L, da l_1, l_2, l_3 zu ihm gehören.

Einem Strahlenbündel in (l) entspricht im Gewebe S_4 ein Netz von Gewinden, welches ∞^1 Strahlengebüsche enthält, deren Leitgeraden die in einer Ebene durch l' liegenden Strahlen des Strahlengewindes Λ sind (Nr. 147).

Constituirt man aus zwei solchen Gebüschen von S_4, deren Axen in einer Ebene λ' durch l' liegen, den Büschel, so besteht derselbe, da die Axen sich schneiden, aus lauter Gebüschen, deren Axen den ganzen Strahlenbüschel von Λ in λ' erfüllen. Dieser Büschel gehört zu ∞^2 Netzen von S_4 (Nr. 150); dreht man nun noch λ' um l', so ergeben sich die ∞^3 Netze von S_4, welche den ∞^3 Strahlenbündeln von (l) correspondiren.

Ebenso entspricht, dual, einem *Strahlenfelde* von (l) in S_4 ein Netz von Gewinden, welches ∞^1 Strahlengebüsche enthält, deren Axen die Gerade l' alle in demselben Punkte treffen und den Strahlenbüschel von Λ aus diesem Punkte bilden.

Aus den Büscheln, Netzen und Gebüschen von S_4 ergeben sich nicht alle Regelschaaren, Strahlen-Netze und -Gewinde von (l), sondern nur diejenigen, welche durch l' gehen. Die Strahlenbüschel von (l) sind Theile solcher Regelschaaren, ebenso die Bündel und Felder Theile solcher Strahlennetze.

Also haben wir zu untersuchen, *welche Systeme in S_4 einer be-*

liebigen Regelschaar, einem beliebigen Strahlen-Netze oder -Gewinde von (l) entsprechen.

Weil das einem Gebüsche von S_4 entsprechende Strahlengewinde in (l) mit einer Regelschaar dieses Raumes zwei Strahlen gemein hat, so entspricht der Regelschaar ein einstufiges System von Gewinden in S_4, das jedes Gebüsche zweimal durchschneidet.

Das einem Netze S_2 von S_4 entsprechende Strahlennetz von (l) hat mit einem beliebigen Strahlennetze von (l) 2 Strahlen gemein; folglich entspricht diesem ein zweistufiges System von Gewinden in S_4, das mit jedem Netze dieses Systems 2 Gewinde gemeinsam hat. Und ebenso entspricht einem beliebigen Strahlengewinde von (l) ein dreistufiges System in S_4, welches jeden Büschel von S_4 zweimal durchschneidet.

Eine andere eindeutige Abbildung des Systems S_4 in den Strahlenraum ergiebt sich, wenn wir jedem Gewinde seine Axe entsprechen lassen.

Wir erinnern, dass dann jedem Büschel, Netze oder Gebüsche von S_4, im allgemeinen, eine cubische Regelfläche, eine Strahlencongruenz 3. Ordnung 2. Klasse, ein Complex 2. Grades entspricht; im übrigen wollen wir jedoch diese Abbildung nicht weiter verfolgen.

155 Wir wenden uns jetzt zu der oben schon angeregten Frage, *ob und wie ein solches lineares System 4. Stufe S_4 von Gewinden collinear beziehbar ist* z. B. auf ein anderes S_4'*)

Wir nehmen 6 Gewinde $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ aus dem ersten und ebenso 6 aus dem zweiten: $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_6'$ heraus.

Es ergab sich oben (Nr. 150), dass durch ein Netz von S_4 ∞^1 Gebüsche des Gewebes gehen und ein solcher Büschel von Gebüschen projectiv beziehbar wird, indem jedes von seinen Gebüschen eindeutig demjenigen Gewinde irgend eines Büschels von S_4 entspricht, durch das es geht. Wir beziehen daher die 4 Büschel von Gebüschen des Gewebes S_4, die durch die 4 Netze $\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$, $\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_1$, $\Gamma_4\Gamma_1\Gamma_2$, $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ oder, mit einfacherer Bezeichnung, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{N}_4$, gehen, also die 4 Büschel $(\mathfrak{N}_1)$, $(\mathfrak{N}_2)$, ... auf die gleichnamigen Gebüsche von S_4' so projectiv, dass das Gebüsche $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$ dem Gebüsche $\Gamma_1'\Gamma_2'\Gamma_3'\Gamma_4'$ entspricht und je die beiden nach Γ_5, Γ_6 gehenden Gebüsche den nach Γ_5', Γ_6' gehenden.

4 Gebüsche in einem Gewebe haben nur ein Gewinde gemein

*) oder auch auf ein lineares System 4. Stufe von Curven 2. Ordnung oder Klasse, oder auf den Inbegriff aller Kugeln, und dergl.

(Nr. 150); also können wir einem beliebigen Gewinde Γ von S_4 nun dasjenige Gewinde Γ' von S_4' entsprechen lassen, in dem die 4 Gebüsche von S_4' sich schneiden, welche in den 4 Projectivitäten den 4 nach Γ gehenden entsprechen. Eine eindeutige Zuordnung der Gewinde des einen Systems auf diejenigen des andern ist damit erreicht.

Wenn Γ nun in S_4 in einem Büschel S_1 sich bewegt, dann werden die 4 „projicirenden“ Büschel von Gebüschen $(\mathfrak{N}_1)$, $(\mathfrak{N}_2)$, ... unter einander projectiv und das gemeinsame Gebüsche $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$, weil es mit S_1 ein Gewinde gemein hat, sich selbst entsprechend; folglich werden auch die 4 Büschel von Gebüschen $(\mathfrak{N}_1')$, $(\mathfrak{N}_2')$, ... in S_4', welche zu jenen beziehlich projectiv sind, unter einander projectiv mit dem gemeinsamen Gebüsche $\Gamma_1' \Gamma_2' \Gamma_3' \Gamma_4'$ als sich selbst entsprechendem, da es dem $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$ in allen 4 Projectivitäten zwischen $(\mathfrak{N}_1)$ und $(\mathfrak{N}_1')$, ... entspricht.

Der Schnitt Γ' entsprechender Gebüsche dieser 4 projectiven Büschel von Gebüschen in S_4' muss einen Büschel durchlaufen, denn wenn Γ_7', Γ_8' zwei Gewinde des von Γ' durchlaufenen einstufigen Systems sind, so macht der Büschel $\Gamma_7' \Gamma_8'$ die vier Büschel $(\mathfrak{N}_1')$, ... von Gebüschen auch unter einander projectiv und zwar mit denselben entsprechenden Gebüschen wie vorhin; da sowohl das gemeinsame Gebüsche $\Gamma_1' \Gamma_2' \Gamma_3' \Gamma_4'$, weil es auch mit $\Gamma_7' \Gamma_8'$ ein Gewinde gemein hat, sich selbst entspricht, als auch die nach Γ_7', bezw. Γ_8' gehenden Gebüsche einander entsprechen; also ist $\Gamma_7' \Gamma_8'$ das erzeugte einstufige System.

Bei unserer eindeutigen Zuordnung der Gewinde von S_4 und S_4' werden also von entsprechenden Gewinden gleichzeitig Büschel durchlaufen und, da die Netze durch Büschel erzeugt werden können, gleichzeitig Netze, u. s. f.

Die Zuordnung ist also eine collineare.

II.

Hinsichtlich *des Inbegriffs der sämmtlichen ∞^5 Gewinde des Raumes* 156
sind die linearen Systeme 1., 2., 3. Stufe leicht zu erledigen, wenn es sich um ihre gemeinsamen Gewinde handelt; da man diese Systeme durch 4, 3, 2 gemeinsame Geraden definiren kann.

Z. B. *Ein beliebiges Netz und ein beliebiges Gebüsche im Raume haben ein Gewinde gemein;* nämlich dasjenige, das durch 3 Gerade der Grund-Regelschaar des Netzes und die Grundgeraden des Gebüsches geht. Haben sie 2, bezw. 3 (nicht demselben Büschel angehörige) Gewinde gemein, so befinden sie sich in demselben Gewebe und haben einen Büschel gemein, bezw. das Netz befindet sich in dem Gebüsche.

Ein beliebiger Büschel hat mit einem beliebigen Netze oder Gebüsche kein Gewinde gemein.

Ein Gewebe hat im allgemeinen keine allen seinen Gewinden gemeinsame Gerade; es liegt vielmehr ein specieller Fall vor, wenn das der Fall ist.

Wir haben also ein Gewebe noch zusammenzustellen mit einem Büschel, einem Netze, einem Gebüsche oder einem andern Gewebe.

Das Gewebe denken wir am besten vermittelst einer involutorischen Regelschaar J hergestellt, deren gepaarte Geraden die Grundgeraden der erzeugenden Gebüsche sind.

Ein Büschel schneidet in die Regelschaar eine zweite Involution ein, in der je zwei Gerade gepaart sind, welche ein Gewinde des Büschels mit der Regelschaar gemein hat (Nr. 147).

Das gemeinsame Paar beider Involutionen rührt her von einem Gewinde des Büschels, das zu einem der erzeugenden Gebüsche des Gewebes und damit zu diesem gehört.

Ein lineares System 4. Stufe von Gewinden hat mit einem Büschel ein Gewinde gemein; wenn zwei, so gehört der Büschel zum Gewebe.

Durch jedes Paar der Involution J geht von einem Netze von Gewinden ein Gewinde; so ergeben sich ∞^1 Gewinde, die dem Netze und dem Gewebe gemeinsam sind. Der Büschel, welcher zwei derselben verbindet, und deshalb zum Netze gehört, schneidet in die J tragende Regelschaar G ebenfalls eine Involution ein, die aber mit J identisch ist, weil sie zwei Paare mit ihr gemein hat; folglich gehören alle Gewinde dieses Büschels zum Gewebe. Also muss sich das System der ∞^1 Gewinde mit dem Büschel decken, weil wir sonst unendlich viele gemeinsame Büschel erhielten.

Ein lineares System 4. Stufe von Gewinden hat mit einem Netze einen Büschel gemein (oder enthält es im speciellen Falle ganz).

Durch jedes Paar von J geht ein Büschel aus einem gegebenen Gebüsche, der also auch zum Gewebe gehört. Alle diese Büschel haben dasjenige Gewinde Γ_0 des Gebüsches gemein, das durch 3 Gerade von G und also durch die ganze G geht.

Greift man nun aus zweien dieser Büschel wieder je ein Gewinde heraus, so schneidet der verbindende Büschel in G eine mit J identische Involution ein, d. h. hat in jedem der Büschel ein Gewinde. Damit ist erkannt, dass alle diese von einem Gewinde Γ_0 ausgehenden Büschel ein Netz bilden.

Ein lineares System 4. Stufe von Gewinden hat mit einem Gebüsche ein Netz gemein (oder nimmt es ganz in sich auf).

Wenn endlich zwei Gewebe S_4, S_4' vorliegen, so haben wir

2 involutorische Regelschaaren J, J'; durch Zusammenstellung irgend eines Paares der einen und eines der andern erhalten wir ∞^2 Strahlennetze, welche die 4 Strahlen enthalten, und die ∞^3 Gewinde durch dieselben sind S_4 und S_4' gemeinsam. Die Leitgeraden aller dieser Strahlennetze treffen die Geraden eines Paares von J und eines von J'; also bilden sie das Strahlennetz, das den beiden Gewinden A, A' gemeinsam ist, welche durch die involutorischen Regelschaaren J und J' erzeugt werden. Folglich sind wiederum die Leitgeraden dieses Strahlennetzes allen obigen ∞^2 Strahlennetzen und den durch sie gehenden Gewinden gemeinsam und diese Gewinde bilden ein Gebüsche.

Zwei lineare Systeme 4. Stufe von Gewinden haben ein Gebüsche gemein.

5 Gewebe haben ein Gewinde gemein.

Denn wir können sie, vermittelst der Schnitte von zweimal zweien, ersetzen durch ein Gewebe und 2 Gebüsche, welche letzteren wiederum zum Schnitte einen Büschel haben, der sich mit dem Gewebe in einem Gewinde begegnet.

Diese Ergebnisse lassen sich natürlich auch mit Hilfe der Systeme oder Gewinde ableiten, welche mit den gegebenen Systemen in Involution sind. Z. B.:

Zu S_4 und S_4' ist je ein Gewinde in Involution — die beiden eben erwähnten A, A' —; alle Gewinde, die zugleich zu A und A' und dem ganzen Büschel AA' in Involution sind, sind S_4, S_4' gemeinsam; diese bilden aber ein Gebüsche.

Zu einem Gewebe, bezw. einem Netze sind in Involution ein einzelnes Gewinde und ein Netz; alle Gewinde, die zu diesen und also zum verbindenden Gebüsche in Involution sind, sind dem Gewebe und dem Netze gemeinsam; sie bilden einen Büschel.

Alle Sätze über gemeinsame Gewinde lassen sich zusammenfassen in folgenden:

*Zwei lineare Systeme i^{ter} und k^{ter} Stufe von Gewinden, die sich in einem linearen Systeme l^{ter} Stufe befinden ($i, k < l \leq 5$), haben ein lineares System von der Stufe $i + k - l$ oder ein Gewinde gemein oder im allgemeinen keins, je nachdem $i + k > l$, $= l$, $< l$ ist.**)

Die vorangehenden Sätze, in Verbindung mit den früheren Sätzen 157
über die Mächtigkeit der in einem linearen Systeme enthaltenen linearen Systeme niedrigerer Stufe, belehren uns auch über die Mächtigkeit der durch ein Gewinde, bezw. ein lineares System von Gewinden gehenden linearen Systeme höherer Stufe.

Da jeder Büschel, jedes Netz, ... ein Gewebe in einem Gewinde,

*) Vergl. z. B. de Paolis in dem auf S. 81 erwähnten Aufsatze.

einem Büschel, ... schneidet, so zeigen die ∞^4 Gewinde, ∞^6 Büschel, ∞^6 Netze, ∞^4 Gebüsche eines Gewebes, dass *durch ein Gewinde* ∞^4 *Büschel und Gewebe,* ∞^6 *Netze und Gebüsche gehen.*

Ebenso ergeben sich aus den Mächtigkeitszahlen der in einem Gebüsche, Netze oder Büschel enthaltenen Gewinde oder Systeme, dass *durch jeden Büschel* ∞^3 *Netze oder Gewebe und* ∞^4 *Gebüsche, durch jedes Netz* ∞^2 *Gebüsche und Gewebe, durch jedes Gebüsche* ∞^1 *Gewebe gehen.* Letztere beiden Gebilde kann man Bündel von Gebüschen und Geweben, bezw. Büschel von Geweben und das Netz, bezw. Gebüsche den Träger nennen. Für die beiden ersteren von einem Gewinde, bezw. einem Büschel getragenen Gebilde, die in Bezug auf die niedrigsten und höchsten Systeme, welche sie enthalten, 4. oder 3. Stufe sind, könnte man, in Ermangelung eines besseren Namens, die Bezeichnung Bündel 4. bezw. 3. Stufe annehmen.

Sie „stehen“ alle über linearen Systemen 4., 3., 2., 1. Stufe von Gewinden oder sind perspectiv zu ihnen, indem ihre Elemente (Büschel, Netze, ...) durch deren Elemente gehen (mit ihnen incidiren), und wegen der dadurch bewirkten eindeutigen Zuordnung werden auch unsere jetzigen Gebilde collinear*) beziehbar.

Allgemein gehen durch ein System S_i $\infty^{(5-k)(k-i)}$ *Systeme* S_k $(k > i)$. *Hingegen innerhalb eines Systems* S_l *gehen durch ein System* S_i $\infty^{(l-k)(k-i)}$ *Systeme* S_k $(l > k > i)$.

Demnach haben wir (zum Theil uns schon bekannt):

In einem *Gewebe* gehen durch jedes Gewinde ∞^3 Büschel und Gebüsche, ∞^4 Netze; durch einen Büschel ∞^2 Netze und Gebüsche (Bündel); durch ein Netz ∞^1 Gebüsche (Büschel von Gebüschen). In einem *Gebüsche* gehen durch ein Gewinde ∞^2 Büschel und Netze (Bündel), durch einen Büschel ∞^1 Netze (Büschel von Netzen). In einem *Netze* gehen durch jedes Gewinde ∞^1 Büschel. —

Im Systeme 5. Stufe aller Gewinde befindet sich *das System 4. Stufe der Gebüsche* oder, wenn wir so wollen, der Geraden des Raumes. Dieses System ist aber nicht linear, sondern *2ten Grades,* da es in jeden Büschel von Gewinden zwei Gebüsche sendet. Reye, der sich des Wortes „Gewebe“ auch für nicht lineare Systeme 4. Stufe von Gewinden bedient, nennt den Inbegriff aller Gebüsche „*Hauptgewebe*“.**)

*) Es ist ein Mangel unserer deutschen Terminologie, dass wir nicht, wie die Franzosen, bei den einstufigen Gebilden dasselbe Wort gebrauchen als bei denen von höherer Stufe; in solchen allgemeinen Sätzen, wie den obigen, empfiehlt es sich, das Wort „collinear“ statt „projectiv“ auch für die Gebilde 1. Stufe zu benutzen.

**) Journal f. Mathematik Bd. 95 S. 337.

*Will man nun den Inbegriff S_5 aller Gewinde auf sich selbst collinear beziehen,**) so seien $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_7'$; $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots \Gamma_7'$, zwei Gruppen von je 7 Gewinden. Durch die Gebüsche $\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5$, $\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_1, \ldots$, welche durch je 4 von den 5 Gewinden $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ constituirt werden, oder mit kürzerer Bezeichnung $G_1, G_2, \ldots, G_5$ gehen je ∞^1 Gewebe, ein Büschel von Geweben. Diese Büschel $(G_1), \ldots$ beziehen wir so projectiv je auf die gleichnamigen Büschel $(G_1'), \ldots$ im Gewinde-Raume S_5', dass das Gewebe $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5$, welches sämmtlichen $(G_1), \ldots$ gemeinsam ist, dem sämmtlichen $(G_1'), \ldots$ gemeinsamen Gewebe $\Gamma_1'\Gamma_2'\Gamma_3'\Gamma_4'\Gamma_5'$ entspricht und den nach Γ_6, Γ_7 gehenden Geweben je die nach Γ_6', Γ_7' gehenden correspondiren. Einem beliebigen Gewinde Γ von S_5 entspricht in der Collineation dann das gemeinsame Gewinde Γ' der 5 Gewebe von $(G_1'), \ldots$, welche in den 5 Projectivitäten den nach Γ gehenden Geweben von $(G_1), \ldots$ homolog sind. 158

Wie in Nr. 155 lässt sich dann beweisen, dass Γ und Γ' gleichzeitig Büschel, Netze, ... durchlaufen.

Erzeugnisse zweier oder mehrerer linearer Systeme von Gewinden, welche collinear sind.

Obwohl die in diesem Abschnitte zu behandelnden Erzeugnisse von höherem als 1. Grade sind, so kann doch die Besprechung derselben, soweit wir sie hier vornehmen, diesem Abschnitte über lineare Complexe einverleibt werden, weil es sich im Grunde um Eigenschaften solcher Complexe und ihrer linearen Systeme handelt. 159

Die Zahl der Oerter aber, die sich hier darbieten, ist zu gross, als dass wir sie alle behandeln könnten. Vor allem werden wir uns mit einem Complexe 2. Grades und einer Congruenz 3. Grades beschäftigen.

*Zwei projective Büschel von Gewinden erzeugen durch die Strahlennetze, in denen sich homologe Gewinde durchschneiden, einen Complex 2. Grades.***)

Denn die Reihen der Nullpunkte, welche einer beliebigen Ebene in Bezug auf die Gewinde des einen und des andern Büschels zu-

*) oder etwa auf den Inbegriff aller Kegelschnitte einer Ebene.

**) Silldorf, Zeitschrift f. Mathematik, Bd. 20 S. 133; Roccella, Sugli enti geometrici dello spazio di rette etc. (Piazza Armerina, 1882).

gehören, sind unter einander projectiv und die Verbindungslinie entsprechender Punkte, welche einen Kegelschnitt umhüllen, sind die in die Ebene fallenden Strahlen des Complexes.

Oder ein beliebiger Strahlenbüschel wird durch die beiden Büschel von Gewinden so zu sich selbst projectiv gemacht, dass zwei entsprechende Strahlen zu entsprechenden Gewinden gehören. Die sich selbst entsprechenden Strahlen sind die Strahlen des erzeugten Complexes, die sich im Strahlenbüschel befinden.

Dass die Grund-Strahlennetze der beiden erzeugenden Büschel in dem Complexe enthalten sind, ist ohne weiteres ersichtlich.

Die beiden Büschel S_1, S_1' constituiren ein Gebüsche S_3 und in demselben geht durch jeden der Büschel als Basis ein Büschel von Netzen (Nr. 140); diese Netze verbinden S_1, bezw. S_1' mit den verschiedenen Gewinden Γ' und Γ des andern Büschels. Dadurch werden auch diese Büschel von Netzen projectiv, indem zwei Netze sich entsprechen, welche nach homologen Gewinden Γ', Γ von S_1', S_1 gehen. Der Γ und Γ' verbindende Büschel ist der gemeinsame Büschel der entsprechenden Netze, die „über Γ und Γ' stehen“. *Also ist unser Complex auch der Ort der Grund-Strahlennetze der Büschel, welche entsprechenden Netzen zweier in demselben Gebüsche befindlicher projectiver Büschel von Netzen gemeinsam sind.*

Diese beiden Erzeugungen sind analog zu den Erzeugungen einer Regelschaar vermittelst zweier projectiver Punktreihen, bezw. zweier projectiver Ebenenbüschel. Erstere entsprechen den Gewinde-, letztere den Netze-Büscheln. Auch im vorliegenden Falle kann man jeden der erzeugenden Büschel der einen oder andern Art durch ∞^1 zu ihnen gleichartige ersetzen.

Es seien Γ, Γ'; Γ_1, Γ_1'; Γ_2, Γ_2' drei Paare entsprechender Gewinde der gegebenen Gewinde-Büschel S_1, S_1', so stellen wir uns im Gebüsche S_3 einen Büschel S_1'' her, der mit jedem der Büschel $\Gamma\Gamma'$, $\Gamma_1\Gamma_1'$, $\Gamma_2\Gamma_2'$ oder kürzer $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ ein Gewinde gemein hat, „sie schneidet“; wir nehmen dazu ein beliebiges Gewinde Γ'' in $\mathfrak{B}$, die beiden Netze, welche dasselbe mit $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ verbinden, haben einen Büschel gemein (Nr. 139), der durch Γ'' geht und die $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, mit denen er ja je in demselben Netze sich befindet, in Γ_1'', Γ_2'' schneidet; dies ist einer von den ∞^1 möglichen S_1''. Sind Γ_3 und Γ_3' zwei weitere homologe Gewinde von S_1, S_1'; so schneide das Netz $S_1'\Gamma_3$ den S_1'' in Γ_3'', dann ist

$$\Gamma\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \barwedge S_1'(\Gamma\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3) \barwedge \Gamma''\Gamma_1''\Gamma_2''\Gamma_3''.$$

Nun schneide wiederum das Netz $S_1\Gamma_3''$ den Büschel S_1' in $\overline{\Gamma}_3'$, so ist

$$\Gamma''\Gamma_1''\Gamma_2''\Gamma_3'' \barwedge S_1(\Gamma''\Gamma_1''\Gamma_2''\Gamma_3'') \barwedge \Gamma'\Gamma_1'\Gamma_2'\bar{\Gamma}_3',$$

also:

$$\Gamma'\Gamma_1'\Gamma_2'\bar{\Gamma}_3' \barwedge \Gamma\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \barwedge \Gamma'\Gamma_1'\Gamma_2'\Gamma_3'$$

wegen der vorausgesetzten Projectivität; folglich ist $\bar{\Gamma}_3'$ identisch mit Γ_3', und Γ_3'' ist sowohl im Netze $S_1'\Gamma_3$, als im Netze $S_1\Gamma_3'$ enthalten, mithin im gemeinsamen Büschel, welcher ersichtlich der Γ_3 und Γ_3' verbindende $\mathfrak{B}_3$ ist, weil diese zu beiden Netzen gehören.

Der Büschel S_1'', welcher $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ trifft, trifft auch $\mathfrak{B}_3$ und so alle analogen $\mathfrak{B}_x \equiv \Gamma_x\Gamma_x'$. Er wird zu S_1 projectiv, vermittelst des Netze-Büschels, der „aus S_1' den S_1 projicirt“, und die Büschel $\Gamma\Gamma''$, $\Gamma_1''\Gamma_1''$, ..., welche entsprechende Gewinde von S_1 und S_1'' verbinden, sind identisch mit $\Gamma\Gamma'$, $\Gamma_1\Gamma_1'$, ...; d. h. die S_1 und S_1'' erzeugen den nämlichen Complex wie S_1 und S_1'. Dass er nun wieder auch durch Netze-Büschel aus S_1 und S_1'' erzeugt werden kann, bedarf keiner ausführlichen Erörterung mehr.

Die vorangehende Betrachtung ist zwar nichts anderes als die Wiederholung derjenigen, die bei der Regelschaar gemacht wird, nur mit dem Gewinde als Element statt des Punktes. Aber es ist gewiss lehrreich, sie in einem Raume „von drei Dimensionen“ (Gebüsche von Gewinden) vorzunehmen, der in einem höherdimensionalen Raume (dem Gewinde-Raume von 5 Dimensionen) enthalten ist; wie überhaupt dieses Kapitel vor allem als Uebung in mehrdimensionaler Geometrie dienen soll.

Der Complex 2. Grades hat zwei ausgezeichnete Gerade und infolge 160
dessen ist er nicht allgemein.

Die beiden Paare uv, u'v' der Leitgeraden der Grund-Strahlennetze der erzeugenden Büschel S_1, S_1' von Gewinden haben 2 Treffgerade; dieselben gehören offenbar zu allen Schnitt-Strahlennetzen von entsprechenden Gewinden und kommen so zum Complexe. *Sie haben kein Analogon bei der Regelschaar.*

Legt man eine Ebene $\mathfrak{x}$ durch eine dieser Geraden, d, so ist d der in sie fallende Strahl für die Grund-Strahlennetze beider Büschel S_1, S_1'; die beiden projectiven Punktreihen der Nullpunkte haben also denselben Träger und der Complex-Kegelschnitt artet aus in das Paar der Strahlenbüschel um die sich selbst entsprechenden Punkte, welches also die d zur Doppellinie hat. Ebenso zerfällt für jeden Punkt X von d der Complexkegel in zwei Strahlenbüschel (oder Ebenen), deren Doppellinie die d ist.

Zwischen der Punktreihe auf d und dem Ebenenbüschel um d entsteht so eine Correspondenz [2, 2].

Ist (X, ξ) ein beliebiger durch d gehender Strahlenbüschel (dessen Scheitel und Ebene sich also nicht in dieser Correspondenz entsprechen), so enthält derselbe von den beiden Complex-Strahlenbüscheln in ξ oder aus X nur den Doppelstrahl.

In jedem Strahlenbüschel, der durch einen der beiden ausgezeichneten Strahlen d geht, haben sich die beiden Complexstrahlen in d vereinigt. Wegen dieser Eigenschaft sind *diese beiden Geraden als Doppelstrahlen des Complexes* zu bezeichnen.

Die Projectivität in einem solchen Strahlenbüschel, in der die zu entsprechenden Gewinden von S_1 und S_1' gehörigen Strahlen homolog sind, ist eine ausgeartete, und zwar so, dass beide singuläre Strahlen in d fallen. Während dieser Strahl zu allen Gewinden beider Büschel gehört, gehören die übrigen Strahlen alle zu dem nämlichen Gewinde von S_1 oder S_1'.

Durch diesen Umstand, dass er zwei Doppelstrahlen hat, ist also unser Complex 2. Grades specialisirt.

161 *Drei collineare Netze von Gewinden erzeugen durch die Regelschaaren, in denen sich je drei homologe Gewinde durchschneiden, einen Complex 3. Grades.*

Diese Erzeugung ist analog zu derjenigen der Fläche 3. Klasse (Ordnung) durch 3 collineare Punktfelder (Ebenenbündel).

Durch einen beliebigen Strahl x^{01} eines Strahlenbüschels (X, ξ) geht ein Büschel aus dem ersten Netze S_2 und vom entsprechenden Büschel des zweiten Netzes S_2' ein Gewinde; folglich ist x^{01} Schnittstrahl zweier entsprechender Gewinde dieser beiden Netze; das ihnen entsprechende Gewinde im dritten Netze S_2'' sendet in (X, ξ) den Strahl x^2. Umgekehrt, durch jeden x^2 von (X, ξ) geht ein Büschel von S_2''; der Complex, welchen die beiden entsprechenden Büschel von S_2 und S_2' nach dem vorangehenden Satze erzeugen, sendet in (X, ξ) zwei Strahlen x^{01}. Somit entsteht in diesem Strahlenbüschel eine Correspondenz [2, 1], deren 3 Coincidenzstrahlen die ihm angehörigen Strahlen des durch die 3 collinearen Netze erzeugten Complexes sind.

Die Punktfelder der Nullpunkte einer Ebene ε in Bezug auf die Gewinde der drei Netze sind ebenfalls collinear. Bei 3 collinearen Feldern, die in derselben Ebene liegen, umhüllen aber die Geraden, auf denen zugleich 3 homologe Punkte sich befinden, eine Curve 3. Klasse, welche dann also die Complexcurve in der Ebene ε ist. Man projicirt, zum Beweise dieser 3. Klasse, die 3 Felder aus 3 beliebigen Punkten; der Schnitt der Ebene ε mit der Fläche 3. Ordnung,

welche durch die 3 collinearen Bündel erzeugt wird, ist der Ort der Punkte, in welche 3 entsprechende Geraden der 3 collinearen Felder zusammenlaufen. Die Dualisirung in der Ebene führt zur Curve 3. Klasse. Man kann auch leicht erkennen, dass die 3 collinearen Felder in jedem Strahlenbüschel ihrer Ebene eine Correspondenz [2, 1] hervorrufen, in der jedem Strahl, insofern er ja ein Paar homologer Punkte aus zweien der 3 Felder enthält, derjenige Strahl entspricht, der nach dem diesen entsprechenden Punkte im dritten Felde geht.

Vier collineare Gebüsche S_3, S_3', S_3'', S_3''' von Gewinden erzeugen 162
durch die Strahlenpaare, welche je den homologen Gewinden gemeinsam sind, einen Complex 4. Grades.

Jeder Strahl x^{012} von $(X, \mathfrak{x})$ scheidet aus S_3 ein Netz, aus dem diesem Netze entsprechenden Netze von S_3' einen Büschel und aus dem diesem Büschel entsprechenden Büschel von S_3'' ein Gewinde und ist deshalb Schnittstrahl entsprechender Gewinde dieser 3 Gebüsche; das ihnen entsprechende Gewinde in S_3''' schneidet in $(X, \mathfrak{x})$ den Strahl x^3 ein. Ein beliebiger Strahl x^3 von $(X, \mathfrak{x})$ scheidet aus S_3''' ein Netz und der Complex, den die 3 entsprechenden Netze erzeugen, liefert in $(X, \mathfrak{x})$ die 3 dem x^3 entsprechenden Strahlen x^{012}; u. s. w.

Hierzu haben wir kein Analogon in der Punkt-Geometrie. —

Ebenso lassen sich die beiden folgenden Sätze beweisen:

Bei 5 collinearen Geweben von linearen Complexen haben im allgemeinen 5 entsprechende Gewinde keinen Strahl gemein. Es giebt aber ∞^3 Gruppen von entsprechenden Gewinden mit gemeinsamem Strahle. Der Ort dieser ∞^3 Strahlen ist ein Complex 5. Grades.

Bei 6 collinearen Räumen von Gewinden giebt es ∞^3 Gruppen von 6 entsprechenden Gewinden, welche einen Strahl gemeinsam haben. Der Ort dieser Strahlen ist ein Complex 6. Grades.

Zum letzteren ist analog der Satz der Punkt-Geometrie, dass bei 4 collinearen Räumen die Ebenen, in welche zugleich 4 homologe Punkte fallen, eine Fläche 4. Klasse umhüllen, oder der duale in der Ebenen-Geometrie.*)

Drei projective Büschel S_1, S_1', S_1'' von Gewinden erzeugen durch 163
*die Schnitt-Regelschaaren entsprechender Gewinde eine in sich duale Congruenz 3. Grades.***)

Sie ist ersichtlich der Restschnitt der beiden quadratischen Complexe, die von 2 Paaren der Büschel, etwa von S_1 und S_1', bezw. S_1 und S_1'', erzeugt werden, neben dem Grund-Strahlennetze von S_1.

*) Schur, Mathem. Annalen Bd. 18 S. 29.

**) Kummer, Berliner Monatsberichte für 1878 S. 25.

Die Nullpunkte einer beliebigen Ebene ε in Bezug auf die Gewinde der 3 Büschel bilden 3 projective Punktreihen, bei denen es, wie man weiss, 3 Gruppen entsprechender Punkte giebt, welche je in einer Geraden liegen. Diese 3 Strahlen sind die der Congruenz angehörigen in der Ebene ε.

Der Complex 2. Grades, der von zweien der 3 Büschel erzeugt wird, etwa von S_1', S_1'', hat mit dem Grund-Strahlennetze von S_1 eine Regelfläche 4. Grades (Nr. 35) gemein, für welche die Leitgeraden desselben doppelte Leitgeraden sind. Diese Regelfläche gehört offenbar zur Congruenz.

Zu unserer Congruenz haben wir als Analogon in der Punkt-Geometrie die cubische Raumcurve als Ort ihrer Schmiegungsebenen, insofern diese entsprechende Punkte dreier projectiver Punktreihen verbinden, oder in der Ebenen-Geometrie ebenfalls die cubische Raumcurve, insofern sie der Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen dreier projectiver Ebenenbüschel ist. Wir wollen zur Vergleichung diese letztere punktweise Erzeugung der cubischen Raumcurve als die geläufigere bevorzugen. Die Punkte der Curve sind dann den die Congruenz durchziehenden ∞^1 Regelschaaren analog. Beachten wir den Unterschied, dass, während die 3 Ebenenbüschel sich stets in dem Ebenenraume von 3 Dimensionen befinden, die 3 Gewinde-Büschel im allgemeinen nicht demselben Gebüsche von Gewinden angehören.

Für die cubische Raumcurve haben wir bekanntlich noch eine zweite punktweise Erzeugung: die durch zwei collineare Strahlenbündel. Nur ∞^1 Paare entsprechender Strahlen haben einen Punkt gemein und diese Punkte erzeugen die Curve. Die mit den Strahlenbündeln verbundenen collinearen Ebenenbündel geben in den Schnittlinien entsprechender Ebenen Gerade, von denen jede zwei Punkte der Curve enthält.

Diesen 2 collinearen Ebenenbündeln der Ebenen-Geometrie entsprechen in der Gewinde-Geometrie 2 collineare Netze S_2, S_2' von Gewinden, den Schnittlinien entsprechender Ebenen die Schnitt-Strahlennetze entsprechender Gewinde. Den Strahlen der Bündel aber sind analog Grund-Strahlennetze der Büschel der Netze. Nennen wir die Grund-Strahlennetze entsprechender Büschel kürzer entprechende Grund-Strahlennetze.

Nun tritt aber ein Unterschied ein; während von den entsprechenden Strahlen collinearer Bündel nur ∞^1 einen Punkt gemein haben, haben hier nicht etwa blos ∞^1 entsprechende Grund-Strahlennetze eine Regelschaar — die wir oben als Analogon des Punktes, insofern er Schnitt dreier Ebenen ist, erkannt haben —, sondern jede

zwei entsprechende Grund-Strahlennetze von S_2, S_2' haben 2 Strahlen gemein, niemals aber eine Regelschaar. Nur letzteres bedarf noch der Erörterung. Wenn zwei Strahlennetze eine Regelschaar gemein haben, so befinden sich ihre 4 Leitgeraden ebenfalls in einer Regelschaar, der Leitschaar jener; es ist aber für 4 Gerade bekanntlich eine dreifache Bedingung, zu derselben Regelschaar zu gehören. Also wird dieselbe von keiner der nur ∞^2 Gruppen erfüllt, die aus je 4 Leitgeraden entsprechender Grund-Strahlennetze von S_2, S_2' bestehen.

Wenn zwei entsprechende Grund-Strahlennetze eine Regelschaar gemein hätten, so würden sie sich (Nr. 98, 128) in demselben Gewinde befinden, das also ihren Büscheln und damit auch den beiden Netzen S_2, S_2' gemeinsam wäre. Zwei Netze haben aber, im allgemeinen, kein gemeinsames Gewinde.

Somit sind wir zu der in sich dualen Congruenz geführt, welche durch die Strahlenpaare gebildet wird, die entsprechenden Grund-Strahlennetzen der beiden collinearen Netze S_2, S_2' gemeinschaftlich sind.

Die Nullpunkte einer beliebigen Ebene ε in Bezug auf die Gewinde von S_2, S_2' bilden zwei collineare Felder: entsprechende Punkte sind die Nullpunkte in Bezug auf entsprechende Gewinde, entsprechende Geraden also die in ε fallenden Strahlen entsprechender Grund-Strahlennetze, und die 3 sich selbst entsprechenden Geraden der Collineation sind daher die in ε liegenden Strahlen unserer Congruenz. Also:

Entsprechende Grund-Strahlennetze zweier collinearer Netze von Gewinden schneiden sich in Strahlenpaaren, welche eine Congruenz 3. Grades erzeugen.

Dass die Grund-Regelschaaren von S_2 und S_2' zu dieser Congruenz gehören, ist unmittelbar zu erkennen; denn jede Gerade z. B. der Grund-Regelschaar von S_2 scheidet aus S_2' einen Büschel, zu dessen Grund-Strahlennetze sie gehört.

Wird zu den beiden collinearen Netzen S_2, S_2' noch ein drittes gefügt, das auch zu beiden collinear ist, so gehört jeder Strahl eines erzeugenden Strahlenpaares unserer Congruenz zu einem Gewinde des Büschels des dritten Netzes, welcher den beiden Büscheln entspricht, deren Grund-Strahlennetze den Strahl gemeinsam haben; also befindet sich die Congruenz in dem Complexe 3. Grades, der durch die 3 Netze erzeugt wird.

Beweisen wir nun die *Identität der beiden Congruenzen 3. Grades,* 164
die wir erhalten haben, indem wir zeigen, dass die Congruenz, die auf die eine Weise erzeugt ist, auch auf die andere Weise erzeugt werden kann.

Nehmen wir zuerst an, dass *die Congruenz 3. Grades C_3 das Erzeugniss zweier collinearer Netze S_2, S_2' sei,* also der Ort der Strahlenpaare, die entsprechenden Grund-Strahlennetzen derselben gemeinsam sind. Es seien Γ, Γ' zwei entsprechende Gewinde von S_2, S_2'. Von zwei entsprechenden Büscheln der Netze, welche durch Γ, bezw. Γ' gehen, befinden sich die beiden Strahlen g_1, g_2, welche ihren Grund-Strahlennetzen gemein sind, in dem Strahlennetze $\Gamma\Gamma'$; drehen sich nun die Büschel um Γ, Γ', 2 projective Büschel (Γ), (Γ') von Gewinde-Büscheln beschreibend, so entsteht durch die Paare g_1, g_2 eine Regelfläche im Netze $\Gamma\Gamma'$.

Die Paare der Leitgeraden der Grund-Strahlennetze der Büschel von (Γ) bilden in der Leitschaar L_0 der Grund-Regelschaar G_0 von S_2 eine Involution I (Nr. 128). Zwei gepaarte Geraden dieser Involution sind Leitgeraden eines Strahlennetzes, das sich in Γ befindet, demnach polar in Bezug auf Γ; und somit ist Γ das durch diese involutorische Regelschaar erzeugte Gewinde. Analoges gilt für Γ' und (Γ'). Die Projectivität zwischen (Γ) und (Γ') überträgt sich auf diese Involutionen I und I'. Jedes Strahlenpaar g_1, g_2 trifft zugleich 2 entsprechende Paare von I und I'.

Die Strahlen des Netzes $\Gamma\Gamma'$, welche eine Gerade l treffen, erzeugen, wie wir wissen, eine Regelschaar [l]. Eine Gerade g derselben trifft, weil sie zu Γ gehört, ein Paar von I; die eine Gerade des entsprechenden Paares von I' trifft 2 Gerade g' von [l] und beide treffen, weil sie zu Γ' gehören, auch die zweite Gerade des Paares von I', da eben je zwei gepaarte Geraden von I' polar sind nach Γ'. So entsteht in der Regelschaar [l] eine Correspondenz [2, 2] — die übrigens eine Projectivität zweier Involutionen ist (Nr. 17) — und die 4 Coincidenzstrahlen sind diejenigen Erzeugenden der gesuchten Regelfläche, welche l schneiden.

In der Congruenz C_3 beschreiben diejenigen Strahlenpaare, die von den entsprechenden Büscheln herrühren, welche sich um zwei entsprechende Gewinde Γ, Γ' drehen, eine im Strahlennetze $\Gamma\Gamma'$ enthaltene Regelfläche 4. Grades, welche die Leitgeraden dieses Netzes zu doppelten Leitgeraden hat.

Solcher Regelflächen haben wir ∞^2 in C_3, jede einem Paare entsprechender Gewinde von S_2, S_2' zugeordnet. Sie sind das Analogon zu den Punktepaaren der cubischen Raumcurve, die auf den Schnittlinien entsprechender Ebenen der erzeugenden Bündel liegen.

Je zweien von ihnen sind 2 Erzeugende gemein, die den beiden homologen Büscheln ihre Entstehung verdanken, welche die zugeordneten Gewinde in S_2, bezw. S_2' verbinden.

Wenn man Γ, Γ' zwei entsprechende Büschel S_1, S_1' in S_2, S_2' durchlaufen lässt, so erhält man, da in jeden Büschel eines Netzes ein anderer „mit einem Gewinde eingreift", durch die zugehörigen ∞^1 Regelflächen 4. Grades die ganze Congruenz C_3; alle diese Regelflächen enthalten das Strahlenpaar, das den Grund-Strahlennetzen von S_1, S_1' gemeinsam ist.

Jedenfalls befindet sich also C_3 in dem Complex 2. Grades, der durch die projectiven Büschel S_1, S_1' erzeugt wird; denn jedes der Schnitt-Strahlennetze entsprechender Gewinde derselben enthält eine dieser ∞^1 Regelflächen. Nimmt man ein zweites Paar entsprechender Büschel aus S_2, S_2', so erhält man einen zweiten quadratischen Complex, der durch C_3 geht; ausserdem schneiden sie sich in dem Strahlennetze, dass der Schnitt der beiden entsprechenden Gewinde ist, die den beiden Büscheln von S_2, bezw. denen von S_2' gemeinsam sind.

Diese Eigenschaft, der theilweise Schnitt zweier Complexe 2. Grades neben einem Strahlennetze zu sein, hat also die durch 2 collineare Netze erzeugte Congruenz 3. Grades mit der durch 3 projective Büschel erzeugten gemein; doch reicht das zum Nachweise der Identität nicht hin.

In jedem Strahlennetze, in dem sich zwei entsprechende Gewinde Γ, Γ' der beiden Netze S_2, S_2' durchschneiden, befindet sich nach dem Vorangehenden eine der Congruenz C_3 angehörige Regelfläche 4. Grades ϱ^4. Sei nun Γ_x irgend ein Gewinde des Büschels $\Gamma\Gamma'$; dasselbe hat mit C_3 insgesammt eine Regelfläche 6. Grades gemein (Nr. 35), also ausser ϱ^4 noch eine Regelschaar ϱ_x.

Bewegt man Γ_x durch $\Gamma\Gamma'$, so erhält man ein ∞^1-System von Regelschaaren ϱ_x, zu welchen auch, von Γ und Γ' selbst herrührend, die Grund-Regelschaaren von S_2, S_2' gehören und welche C_3 erfüllen; denn durch jeden Strahl von C_3 geht ein Γ_x.

Zwei andere entsprechende Gewinde Γ_1, Γ_1' von S_2, S_2' und ihr Büschel, dessen Grund-Strahlennetz die Regelfläche ϱ_1^4 von C_3 enthalten möge, führen zu demselben Systeme von Regelschaaren.

In der That, Γ_x hat mit ϱ_1^4 4 Gerade gemein (Nr. 36); davon sind 2 die gemeinsamen Geraden von ϱ^4 und ϱ_1^4; die beiden andern sind also ϱ_1^4 und ϱ_x gemein. Das Gewinde von $\Gamma_1\Gamma_1'$, welches durch eine beliebige dritte Gerade von ϱ_x gelegt ist, enthält daher von dieser Regelschaar 3 Gerade, also sie ganz.

Sei umgekehrt g ein Strahl des Restschnittes, mit C_3, irgend eines Gewindes von $\Gamma_1\Gamma_1'$, ausser ϱ_1^4, so hat dasselbe mit der durch g gehenden Regelschaar ϱ_x 3 Strahlen gemeinsam und enthält sie ganz, oder diese Regelschaar ist der Restschnitt.

Damit ist eine projective Beziehung zwischen den Büscheln $\Gamma\Gamma'$ und $\Gamma_1\Gamma_1'$ erzielt, in der sich je zwei solche Gewinde correspondiren, welche durch die nämliche Regelschaar ϱ_x gehen.

Fügt man nun noch einen dritten durch zwei entsprechende Gewinde von S_2, S_2' constituirten Büschel hinzu, so ist nun erkannt, dass *die durch zwei collineare Netze erzeugte Congruenz 3. Grades auch das Erzeugniss dreier projectiver Büschel ist.*

165 Wir nehmen nun umgekehrt an, dass C_3 *durch 3 projective Büschel* S_1, S_1', S_1'' *erzeugt sei;* ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 seien dann 3 erzeugende Regelschaaren, in denen sich entsprechende Gewinde der 3 Büschel durchschneiden, und (ϱ_1), (ϱ_2) die Netze, von denen die beiden ersten die Grund-Regelschaaren sind. Jedes Gewinde des einen oder andern schneidet in ϱ_3 zwei Strahlen ein, und jede zwei Strahlen von ϱ_3 bestimmen ein Gewinde von (ϱ_1) oder (ϱ_2). Auf diese Weise werden die beiden Netze in eine eindeutige Beziehung gebracht, in welcher sich 2 Gewinde entsprechen, die durch die nämlichen 2 Geraden von ϱ_3 gehen. Die Gewinde eines Büschels von (ϱ_1) schneiden in ϱ_3 eine Involution ein und die Gewinde von (ϱ_2), welche nach den Strahlenpaaren derselben gehen, bilden ebenfalls einen Büschel; denn der Büschel, der irgend zwei von ihnen verbindet und deshalb zu (ϱ_2) gehört, schneidet dieselbe Involution in ϱ_3 ein.

Infolge dessen ist die eindeutige Beziehung zwischen (ϱ_1) und (ϱ_2) eine Collineation. Es sei C_3' die durch diese Collineation erzeugte Congruenz 3. Grades. Zu ihr gehören die Regelschaaren ϱ_1, ϱ_2 als Grund-Regelschaaren der erzeugenden Netze, ϱ_3 aber, weil zwei Büschel von (ϱ_1) und (ϱ_2), die durch die nämliche Gerade von ϱ_3 gehen und daher in diese Regelschaar die nämliche parabolische Involution mit dieser Geraden als Doppelstrahl einschneiden, in den collinearen Netzen (ϱ_1), (ϱ_2) entsprechend sind.

Es seien Γ_1, Γ_1', Γ_1'' die nach ϱ_1 und Γ_2, Γ_2', Γ_2'' die nach ϱ_2 gehenden Gewinde von S_1, S_1', S_1''; Γ_1 hat mit C_3, ausser ϱ_1, noch eine Regelfläche 4. Grades gemein; ein beliebiger Strahl derselben ist gemeinsamer Strahl dreier anderer entsprechender Gewinde als Γ_1, Γ_1', Γ_1''; also gehört er zum Grund-Strahlennetze von S_1. Folglich ist die genannte Regelfläche in diesem Strahlennetze enthalten. Die beiden Strahlen, welche Γ_1 mit ϱ_3 gemein hat, gehören ihr an; durch sie geht Γ_2, weil sie durch das Strahlennetz $\Gamma_1\Gamma_2$, das Grundnetz von S_1, geht. Daher ist Γ_2 dasjenige Gewinde von (ϱ_2), welches in der obigen Collineation dem Gewinde Γ_1 von (ϱ_1) entspricht. Dasselbe gilt für Γ_1', Γ_2' und für Γ_1'', Γ_2''. Mithin sind die Büschel $\Gamma_1\Gamma_2 \equiv S_1$,

$\Gamma_1'\Gamma_2' \equiv S_1'$, $\Gamma_1''\Gamma_2'' \equiv S_1''$ solche projective Büschel, durch welche die durch die collinearen Netze (ϱ_1) und (ϱ_2) erzeugte C_3' auch erzeugt werden kann (Nr. 164); dazu ist erforderlich, dass sie so projectiv bezogen werden, dass entsprechende Gewinde sich in Strahlen von C_3' schneiden. Nun gehören aber ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 zu C_3', also müssen die nach ihnen gehenden Gewinde von S_1, S_1', S_1'' in dieser Projectivität entsprechend sein. Damit ist dieselbe als identisch mit der vorausgesetzten Projectivität, durch welche C_3 erzeugt wird, erkannt und infolge dessen *auch* C_3', *welche durch die Collineation der Netze* (ϱ_1), (ϱ_2), so wie auch durch die jetzige Projectivität *erzeugt wird, identisch mit* C_3.

Aus dieser Betrachtung geht hervor, dass *durch 3 Regelschaaren die ganze Congruenz 3. Grades oder, besser, das sie durchziehende einfache System von Regelschaaren vollständig und eindeutig bestimmt ist.*

Ferner, wenn durch eine der Regelschaaren ein Gewinde gelegt wird, so lässt sich die Regelfläche 4. Grades, welche von ihm aus der Congruenz 3. Grades C_3 ausgeschnitten wird, mit jeder andern Regelschaar von C_3 durch ein Gewinde verbinden; alle diese Gewinde bilden einen Büschel, in dessen Grund-Strahlennetze sich die Regelfläche befindet.

Unter den ∞^1 Regelschaaren der Congruenz C_3 giebt es auch solche, die in zwei Strahlenbüschel zerfallen. Die Zahl derselben ist leicht zu ermitteln. Dazu betrachten wir das System der Kegelschnitte, welche von den Regelschaaren in eine Ebene eingeschnitten werden. Die Ordnung 3 der Congruenz beweist, dass durch jeden Punkt der Ebene 3 von diesen Kegelschnitten gehen. Infolge ihrer Entstehung ist es nicht möglich, dass einer dieser Kegelschnitte in ein Punktepaar ausarte. Geradenpaare hingegen kommen auf zwei verschiedene Weisen zustande: Entweder fällt von einer Regelschaar, die selbst nicht ausgeartet ist, eine Gerade in die Ebene, und das geschieht, wegen der Klasse 3 der Congruenz, 3mal; oder die Regelschaar zerfällt selbst in zwei Strahlenbüschel; nehmen wir an, dass dies γ-mal geschehe. Dann haben wir, hinsichtlich der Charakteristiken und Ausartungen unseres Systems (Nr. 19):

$$\nu = 3, \quad \eta = 0, \quad \delta = 3 + \gamma.$$

Folglich liefern die Formeln 2) der erwähnten Nummer $\gamma = 6$. *Sechsmal also zerfällt eine der* ∞^1 *Regelschaaren unserer Congruenz in 2 Strahlenbüschel,* und wir erhalten so *die 12 Strahlenbüschel,* welche Kummer a. a. O. für diese Congruenz gefunden hat.

Auch die Leitschaaren der Regelschaaren, in denen sich ent- 166

sprechende Gewinde dreier projectiver Büschel durchschneiden, so wie die Leitgeraden der Strahlennetze, in denen sich entsprechende Gewinde zweier collinearer Netze durchschneiden, erzeugen eine Congruenz 3. Grades. Denn so oft im ersteren Falle eine Gerade einer der Regelschaaren in eine gegebene Ebene ε fällt, so oft thut es auch eine Gerade der zugehörigen Leitschaar.

Im andern Falle aber lehren die 3 sich selbst entsprechenden Punkte der beiden collinearen Felder der Nullpunkte in ε, dass dreimal zwei entsprechende Gewinde einen in ε gelegenen Strahlenbüschel gemeinsam haben; dann fällt die eine Leitgerade des Durchschnitts-Strahlennetzes in ε.

167 *Vier collineare Netze erzeugen durch die Geradenpaare, welche je 4 entsprechenden Gewinden gemeinsam sind, eine Congruenz 6. Grades.*

Dieselbe ist nämlich der Restschnitt der beiden Complexe 3. Grades, die bei Gruppen von je 3 unter den 4 Netzen sich ergeben, ausser der Congruenz 3. Grades, welche nach Nr. 163 durch die 2 Netze erzeugt wird, die beiden Gruppen gemeinsam sind. Denn wenn ein Schnittstrahl der beiden Complexe nicht dieser Congruenz 3. Grades angehört, so gehört er nur zu einem Paare entsprechender Gewinde der beiden Netze und ist deshalb Schnittstrahl dieser beiden Gewinde mit den ihnen im dritten und vierten Netze entsprechenden.

Es ist für 3 Strahlennetze eine doppelte Bedingung, einen gemeinsamen Strahl zu besitzen, oder, was dasselbe ist, dass ihre 6 Leitgeraden einen gemeinsamen Treffstrahl haben.*)

Wenn folglich 3 collineare Gebüsche S_3, S_3', S_3'' vorliegen, so wird es unter den ∞^4 Gruppen von 3 entsprechenden Grund-Strahlennetzen ∞^2 geben, die einen gemeinsamen Strahl haben, und durch diese Strahlen entsteht eine in sich duale Congruenz. Wir wollen diesmal die Ordnung ermitteln.

Ein beliebiger Strahl x^{01} eines Bündels X scheidet aus S_3 ein Netz und aus dem entsprechenden Netze von S_3' einen Büschel, den Schnittbüschel S_1' der beiden Netze von S_3', von denen das eine dasjenige ist, das dem von x^{01} aus S_3 ausgeschiedenen Netze entspricht, das andere von x^{01} aus S_3' selbst ausgeschieden wird; x^{01} ist daher gemeinsamer Strahl des Grund-Strahlennetzes dieses Büschels S_1' und desjenigen seines entsprechenden S_1 in S_3; x^2 sei der Strahl, der aus X an das Grund-Strahlennetz des ihnen in S_3'' entsprechenden Büschels S_1'' kommt. Umgekehrt, x^2 scheidet aus S_3'' ein Netz aus und die

*) Für i Strahlennetze ist es eine $2(i-2)$-fache Bedingung.

beiden homologen Netze in S_3 und S_3' erzeugen durch die Schnittstrahlen ihrer entsprechenden Grund-Strahlennetze eine Congruenz 3. Grades, zu der von X 3 Strahlen x^{01} kommen.

Wir bewegen x^{01} durch einen Strahlenbüschel (X, $\mathfrak{x}$), so haben die verschiedenen aus S_3 ausgeschiedenen Netze alle den Büschel gemein, dessen sämmtliche Gewinde durch (X, $\mathfrak{x}$) gehen, also bilden sie einen Büschel von Netzen in S_3 mit diesem Gewinde-Büschel als Basis; derselbe ist zum (X, $\mathfrak{x}$) projectiv; das gilt aber auch sowohl für den diesem Netze-Büschel entsprechenden Büschel in S_3', als auch für den in ähnlicher Weise durch die verschiedenen Strahlen von (X, $\mathfrak{x}$) in S_3' hervorgerufenen Netze-Büschel. Diese beiden Büschel sind projectiv und Schnittbüschel ihrer entsprechenden Netze ist je der den einzelnen Strahlen von (X, $\mathfrak{x}$) entsprechende S_1'. Dies überträgt sich wiederum auf S_3'', und wir erhalten das Strahlennetz, an welches je von X der Strahl x^2 zu ziehen ist, als Basis eines Büschels S_1'', welcher zwei entsprechenden Netzen zweier projectiver Netze-Büschel in S_3'' gemeinsam ist. Also entsteht durch die Grund-Strahlennetze der S_1'' ein Complex 2. Grades (Nr. 159), und die x^2 beschreiben den Kegel an denselben aus X.

Wenn also x^{01} einen Strahlenbüschel durchläuft, so beschreibt x^2 einen Kegel 2. Grades.

Mithin fallen nach dem Correspondenz-Principe für zweistufige Gebilde (Nr. 32) $(1 + 3 + 2)$-mal zwei entsprechende Strahlen x^{01} und x^2 zusammen. Das sind dann Strahlen aus X, welche zugleich zu 3 entsprechenden Grund-Strahlennetzen von S_3, S_3', S_3'' gehen.

Bei drei collinearen Gebüschen von Gewinden giebt es ∞^2 Gruppen von 3 entsprechenden Grund-Strahlennetzen, welche einen Strahl gemeinsam haben. Diese Strahlen bilden eine Congruenz 6. Grades.

Wir begnügen uns mit diesen Gebilden, da wir sonst zu weit über den Rahmen dieses Buches hinausgehen und uns auch zu weit von dem Gebiete der bisher untersuchten Strahlenörter entfernen würden.

Orthogonale Gewinde.

Zwei Gewinde Γ und Γ_1 sind *orthogonal oder rechtwinklig*, wenn 168
ihre Axen einen rechten Winkel bilden. Es giebt also ∞^4 Gewinde, welche zu einem gegebenen orthogonal sind.

Die Nullpunkte $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_1$ der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ in Bezug

auf zwei orthogonale Gewinde Γ und Γ_1 sind conjugirt nach der absoluten Curve $\mathfrak{K}^2$; folglich enthält jedes der beiden Gewinde die unendlich ferne Gerade, welche nach $\mathfrak{K}^2$ polar ist zum Nullpunkte der $\mathfrak{E}$ in Bezug auf das andere.

Zu einem Gewinde Γ sind alle diejenigen orthogonal, welche durch die Polare, nach $\mathfrak{K}^2$, des Nullpunktes $\mathfrak{U}$ der unendlich fernen Ebene in Bezug auf Γ gehen. Sie bilden also ein lineares System 4. Stufe mit einem Grundstrahle (Nr. 147).

Die Nullpunkte von $\mathfrak{E}$ nach den Gewinden eines Büschels polarisiren sich, in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$, in einen Strahlenbüschel. Alle Gewinde, welche diesen unendlich fernen Strahlenbüschel gemeinsam haben und also ein specielles Gebüsche bilden (Nr. 144), sind zu allen Gewinden des gegebenen Büschels rechtwinklig.

Die Polaren endlich, in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$, der Nullpunkte der Ebene $\mathfrak{E}$ für die Gewinde eines Netzes erfüllen das ganze Strahlenfeld in $\mathfrak{E}$; und dieses ist nur enthalten in einem Strahlengebüsche, dessen Leitgerade unendlich fern ist.

Also gleichzeitig orthogonal zu allen Gewinden eines Netzes sind nur die Gebüsche mit unendlich fernen Leitgeraden. Diese sind aber zu allen Gewinden orthogonal. Somit können wir zu den höherstufigen Systemen nicht aufsteigen.

In Bezug auf $\mathfrak{K}^2$, als ausgeartete Fläche 2. Grades, sind zwei Gerade polar (d. h. durch jede gehen die Polarebenen der auf der andern gelegenen Punkte), wenn ihre unendlich fernen Punkte in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$, als Curve 2. Grades, conjugirt sind. Jeder Strahl eines Gewindes Γ trifft einen Strahl des unendlich fernen Büschels ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{E}$) desselben, also muss die Polare von ihm in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$ als Fläche durch den Punkt gehen, der zu diesem Strahle in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$ als Curve polar ist, d. h. die Polare $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{U}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$ treffen. Also:

Durch Polarisirung in Bezug auf die absolute Curve $\mathfrak{K}^2$ als ausgeartete Fläche 2. Grades geht aus einem beliebigen Gewinde Γ das Gebüsche hervor, das die Polare des Nullpunktes der unendlich fernen Ebene in Bezug auf die Curve $\mathfrak{K}^2$ oder die Polare der Axe des Gewindes in Bezug auf dieselbe zur Leitgeraden hat oder dessen Strahlen zur Axe rechtwinklig sind.

Ein zu Γ orthogonales Gewinde enthält diese Leitgerade und ist also zu dem Gebüsche in Involution.

Nun lassen wir, mit d'Ovidio,*) *eine projective Verallgemeinerung des Begriffes „orthogonaler Gewinde“* eintreten.

Wir ersetzen $\mathfrak{K}^2$ durch eine allgemeine Fläche 2. Grades, die absolute

*) Vergl. die S. 175 angeführten Aufsätze.

Fläche, $\mathfrak{A}^2$, *und nennen ein Gewinde* Γ_1 *zu einem andern* Γ *orthogonal, wenn es mit dem Gewinde* Γ', *das zu* Γ *in Bezug auf* $\mathfrak{A}^2$ *polar ist, in Involution ist.* Dies polare Gewinde ist nun *allgemein.* Da durch die Polarisirung die Beziehung der Involution erhalten bleibt, so sind auch Γ und Γ_1', das zu Γ_1 in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$ polar ist, in Involution, und demnach auch Γ orthogonal zu Γ_1, also *ist die Beziehung der Orthogonalität gegenseitig.*

Es erhellt nun sofort aus den Sätzen über Gewinde und lineare Systeme von Gewinden, die in Involution sind, dass *zu einem einzelnen Gewinde* ∞^4 *Gewinde orthogonal sind, die ein lineares System 4. Stufe oder Gewebe bilden, zu sämmtlichen Gewinden eines Büschels, eines Netzes, eines Gebüsches, eines Gewebes alle Gewinde eines Gebüsches, eines Netzes, eines Büschels, ein einziges Gewinde orthogonal sind.*

Von zwei solchen linearen Systemen, bei denen jedes Gewinde des einen orthogonal ist zu jedem des andern, wollen wir sagen, dass *sie in vollkommener Orthogonalität sind.*

Ein lineares System i^{ter} Stufe ist vollkommen orthogonal zu einem andern linearen System, wenn $i+1$ von seinen Gewinden (die geeignet sind, es zu constituiren) zu dem letzteren Systeme orthogonal sind. 169

Wir nennen hingegen ein lineares System i^{ter} *Stufe* l*-fach orthogonal zu einem andern, wenn* $l \leqq i+1$ *unabhängige Gewinde in ihm* (d. h. solche, welche geeignet sind, ein lineares System $(l-1)^{\text{ter}}$ Stufe zu constituiren), *aber nicht mehr zum letzteren Systeme orthogonal sind.**)

Zu einem linearen Systeme k^{ter} Stufe giebt es höchstens $(5-k)$-fach orthogonale lineare Systeme.

Ein Büschel ist daher zu einem linearen Systeme einfach oder vollkommen orthogonal, je nachdem er nur ein Gewinde enthält, das zu allen Gewinden des Systems orthogonal ist, oder 2 von seinen Gewinden und damit alle zum Systeme orthogonal sind.

Es sei ein lineares System i^{ter} Stufe S_i l-fach orthogonal zu einem linearen System k^{ter} Stufe S_k; dann ist also jedes Gewinde von S_k orthogonal zu einem linearen System $(l-1)^{\text{ter}}$ Stufe S_{l-1} in S_i; wir nehmen nun aus S_i $i+1-l$ Gewinde heraus, die nicht zu S_{l-1} gehören, mit ihm (oder seinen l Constituenten) zusammen aber S_i constituiren können. Zu ihnen oder ihrem System $(i-l)^{\text{ter}}$ Stufe ist vollkommen orthogonal ein System von der Stufe $4-(i-l)$, welches mit dem S_k ein System von der Stufe

$$k+4-(i-l)-5=k-i+l-1$$

*) Analog können wir von linearen Systemen sprechen, die zu andern l-fach in Involution sind, bezw. die vollkommen in Involution sind.

gemein hat. Folglich, wenn wir aus diesem $k-i+l$ Gewinde als seine Constituenten heraus nehmen, so haben wir in S_k so viele unabhängige Gewinde, die nicht blos zum S_{l-1}, sondern zum ganzen S_i orthogonal sind.

Wenn also S_i l-fach zu S_k orthogonal ist, so ist S_k $(k-i+l)$-fach orthogonal zu S_i.

Der Beweis lehrt, dass $k-i+l-1 \geqq 0$, also $l \geqq i+1-k$ sein muss; wenn $i \leqq k$, wird dies von selbst erfüllt; *ist aber $i > k$, so muss diese Bedingung: $l \geqq i+1-k$ zugefügt werden.*

Der Beweis fordert ferner $i \geqq l$; der Satz ist aber, wie wir wissen, auch für den Fall $l = i+1$, d. h. den Fall vollkommener Orthogonalität richtig.

Wenn also z. B. ein Büschel einfach oder vollkommen orthogonal ist zu einem linearen System k^{ter} Stufe, so ist dies k-fach oder vollkommen orthogonal zum Büschel.

Innerhalb eines Büschels hat jedes Gewinde ein zu ihm orthogonales, in dem der Büschel sich mit dem Gewebe schneidet, das zu dem Gewinde orthogonal ist. *Also hat auch jedes Gewinde des Büschels selbst ein zu ihm orthogonales in demselben. Die beiden orthogonalen Gewinde durchlaufen den Büschel involutorisch,* weil die Orthogonalität gegenseitig statt hat. Jeder Büschel enthält also zwei Gewinde, die zu sich selbst orthogonal sind.

Ebenso sind innerhalb eines Netzes zu jedem Gewinde, und insbesondere zu jedem Gewinde des Netzes selbst, *alle Gewinde eines Büschels orthogonal.* U. s. w.

170 Wir wollen uns eingehend nur mit *Büscheln* beschäftigen, *die zu andern linearen Systemen einfach orthogonal sind.*

Hat ein Büschel, der zu einem linearen System einfach orthogonal ist, mit ihm überdies ein Gewinde gemein, so wollen wir ihn *perpendiculär zu demselben* nennen.

*Durch jedes Gewinde Γ kann man einen Büschel perpendiculär auf ein gegebenes lineares System S_i i^{ter} Stufe legen.**)

In der That, die Gewinde, welche zu allen Gewinden von S_i orthogonal sind, bilden ein lineares System S_{4-i}, welches mit Γ zusammen ein lineares System S_{5-i} constituirt. Dies hat mit S_i ein Gewinde Γ_1 gemein. Der Büschel $\Gamma\Gamma_1$, in S_{5-i} enthalten, hat wiederum mit dem ebenfalls in S_{5-i} befindlichen S_{4-i} ein Gewinde Γ_2 gemein (Nr. 156), das zum S_i orthogonal ist.

Das Gewinde Γ_1 können wir also *die Projection von Γ auf S_i* nennen.

*) Hingegen ∞^i, wenn Γ orthogonal zu S_i ist.

S_i ist, nach dem obigen Satze, zu dem Büschel $\Gamma\Gamma_1\Gamma_2$ i-fach orthogonal.

Durchläuft Γ einen Büschel B, so beschreiben auch Γ_1 und Γ_2 Büschel B_1 und B_2.

Ersterer ist dem S_i gemeinsam mit dem S_{6-i}, das durch S_{4-i} und B (oder deren $7 - i$ Constituenten) constituirt wird, letzterer hingegen dem S_{4-i} und dem durch die beiden Büschel B und B_1 constituirten in S_{6-i} enthaltenen Gebüsche gemein.

B_1 können wir wiederum *die Projection von B auf S_i* nennen.

Der Büschel B_2 ist vollkommen orthogonal zu S_i, also auch zu B_1, und demnach geht jeder von den projicirenden Büscheln durch ein zu B_2 orthogonales Gewinde und ist auch zu B_2 perpendiculär.

Man kann auch in jedem Gewinde Γ eines linearen Systems S_i einen perpendiculären Büschel „errichten", der ein anderes lineares System derselben Stufe S_i' schneidet.

Denn das durch Γ und das zu S_i vollkommen orthogonale System S_{4-i} bestimmte S_{5-i} hat mit S_i' ein Gewinde Γ' gemein, welches mit Γ verbunden einen Büschel giebt, der ein Gewinde von S_{4-i} enthält, also zu S_i perpendiculär ist.

Durchläuft Γ in S_i einen Büschel B, so durchläuft auch Γ' in S_i' einen Büschel B', nämlich denjenigen, den S_i' mit dem Systeme S_{6-i} gemein hat, das durch B und S_{4-i} bestimmt ist.

Und da auch jedem Gewinde Γ' von S_i' ein Gewinde Γ in S_i entspricht als Projection von Γ' auf S_i und Γ' und Γ sich gleichzeitig in Büscheln bewegen, so folgt, dass *die beiden Systeme S_i, S_i' gleicher Stufe collinear sind mit solchen Elementen als entsprechenden, in denen ein zu S_i perpendiculärer Büschel beide schneidet.*

Errichtet man nun auch in den Γ' die perpendiculären Büschel zu S_i', welche S_i je in Γ^* schneiden, so wird das System S_i zu sich selbst collinear mit Γ und Γ^* als entsprechenden Gewinden.

Ist dann Γ ein Gewinde von S_i, das sich mit seinem entsprechenden Gewinde Γ^* vereinigt hat (jedoch nicht S_i und S_i' gemein ist, in welchem Falle es sich auch noch mit Γ' vereinigen würde), so hat man, wenn Γ' das beiden entsprechende Gewinde in S_i' ist, d. h. der Schnitt des in Γ auf S_i errichteten „Perpendikels" mit S_i' und die Projection des $\Gamma^* \equiv \Gamma$ auf S_i', in dem Büschel $\Gamma\Gamma'$ *ein Perpendikel auf beiden Systemen S_i, S_i'.*

Eine leichte Modification erfordert der Fall $i = 4$.

In den einzelnen Fällen gestaltet es sich nun folgendermassen. 171

Zwei Büschel von Gewinden haben, im allgemeinen, kein Gewinde gemein. Da die Collineation (Projectivität), die wir nach dem eben

Gesagten in S_1 erhalten, zwei sich selbst entsprechende Elemente hat, so ergiebt sich:

Zu zwei Büscheln S_1 und S_1' von Gewinden giebt es zwei Büschel, welche zu beiden perpendiculär sind.

Diese beiden Büschel sind zu einander vollkommen orthogonal. Um diese letztere Behauptung darzuthun, suchen wir nach und nach zu einem beliebigen Gewinde Γ_1 von S_1 das zu ihm orthogonale Γ_2 in S_1, zu diesem das orthogonale Γ_1' in S_1', zu diesem das orthogonale Γ_2' in S_1' und zu diesem das orthogonale Γ_1^* in S_1. Durchläuft Γ_1 den Büschel S_1, so bewegen sich die andern projectiv zu ihm in S_1, bezw. S_1' und zweimal fällt Γ_1 mit Γ_1^* zusammen. Ist Γ_1 eins dieser Gewinde und sind dann Γ_2, Γ_2', Γ_1' die entsprechenden, so sind die Büschel $\Gamma_1 \Gamma_1'$ und $\Gamma_2 \Gamma_2'$ vollkommen orthogonal zu einander, da Γ_1 und Γ_1' zu Γ_2 und Γ_2' orthogonal sind.

Folglich giebt es zu zwei Büscheln von Gewinden stets zwei andere, welche beide schneiden und vollkommen orthogonal zu einander sind.

Nun geht aber S_1 durch Γ_2, welches zu $\Gamma_1 \Gamma_1'$ orthogonal ist, folglich ist S_1 zu $\Gamma_1 \Gamma_1'$ und mithin auch $\Gamma_1 \Gamma_1'$ zu S_1 einfach orthogonal oder, wegen des gemeinsamen Gewindes Γ_1, perpendiculär.

Die beiden jetzigen Büschel sind demnach mit den obigen, welche zugleich auf S_1 und S_1' perpendiculär sind, identisch.

Wenn S_1 und S_1' ein Gewinde Γ_0 gemeinsam haben, so ist der Büschel, welcher die beiden zu Γ_0 orthogonalen Gewinde in ihnen unter einander verbindet, offenbar das eine gemeinsame Perpendikel, denn S_1 und S_1' sind zu ihm einfach orthogonal.

Das andere Perpendikel wird unbestimmt; es muss durch Γ_0 gehen, denn wir fanden eben, dass die in demselben der beiden gegebenen Büschel befindlichen „Fussgewinde" (wenn wir sie so nennen wollen) Γ_1 und Γ_2, bezw. Γ_1', Γ_2' zu einander orthogonal sind.

Die Gebüsche, welche zu S_1 und S_1' vollkommen orthogonal sind, befinden sich beide in dem Gewebe der zu Γ_0 orthogonalen Gewinde und haben daher ein Netz gemein; alle ∞^2 Büschel von Γ_0 nach den Gewinden dieses Netzes sind zu S_1 und S_1' perpendiculär. Durch Γ_0 gehende Büschel aber, welche 2 verschiedene Gewinde enthalten, von denen das eine zu S_1, das andere zu S_1' orthogonal ist, müssen, weil sie zwei Gewinde des genannten Gewebes verbinden, diesem angehören, aber Γ_0 befindet sich nicht in demselben.

Interessant ist noch der Fall, wenn die beiden Büschel S_1 und S_1' selbst zu einander einfach orthogonal sind. Der eine der beiden perpendiculären Büschel verbindet dann diejenigen Gewinde Γ_1, Γ_1'

von S_1 und S_1', welche je zum andern orthogonal sind, der andere die zu diesen bezüglich orthogonalen Γ_2, Γ_2'.

Zwei vollkommen orthogonale Büschel haben ∞^2 gemeinsame Perpendikel. —

Wenn zwei Netze S_2, S_2' gegeben sind, so hat die Collineation (Γ, Γ^*), die sich, nach den obigen Erörterungen, in dem einen (S_2) von ihnen befindet, 3 sich selbst entsprechende Elemente.

Es giebt mithin 3 Büschel, welche zugleich zu zwei gegebenen Netzen von Gewinden perpendiculär sind.

Sie sind zu je zweien vollkommen orthogonal, da sie die gemeinsamen Perpendikel auf den Büscheln in S_2 und S_2' sind, welche ihre Fussgewinde verbinden.

Wenn die beiden Netze ein Gewinde Γ_0 gemein haben, so befinden sich die zu ihnen vollkommen orthogonalen Netze wiederum in dem Gewebe der zu Γ_0 orthogonalen Gewinde und haben nur ein Gewinde gemein; der Büschel, der dieses mit Γ_0 verbindet, ist das eine der 3 Perpendikel.

S_2 und S_2' enthalten ferner zwei Büschel, deren Gewinde zu Γ_0 orthogonal sind; die beiden gemeinsamen Perpendikel dieser Büschel sind die beiden übrigen.

Wenn die beiden Netze aber einen Büschel S_1^0 gemeinsam haben, so befinden sich die zu ihnen vollkommen orthogonalen Netze in dem Gebüsche, das zu S_1^0 vollkommen orthogonal ist, und haben einen Büschel gemein. Jeder Büschel von einem Gewinde des S_1^0 nach einem Gewinde dieses Büschels ist ein gemeinsames Perpendikel von S_2, S_2'. Ferner hat S_1^0 je ein zu ihm orthogonales Gewinde in S_2, S_2'; zu dem sie verbindenden Büschel sind S_2, S_2' zweifach orthogonal, weil sie einen zu ihm vollkommen orthogonalen Büschel enthalten; also ist dieser Büschel zu den Netzen einfach orthogonal (Nr. 169), und weil er sie schneidet, perpendiculär. So haben wir, ausser den ∞^2, noch ein einzelnes gemeinschaftliches Perpendikel.

Die Fälle, dass S_2 und S_2' einfach oder doppelt orthogonal zu einander sind, zu untersuchen, überlassen wir dem Leser.

Wenn zwei Gebüsche S_3 und S_3' von Gewinden gegeben sind, 172
so ist S_3 collinear zu sich selbst, mit Γ und Γ^* als entsprechenden Elementen.

Die beiden Gebüsche haben stets einen Büschel S_1^0 gemeinsam; jedes Gewinde desselben entspricht sich selbst in dieser Collineation, denn ersichtlich trifft jeder Büschel, der in einem Gewinde von S_1^0 zu S_3 oder S_3' perpendiculär ist, in dem nämlichen Gewinde das

andere Gebüsche; aber auf Perpendicularität zu diesem andern Gebüsche können wir daraus nicht schliessen.

Zu S_3 und S_3' sind vollkommen orthogonal bezw. zwei Büschel T_1, T_1', welche sich beide in dem Gebüsche T_3^0 befinden, das zu S_1^0 vollkommen orthogonal ist, also kein Gewinde gemein haben; folglich können wir nicht ein Gewinde von S_1^0 mit einem Gewinde verbinden, das zugleich zu S_3 und S_3' orthogonal ist, um zu einem auf beiden Gebüschen perpendiculären Büschel zu gelangen. Jeder Büschel aber, der ein Gewinde von T_1 mit einem von T_1' verbindet, gehört dem T_3^0 an und kann, da dieses mit S_1^0 kein Gewinde gemein hat, S_1^0 nicht treffen.

Unsere Collineation im Gebüsche S_3 mit einem Büschel von lauter sich selbst entsprechenden Gewinden ist analog (Nr. 141) zu der im Punktraume mit einer Geraden, deren sämmtliche Punkte sich selbst entsprechen. Eine solche besitzt dann, im allgemeinen, noch zwei einzelne sich selbst entsprechende Punkte. Also haben wir auch hier zwei einzelne zu sich selbst homologe Gewinde, und diese führen zu Büscheln, die auf beiden Gebüschen perpendiculär sind.

Zwei Gebüsche von Gewinden haben zwei zu beiden perpendiculäre Büschel.

Diese beiden Büschel sind, wenn S_3 und S_3' in den Büscheln S_1 und S_1' von T_3^0 geschnitten werden, die zu S_1 und S_1' gemeinsam perpendiculären Büschel; denn jeder von ihnen muss ein Gewinde von T_1 mit einem von T_1' verbinden, da er sowohl ein zu S_3, als ein zu S_3' orthogonales Gewinde enthält. Also gehören sie zu T_3^0, und weil sie orthogonal sind zu S_3 und S_3', so müssen sie es auch zu den Büscheln S_1, S_1' sein, welche aus diesen durch T_3^0 ausgeschnitten werden.

Umgekehrt, jeder der beiden Büschel, welche zu S_1 und S_1' perpendiculär sind, ist vollkommen orthogonal zu S_1^0, weil er zwei Gewinde verbindet, die zu S_1^0 orthogonal sind; er enthält ein Gewinde, das zu S_1 orthogonal ist, dieses ist also zu S_1 und zu S_1^0, also zu S_3 orthogonal, mithin ist der Büschel zu S_3 perpendiculär und ebenso zu S_3'. —

Zwei Gewebe endlich S_4 und S_4' haben nur einen zu beiden perpendiculären Büschel; er verbindet die beiden Gewinde, welche zu S_4, bezw. S_4' orthogonal sind.

Die Collineation innerhalb des Gewebes S_4 hat ein ganzes Gebüsche mit lauter sich selbst entsprechenden Gewinden, nämlich dasjenige, das ihm mit S_4' gemeinsam ist, und ausserdem noch ein einzelnes sich selbst entsprechendes Gewinde. Wir erhalten das Analogon in der Punkt-Geometrie, wenn wir die räumliche Homologie mit einem

Felde von sich selbst entsprechenden Punkten und einem einzelnen solchen Punkte auf den Raum von 4 Dimensionen verallgemeinern.

Ueber *Netze von Gewinden, welche zu andern linearen Systemen perpendiculär sind*, mögen folgende Bemerkungen genügen. 173

Das Schneiden kann in einem Gewinde oder in einem Büschel geschehen und die Orthogonalität kann ein- oder zweifach sein. Vollkommene Orthogonalität ist nicht möglich, wenn, wie wir es wollen, das Netz durch ein beliebiges Gewinde oder einen beliebigen Büschel gelegt werden soll.

Durch einen gegebenen Büschel B soll ein Netz gelegt werden, das einfach orthogonal ist zu einem gegebenen linearen System S_i und es schneidet. Wenn S_i 4. Stufe ist, dann wird es von jedem Netze in einem Büschel geschnitten; falls jedoch $i < 4$ ist, so hat B mit S_i, im allgemeinen, kein Gewinde gemein; wenn aber ein durch B gehendes Netz das S_i in einem Büschel schnitte, so hätten dieser und der B, als zwei Büschel eines Netzes, ein Gewinde gemein. Ebenso hat B mit dem zu S_i vollkommen orthogonalen Systeme T_{4-i} kein Gewinde gemein, also kann das Netz auch in T_{4-i} keinen Büschel schneiden, d. h. nicht zweifach orthogonal zu S_i sein.

B constituirt nun mit T_{4-i} ein S_{6-i}, das mit S_i einen Büschel gemein hat; jedes Gewinde desselben giebt, mit B verbunden, ein Netz, das, weil es zu S_{6-i} gehört, mit dem ebenfalls darin befindlichen T_{4-i} ein Gewinde gemein hat, also einfach orthogonal zu S_i ist.

Durch jeden Büschel gehen also ∞^1 Netze, welche zu einem gegebenen linearen System einfach orthogonal sind und es in einem Gewinde schneiden; keins davon schneidet das System in einem Büschel oder ist zweifach orthogonal zu ihm.

Es sei wiederum S_i gegeben und ein Gewinde Γ; wenn wir es mit allen Büscheln von S_i verbinden, so erhalten wir Netze, welche im System $\Gamma S_i \equiv S_{i+1}$ sich befinden. Wir wissen, dass dies mit T_{4-i} nur ein Gewinde Γ_2 gemein hat, und dass der Büschel $\Gamma\Gamma_2$ das S_i in der Projection Γ_1 von Γ auf S_i schneidet. Durch ihn müssen alle Netze gehen, welche Γ enthalten und zu S_i orthogonal sind; sie schneiden alle von selbst S_i, im allgemeinen nur in Γ_1. Sollen sie also S_i in einem Büschel schneiden, so muss dies einer der ∞^{i-1} von Γ_1 ausstrahlenden Büschel von S_i sein.

Sollen sie aber T_{4-i} in einem Büschel schneiden, um zweifach orthogonal zu S_i zu werden, so muss dieser Büschel einer der ∞^{3-i} Büschel*) von T_{4-i} sein, die von Γ_2 ausgehen. Da S_i und T_{4-i} kein

*) Zu einem S_4 giebt es überhaupt keine doppelt orthogonalen linearen Systeme.

Gewinde gemeinsam haben, so giebt es durch Γ kein Netz, welches sowohl S_i als T_{4-i} in einem Büschel schneidet.

Durch ein gegebenes Gewinde Γ giebt es also ∞^{i-1} Netze, die zu einem linearen Systeme i^{ter} Stufe einfach orthogonal sind und es in einem Büschel schneiden, ∞^{3-i} Netze, die zu ihm doppelt orthogonal sind und es in einem Gewinde schneiden, keins, das doppelt orthogonal ist und in einem Büschel schneidet.

174 Wir fanden (Nr. 169), dass *es in jedem Büschel 2 Gewinde giebt, welches zu sich selbst orthogonal ist.*

Es giebt deshalb ∞^4 Gewinde, welche diese Eigenschaft haben, und sie bilden ein quadratisches System, in ähnlicher Weise, wie die Strahlengebüsche. Wir nennen dies System A^2.*)

Wenn ein Gebüsche zu sich selbst orthogonal ist, so muss seine Leitgerade dem zu ihm in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$ polaren Gebüsche, auf welches es sich stützt, angehören, also der Leitgeraden desselben, die zu ihr nach $\mathfrak{A}^2$ polar ist, begegnen. Daher ist sie eine Tangente von $\mathfrak{A}^2$.

Die Leitgeraden der zu sich selbst orthogonalen Strahlengebüsche sind die Tangenten der absoluten Fläche $\mathfrak{A}^2$.

Wenn ein Gewinde Γ zu sich selbst orthogonal ist, also sich auf das zu ihm nach $\mathfrak{A}^2$ polare Γ' stützt, so ist auch dieses zu sich selbst orthogonal; beide gehören demnach zugleich zu A^2.

In dem Büschel $\Gamma\Gamma'$, der diese beiden Gewinde verbindet und zu sich selbst polar ist, haben wir 3 Involutionen: in der einen sind zwei Gewinde gepaart, die zu einander polar sind nach $\mathfrak{A}^2$, in der zweiten 2 Gewinde, welche einander stützen, in der dritten zwei zu einander orthogonale. Diese Involutionen sind zu je zweien harmonisch, d. h. die Doppelelemente jeder von ihnen bilden ein Paar in jeder der beiden andern. Die Doppelelemente der dritten sind zu sich selbst orthogonal, also zu einander polar und in Involution, mithin ist die dritte Involution zu den beiden andern harmonisch; folglich sind auch die beiden zu sich selbst polaren Gewinde und die beiden sich selbst stützenden, d. h. die Gebüsche des Büschels, zu einander orthogonal.

Die beiden Gebüsche sind zu einander polar, weil ein Gebüsche nur in ein Gebüsche durch Polarisirung in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$ übergehen kann: ihre Leitgeraden, zugleich diejenigen des Grund-Strahlennetzes des Büschels, sind die gemeinsamen Axen aller Gewinde des Büschels, in dem Sinne von Nr. 70. Jede dieser beiden Leitgeraden trifft nicht

*) d'Ovidio nennt es l'assoluto dei complessi lineari, während $\mathfrak{A}^2$ l'assoluto dei punti e dei piani ist.

blos die Polare (nach $\mathfrak{A}^2$) der andern, wie dies zur Orthogonalität der Gebüsche nothwendig ist, sondern ist mit ihr identisch.

Nun sind auch die erste und zweite Involution als harmonisch erkannt; also stützen sich die zu sich selbst polaren Gewinde unseres Büschels auf einander.

Wir werden in der That später, wenn wir über Correlationen sprechen werden, welche ein Gewinde in sich selbst transformiren, zeigen, dass ein Polarsystem alle und nur die Gewinde in sich selbst überführt, welche durch die eine oder andere Regelschaar seiner Basisfläche gehen. Wir wissen aber, dass die Gewinde-Netze, welche diese Regelschaaren zu Basen haben, sich auf einander stützen (Nr. 133); also enthält unser Büschel aus jedem dieser Netze ein Gewinde. —

Wir schliessen mit einigen Andeutungen über die *„Entfernungen" zwischen Gewinden und linearen Systemen von Gewinden*, welche von d'Ovidio a. d. a. Orten eingeführt worden sind.

In der projectiv verallgemeinerten Metrik, in welcher $\mathfrak{K}^2$ durch eine allgemeine Fläche 2. Grades ersetzt ist, wird als Entfernung zweier Punkte PP' definirt das Product aus $\frac{1}{2\pi i}$ in den natürlichen Logarithmus des Doppelverhältnisses, das sie mit den beiden Punkten bilden, in denen ihre Verbindungslinie die absolute Fläche $\mathfrak{A}^2$ schneidet. Ebenso schneidet der Verbindungsbüschel zweier Gewinde Γ, Γ_1 das System A^2, das „Absolute der Gewinde", in zwei Gewinden; „die Entfernung" der beiden Gewinde Γ und Γ_1 ist nun $\frac{1}{2\pi i}$ mal dem Logarithmus des Doppelverhältnisses der 4 Gewinde.

Die Entfernung ferner eines Gewindes von einem linearen Systeme von Gewinden ist seine Entfernung von seiner Projection auf dasselbe.

Zwei Büschel haben zwei zu ihnen perpendiculäre Büschel; die Entfernungen der beiden Fussgewinde in jedem nennt d'Ovidio die beiden Entfernungen der beiden Büschel oder ihrer Grund-Strahlennetze;*) das Product der Sinusse dieser beiden Entfernungen bezeichnet er als das Moment der beiden Büschel oder Strahlennetze, das der Cosinusse als ihr Comoment.

Zwei Netze haben drei Entfernungen. U. s. w.

*) Auch zwei Gerade haben, in der verallgemeinerten Metrik, *zwei* Entfernungen, da es zwei Gerade giebt, welche sie und ihre Polaren in Bezug auf die absolute Fläche zugleich treffen.

Die Gruppen von zwei bis sechs Gewinden, welche gegenseitig in Involution sind.*)

175 Die durch zwei aufeinander folgende *eindeutige Transformationen* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ entstehende Transformation pflegt man das *Product* von $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ zu nennen und wie ein gewöhnliches Product dadurch zu bezeichnen, dass man die beiden zu multiplicirenden Transformationen hinter einander schreibt in der Reihenfolge, in der sie vorzunehmen sind. Diese Multiplication ist im allgemeinen *nicht commutativ*; d. h. $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}'\mathfrak{T}$ sind verschieden. In $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ ist $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{T}'$ „nach"-, $\mathfrak{T}'$ mit $\mathfrak{T}$ „vor"-multiplicirt.

Durch eine involutorische Transformation $\mathfrak{T}$ werde ein Element X_1 des ersten Raumes in sein entsprechendes (nicht nothwendig gleichartiges) X_2 im zweiten Raume übergeführt; die Wiederholung der Transformation führt dann X_2 als Element des ersten Raumes in X_1 als Element des zweiten Raumes über.

Das Quadrat einer involutorischen Transformation ist mithin die Identität, d. h. diejenige Collineation, bei welcher jedes Element sich selbst entspricht. Weil die Multiplication mit der Identität keine Aenderung bewirkt, so empfiehlt es sich, in Formeln dieselbe durch 1 zu bezeichnen; im Texte aber soll sie durch $\mathfrak{J}_0$ bezeichnet werden.

Ist also $\mathfrak{T}$ involutorisch, so hat man $\mathfrak{T}^2 = 1$.

X_1 und X_2 seien zwei beliebige entsprechende Elemente von $\mathfrak{T}$; dieselben mögen durch $\mathfrak{T}'$ in X_1' und X_2' übergehn; und es werde angenommen, dass diese wiederum in $\mathfrak{T}$ entsprechend sind, sodass $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{T}'$ in sich selbst transformirt wird; dann werden die sich in $\mathfrak{T}'$ entsprechenden Elemente X_1 und X_1' durch $\mathfrak{T}$ in die sich ebenfalls in $\mathfrak{T}'$ entsprechenden Elemente X_2 und X_2' übergeführt.

Wenn also die eine von zwei Transformationen die andere in sich selbst transformirt, so ist es auch umgekehrt der Fall; sie heissen dann *vertauschbar.*

X_1 geht durch $\mathfrak{T}$ in X_2, X_2 durch $\mathfrak{T}'$ in X_2' über, X_1 durch $\mathfrak{T}'$ in X_1', X_1' durch $\mathfrak{T}$ in X_2, also ist $\mathfrak{T}\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'\mathfrak{T}$.

Das Product zweier vertauschbarer Transformationen ist commutativ.

Auch die Umkehrung ist richtig; denn wenn X_2 und X_1' die dem X_1 in $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ entsprechenden Elemente sind und X_2' sowohl das dem X_2 in $\mathfrak{T}'$, als das dem X_1' in $\mathfrak{T}$ entsprechende Element ist, so

*) Hierzu vergleiche man F. Klein, Mathem. Annalen Bd. 2 S. 198 und Caporali-del Pezzo a. a. O.

führt $\mathfrak{T}'$ die sich in $\mathfrak{T}$ entsprechenden X_1, X_2 in die sich gleichfalls in $\mathfrak{T}$ entsprechenden X_1', X_2' über.*)

Dass man in einem Producte von Transformationen zwei auf einander folgende Factoren stets durch ihr Product und umgekehrt ersetzen kann, geht unmittelbar aus der Definition eines solchen Productes hervor.

Im Folgenden werden wir es mit *lauter involutorischen Transformationen* zu thun haben.

Für diese gilt folgender allgemeiner Satz:

Wenn zwei involutorische Transformationen eine ebenfalls involutorische Transformation zum Producte haben, so sind sie vertauschbar und jede der 3 Transformationen ist das Product der beiden andern.

Es seien also $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ involutorisch und

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2;$$

dann ist:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2^2 = 1 = \mathfrak{T}_1^2,$$

also nach Unterdrückung des letzten Factors:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1,$$

und wenn mit $\mathfrak{T}$ nachmultiplicirt wird:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_1\mathfrak{T},$$

da $\mathfrak{T}^2 = 1$.

Ferner folgt aus der Voraussetzung durch Nachmultipliciren mit $\mathfrak{T}_1$, bezw. Vormultipliciren mit $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1, \quad \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}\mathfrak{T}_2$$

und also auch:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2, \quad \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}.$$

Mit zwei Gewinden Γ_1, Γ_2 sind 3 involutorische Transformationen 176
verbunden, nämlich die beiden den einzelnen Gewinden zugehörigen Nullsysteme, die wir nun $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ nennen wollen, *und die windschiefe Involution $\mathfrak{J}_{12} = \mathfrak{J}_{21}$, welche die Leitgeraden ihres Durchschnitts-Strahlennetzes zu Axen hat.*

Wenn die beiden Gewinde in Involution sind oder sich gegenseitig stützen, dann sind $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ vertauschbar und $\mathfrak{J}_{12}$ ist ihr Product; also:

$$1) \qquad \mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{J}_{12}.$$

Wir fanden nämlich in Nr. 106, dass bei zwei Gewinden Γ_1, Γ_2, die sich gegenseitig stützen, Nullpunkt X_1 und Nullebene ξ in Bezug

*) Vergl. Segre's in Nr. 85 erwähnte Abhandlung.

auf $\mathfrak{N}_1$, durch Polarisirung in Bezug auf $\mathfrak{N}_2$, übergehen in Nullebene ξ' und Nullpunkt X_2 in Bezug auf $\mathfrak{N}_1$; d. h. $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_1$.

X_1 und X_2, ξ und ξ' sind dann entsprechend in $\mathfrak{J}_{12}$.

Durch $\mathfrak{N}_1$ geht X_1 über in ξ und ξ durch $\mathfrak{N}_2$ in X_2; also

$$\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{J}_{12}.$$

Der obige Satz giebt dann:

$$2)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{J}_{12}\mathfrak{N}_1 &= \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_1\mathfrak{J}_{12}, \\ \mathfrak{J}_{12}\mathfrak{N}_2 &= \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2\mathfrak{J}_{12}; \end{aligned}$$

in der That, durch $\mathfrak{J}_{12}$ geht X_1 in X_2 über und X_2 durch $\mathfrak{N}_1$ in ξ' über, die Nullebene von X_1 in Bezug auf $\mathfrak{N}_2$.

Jede der 3 Transformationen $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{J}_{12}$ ist also das (commutative) Product der beiden andern, und das Quadrat jeder ist $\mathfrak{J}_0$. *Also bilden die 4 Transformationen* $\mathfrak{J}_0$, $\mathfrak{J}_{12}$; $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, *zwei Collineationen und zwei Correlationen (Reciprocitäten), ein in sich geschlossenes System von Transformationen, eine sogenannte Transformations-Gruppe.* Durch Multiplication mit einer der beiden Correlationen geht jede der beiden Theilgruppen in die andere über, hingegen durch Multiplication mit einer der Collineationen in sich selbst.

Aus einem Punkte X oder einer Ebene ξ *ergiebt sich durch die 4 Transformationen eine Figur* F_4 *von 2 Punkten und 2 Ebenen* X, X_{12}; ξ_1, ξ_2, *bezw.* ξ, ξ_{12}; X_1, X_2, *aus einer Geraden* x *eine Figur* f_4 *von 4 Geraden* x, x_{12}; x_1, x_2, *und jede dieser Figuren geht aus jedem ihrer Elemente durch die nämlichen 4 Transformationen hervor;* gehen wir z. B. in der ersten von ξ_2 aus, so ergiebt sich ξ_2, ξ_1; X_{12}, X.

177 *Zwei reelle Gewinde in Involution sind ungleich oder gleich gewunden, je nachdem ihr Schnitt-Strahlennetz reelle oder conjugirt imaginäre Leitgeraden hat;* denn im ersteren Falle werden sie durch die reellen Gebüsche, zu denen sie harmonisch sind, getrennt (Nr. 106).

Wenn zwei Gewinde Γ_1, Γ_2 conjugirt imaginär sind, so sind ihr Schnitt-Strahlennetz und ihr Büschel reell; denn die Nullebenen eines reellen Punktes sind conjugirt imaginär, ihr Schnittstrahl also reell. Die Involution sich gegenseitig stützender Gewinde im Büschel hat die Gebüsche zu Doppelelementen. Sie ruft in einem beliebigen reellen Strahlenbüschel eine Involution hervor, in welcher zu gepaarten Gewinden gehörige Strahlen ebenfalls gepaart sind; conjugirt imaginäre Gewinde führen dem Strahlenbüschel conjugirt imaginäre Strahlen zu. Die Strahleninvolution enthält also mindestens ein Paar aus conjugirt imaginären Strahlen, folglich hat sie reelle Doppelstrahlen und der Gewinde-Büschel reelle Gebüsche.

Wenn mithin zwei conjugirt imaginäre Gewinde in Involution sind, so hat ihr Schnitt-Strahlennetz reelle Leitgeraden.

Liegen 3 Gewinde Γ_1, Γ_2, Γ_3 vor, so haben wir, ausser der Iden- 178
tität $\mathfrak{J}_0$, 3 Nullsysteme $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$, ferner 3 windschiefe Involutionen $\mathfrak{J}_{12}$, $\mathfrak{J}_{13}$, $\mathfrak{J}_{23}$ und nach Nr. 133 *noch ein Polarsystem $\mathfrak{P}_{123}$, dessen Basis- oder Kernfläche die gemeinsame Regelschaar G_{123} der 3 Gewinde trägt.* Einem Punkte X, einer Ebene ξ entspricht in demselben die Verbindungsebene der Punkte X_{12}, X_{13}, X_{23}, der Schnittpunkt der Ebenen ξ_{12}, ξ_{13}, ξ_{23}, welche dem X, der ξ in den 3 Involutionen correspondiren.

Im Falle die 3 Gewinde sich gegenseitig stützen, bilden diese 8 Transformationen, 4 Collineationen $\mathfrak{J}_0$, $\mathfrak{J}_{12}$, $\mathfrak{J}_{13}$, $\mathfrak{J}_{23}$, 4 Correlationen $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{P}_{123}$ wiederum eine Transformationsgruppe. Dieselbe enthält natürlich 3 Untergruppen, welche blos von 2 Gewinden abhängen, und wir haben den Beweis nur noch für solche Transformationen zu führen, bei denen alle 3 Zeiger auftreten.

Es ist:

$$\mathfrak{J}_{12}\mathfrak{J}_{23} = \mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{J}_{13} = \mathfrak{J}_{23}\mathfrak{J}_{12};$$

oder, wenn h, i, k drei verschiedene Zeiger sind:

$$3)\qquad \mathfrak{J}_{hi}\mathfrak{J}_{hk} = \mathfrak{J}_{ik} = \mathfrak{J}_{hk}\mathfrak{J}_{hi}.$$

Also entsprechen die aus X durch $\mathfrak{J}_{12}$ und $\mathfrak{J}_{13}$ sich ergebenden Punkte einander in $\mathfrak{J}_{23}$; denn nach der Formel geht X_{12} durch $\mathfrak{J}_{23}$ in X_{13} über.

Daher ist $X_{12}X_{13}$ ein Leitstrahl von $\mathfrak{J}_{23}$ und demnach sind die Ebenen $XX_{12}X_{13}$ und $X_{23}X_{12}X_{13}$ auch in $\mathfrak{J}_{23}$ entsprechend. Letztere Ebene ist die Polarebene ξ_{123} von X im Polarsysteme $\mathfrak{P}_{123}$. Erstere aber ist die Nullebene ξ_1 von X in $\mathfrak{N}_1$, denn XX_{12}, XX_{13} sind Leitstrahlen von $\mathfrak{J}_{12}$, $\mathfrak{J}_{13}$, daher Strahlen der Netze $\Gamma_1\Gamma_2$, $\Gamma_1\Gamma_3$, mithin beide zum Gewinde Γ_1 gehörig. Also durch $\mathfrak{J}_{23}$ geht ξ_1 in ξ_{123} und ξ_{123} in ξ_1 über; daher:

$$\mathfrak{N}_1\mathfrak{J}_{23} = \mathfrak{P}_{123},\text{*)}\quad \mathfrak{P}_{123}\mathfrak{J}_{23} = \mathfrak{N}_1$$

oder allgemeiner:

$$4)\qquad \mathfrak{N}_h\mathfrak{J}_{ik} = \mathfrak{P}_{hik} = \mathfrak{J}_{ik}\mathfrak{N}_h,$$

$$5)\qquad \mathfrak{P}_{hik}\mathfrak{J}_{ik} = \mathfrak{N}_h = \mathfrak{J}_{ik}\mathfrak{P}_{hik};$$

5) folgt aus 4) auch durch den allgemeinen Satz am Schlusse von Nr. 175.

Ueberzeugen wir uns noch direct von der Vertauschbarkeit von

*) Diese Formel gilt auch, wenn Γ_2, Γ_3 nur zu Γ_1, aber nicht gegenseitig in Involution sind; denn $\mathfrak{J}_{23}$, $\mathfrak{P}_{123}$ hängen vom ganzen Büschel $\Gamma_2\Gamma_3$ ab.

$\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{J}_{23}$, bezw. von $\mathfrak{P}_{123}$ und $\mathfrak{J}_{23}$. Dem X entspricht X_{23} in $\mathfrak{J}_{23}$ und diesem in $\mathfrak{N}_1$ die Ebene ξ_{123}, da sich X_{23} und X_{12} in $\mathfrak{J}_{13}$ entsprechen, X_{23} und X_{13} in $\mathfrak{J}_{12}$, also die beiden von X_{23} ausgehenden Strahlen $X_{23}X_{12}$ und $X_{23}X_{13}$ zu Γ_1 gehören. Die Polarebene ferner von X_{23} in $\mathfrak{P}_{123}$ verbindet die 3 Punkte, die ihm in $\mathfrak{J}_{12}$, $\mathfrak{J}_{13}$, $\mathfrak{J}_{23}$ entsprechen, das sind: X_{13}, X_{12}, X; also ist sie die Ebene ξ_1.

Damit ist die Geschlossenheit des Systems der 8 Transformationen bewiesen.

Jede der 4 Correlationen verwandelt wiederum jede der beiden Hälften der Gruppe in die andere.

179 *Aus jedem Punkte X (oder jeder Ebene ξ) ergiebt sich durch die Gruppe eine Figur F_8 von 4 Punkten und 4 Ebenen:*

$$X,\ X_{12},\ X_{13},\ X_{23};\quad \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_{123}.$$

Dieselben bilden ein und dasselbe Tetraeder; denn z. B. $XX_{12}X_{13} \equiv \xi_1$, $X_{12}X_{13}X_{23} \equiv \xi_{123}$.

Gehen wir von X_{23}, ξ_2, ξ_{123} aus, so geben die 8 Transformationen in derselben Reihenfolge:

$$X_{23},\ X_{13},\ X_{12},\ X;\quad \xi_{123},\ \xi_3,\ \xi_2,\ \xi_1;$$

$$\xi_2,\ \xi_1,\ \xi_{123},\ \xi_3;\quad X_{12},\ X,\ X_{23},\ X_{13};$$

$$\xi_{123},\ \xi_3,\ \xi_2,\ \xi_1;\quad X_{23},\ X_{13},\ X_{12},\ X.$$

Jedes dieser Tetraeder ist ein Polartetraeder im Polarsysteme $\mathfrak{P}_{123}$.

Denn ξ_{123} ist die Polarebene von X, ξ_1 die von X_{23}, wie oben bewiesen wurde.

Die 3 Kantenvierseite gehören bezw. zu den 3 Gewinden, z. B. das Vierseit $XX_{12}X_{23}X_{13}$ zu Γ_1; das dritte Paar Gegenkanten XX_{23}, $X_{12}X_{13}$ befindet sich in dem Strahlennetze $\Gamma_2\Gamma_3$; beide Linien sind Leitstrahlen von $\mathfrak{J}_{23}$. In Bezug auf Γ_1 sind sie polar zu einander, denn die Nullebenen, in Bezug auf Γ_1 oder $\mathfrak{N}_1$, der beiden Punkte der einen Geraden gehen durch die andere.

Aus jeder Geraden x geht durch die 8 Transformationen *eine Figur f_8 von 8 Geraden* hervor:

$$x,\ x_{12},\ x_{13},\ x_{23};\quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_{123};$$

wir werden später sehen, dass dieselben zu dem nämlichen Strahlennetze gehören.

180 Wir bezeichnen *die 6 Leitgeraden der Schnittcongruenzen der 3 Gewinde* mit l_{12}, l_{12}'; l_{13}, l_{13}'; l_{23}, l_{23}' oder kürzer, sobald die beiden zusammengehörigen auch zusammen betrachtet werden, mit (12), (13), (23).

Alle 6 Geraden befinden sich in der Leitschaar L_{123} der Grund-Regelschaar G_{123} des Netzes $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$.

Die Gebüsche $[l_{12}]$, $[l_{12}']$ sind auch in Involution zu Γ_3, also ihre Axen in Γ_3 gelegen.

Jedes der 3 Paare (12), (13), (23) befindet sich daher im jeweiligen dritten Gewinde.

Die (12) gehören also zu Γ_3, als Leitgeraden aber eines in Γ_1 befindlichen Strahlennetzes sind sie polar in Bezug auf Γ_1; folglich sind l_{13}', l_{13} die Polaren von l_{13} in Bezug auf Γ_1 und Γ_2, daher zu (12) harmonisch (Nr. 106).

Die 3 Paare der Leitgeraden (12), (13), (23) der Strahlennetze, in denen 3 sich gegenseitig stützende Gewinde einander durchschneiden, sind zu je zweien harmonisch.

Sie rufen in der Regelschaar L_{123}, in der sie sich alle befinden, 3 Involutionen hervor, von denen jede 2 Paare auch zu Paaren hat, die Geraden des dritten Paares aber zu Doppelstrahlen.

Wenn Γ_1, Γ_2, Γ_3 reell sind, so sind G_{123} und L_{123} reell oder ima- 181
ginär mit reellem Polarsystem $\mathfrak{P}_{123}$ in beiden Fällen (gehörig zu einem einmanteligen Hyperboloide, bezw. einem imaginären Ellipsoide). *Im letzteren Falle bestehen alle 3 Paare (12), (13), (23) aus conjugirt imaginären Geraden und* Γ_1, Γ_2, Γ_3 (überhaupt alle Gewinde des Netzes) *sind gleich gewunden.*

Im ersteren Falle hingegen, wo G_{123} und L_{123} reell sind, sei k^2 der reelle Schnitt der L_{123} mit einer reellen Ebene; die in dieser Ebene liegenden reellen Strahlen der Netze $\Gamma_1 \Gamma_2$, $\Gamma_1 \Gamma_3$, $\Gamma_2 \Gamma_3$ verbinden je die Spuren von (12), (13), (23) und sind, weil je zwei dieser Paare harmonisch zu einander sind, conjugirt zu je zweien in Bezug auf k^2; also bilden sie ein Polardreieck dieser reellpunktigen Curve und zwei von ihnen schneiden dieselbe reell, die dritte imaginär. Von den 3 Paaren (12), (13), (23) bestehen demnach 2 aus reellen, das dritte aus conjugirt imaginären Geraden. Seien jene (12), (13), so ist Γ_1 anders gewunden als Γ_2 und Γ_3.

Wenn 3 reelle Gewinde, welche gegenseitig in Involution sind, eine reelle gemeinsame Regelschaar haben, so besitzen zwei von den 3 Strahlennetzen, in denen sie sich durchschneiden, reelle Leitgeraden, das dritte conjugirt imaginäre und das Gewinde, dem die beiden ersten Strahlennetze angehören, ist anders gewunden als die beiden übrigen.

Wenn aber Γ_1 reell und Γ_2, Γ_3 conjugirt imaginär sind, so sind die Geraden (23) reell, (12), (13) aber imaginär und zwar die (12) zu den (13) conjugirt. Zur Bildung der gemeinsamen Regelschaar

G_{123} können wir Γ_2, Γ_3 durch 2 reelle Gewinde ihres Büschels ersetzen, z. B. durch die Gebüsche $[l_{23}]$, $[l_{23}']$, und erhalten, dass G_{123} *und* L_{123} *reell sind.*

182 *Von den 3 windschiefen Involutionen, welche je die Gegenkanten eines Tetraeders zu Axen haben, sind je zwei vertauschbar und jede das Product der beiden andern.*

Die Gegenkanten seien a, a_1; b, b_1; c, c_1 und zwar verbinde c die Punkte ab_1 und ba_1 und sei der Schnitt der Ebenen ab und a_1b_1, während durch c_1 die Punkte ab, a_1b_1 verbunden werden und in ihr die Ebenen ab_1, ba_1 sich schneiden. Die 3 Involutionen seien $\mathfrak{I}_a$, $\mathfrak{I}_b$, $\mathfrak{I}_c$. In den beiden ersteren entsprechen dem Punkte X die Punkte Y, Z, so dass, wenn A, A_1 die Schnitte von XY mit a, a_1, B, B_1 diejenigen von XZ mit b, b_1 sind, die Würfe AA_1XY und BB_1XZ harmonisch sind; da sie überdies perspectiv sind, so treffen sich AB und A_1B_1 auf YZ; weil sie aber bezw. in den Ebenen ab und a_1b_1 liegen, so müssen sie sich auf der Schnittlinie c begegnen und durch den Begegnungspunkt C muss also YZ gehen. Ebenso hat YZ mit c_1 einen Schnittpunkt C_1, durch den auch AB_1 und A_1B gehen. Der Wurf CC_1YZ ist aber die Projection von AA_1YX aus B, mithin auch harmonisch; also sind Y, Z entsprechend in $\mathfrak{I}_c$.

X geht durch $\mathfrak{I}_a$ in Y, Y durch $\mathfrak{I}_c$ in Z über, der dem X in $\mathfrak{I}_b$ entspricht; also:

$$\mathfrak{I}_a \cdot \mathfrak{I}_c = \mathfrak{I}_b.$$

Die Vertauschbarkeit, welche schon aus dem Satze von Nr. 175 folgt, ergiebt sich auch bei der Reihenfolge ZYX.

183 *Bei 4 Gewinden* Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 *haben wir die Identität* $\mathfrak{I}_0$, *4 Nullsysteme* $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_4$, *6 windschiefe Involutionen* $\mathfrak{I}_{12}, \ldots, \mathfrak{I}_{34}$, *4 Polarsysteme* $\mathfrak{P}_{123}, \ldots, \mathfrak{P}_{234}$ *und die windschiefe Involution* $\mathfrak{I}_{1234}$, *welche die allen 4 Gewinden gemeinsamen Geraden* (g) *zu Axen hat, also 8 Collineationen und 8 Correlationen.*

Alle 12 Leitgeraden (12), ..., (34) treffen die beiden Geraden (g). Sind die 4 Gewinde gegenseitig in Involution, so sind es auch die ganzen Büschel $\Gamma_1\Gamma_2$ und $\Gamma_3\Gamma_4$, folglich gehören die Leitgeraden des Grund-Strahlennetzes des einen zu demjenigen des andern; oder (12), (34) bilden ein windschiefes Vierseit, und die (g) sind dessen Diagonalen.

Die 6 Paare der Leitgeraden der Schnitt-Strahlennetze von 4 Gewinden in Involution sind Gegenkanten-Paare von 3 Tetraedern; für alle ist gemeinsames Gegenkanten-Paar das der Geraden, welche allen 4 Gewinden gemeinschaftlich sind, während die 4 übrigen Kanten Leitgeraden von zwei Strahlennetzen sind, die von allen 4 Gewinden herrühren.

Die 3 Tetraeder haben also zu Kanten:

$$(12),\ (34),\ (g);\quad (13),\ (24),\ (g);\quad (14),\ (23),\ (g).$$

Nach dem eben bewiesenen Satze haben wir, wenn h, i, k, l vier verschiedene Zeiger sind:

6) $$\mathfrak{J}_{hi}\mathfrak{J}_{kl} = \mathfrak{J}_{1234},$$

7) $$\mathfrak{J}_{hi}\mathfrak{J}_{1234} = \mathfrak{J}_{kl}.$$

Ferner:

8) $$\mathfrak{P}_{hik}\mathfrak{N}_l = \mathfrak{J}_{hi}\mathfrak{N}_k\mathfrak{N}_l = \mathfrak{J}_{hi}\mathfrak{J}_{kl} = \mathfrak{J}_{1234},$$

9) $$\mathfrak{P}_{hik}\mathfrak{J}_{hl} = \mathfrak{P}_{hik}\mathfrak{N}_h\mathfrak{N}_l = \mathfrak{J}_{ik}\mathfrak{N}_l = \mathfrak{P}_{ikl},$$

wobei 4), 1), 5) benutzt sind.

Mithin ist wegen des Satzes von Nr. 175:

10) $$\mathfrak{J}_{1234}\mathfrak{N}_h = \mathfrak{P}_{ikl},$$

11) $$\mathfrak{J}_{1234}\mathfrak{P}_{hki} = \mathfrak{N}_l,$$

12) $$\mathfrak{P}_{hik}\mathfrak{P}_{hil} = \mathfrak{J}_{kl}.$$

Alle diese Producte sind commutativ.

Damit ist die *Geschlossenheit des Systems der 8 Collineationen und 8 Correlationen* bewiesen.

Die Figur F_{16}, die aus einem Punkte X (oder aus einer Ebene) sich durch diese Transformationen ergiebt, besteht aus 8 Punkten: X, $X_{12}, \ldots, X_{34}$, X_{1234} und 8 Ebenen: $\xi_1, \ldots, \xi_4$, $\xi_{123}, \ldots, \xi_{234}$, welche auf 4 Weisen 2 Möbius'sche Tetraeder bilden (Nr. 49). 184

Die 3 Gewinde Γ_1, Γ_2, Γ_3 z. B. geben uns (Nr. 179) das Tetraeder

$$\text{I}\quad XX_{23}X_{31}X_{12} \equiv \xi_{123}\xi_1\xi_2\xi_3,$$

bei welcher Bezeichnung Ecke und Gegenebene an gleichvielter Stelle stehen.

Die 8 übrigen Elemente von F_{16} ergeben sich aus diesen 8 durch Polarisirung in Bezug auf $\mathfrak{N}_4$:

$$\text{II}\quad \xi_4\xi_{234}\xi_{341}\xi_{412} \equiv X_{1234}X_{14}X_{24}X_{34}$$

(wegen 4), 8), 1)), und daher sind diese beiden Tetraeder gegenseitig um- und eingeschrieben.

Die drei andern Paare gehören zu $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$.

In allen 4 Fällen sind entsprechende Ecken, bezw. Ebenen (d. h. solche, von denen jede mit der Gegenebene, bezw. Gegenecke der andern incidirt):

$$XX_{1234},\ X_{23}X_{14},\ X_{31}X_{24},\ X_{12}X_{34};\ \xi_1\xi_{234},\ \xi_2\xi_{341},\ \xi_3\xi_{412},\ \xi_{123}\xi_4.$$

Dass I ein Polartetraeder für $\mathfrak{P}_{123}$ ist, wissen wir aus Nr. 179; wir bestätigen leicht, dass das auch für II gilt. —

Realitäts-Untersuchungen können hier unterlassen werden, weil man aus der allgemeineren Gruppe von 6 Gewinden in Involution Schlüsse machen kann.

Ebenso unterlassen wir die Betrachtung der Gruppen von 16 Geraden, die aus einer Geraden durch die 16 Transformationen sich ergeben.

185 Wir können auch den Fall von *5 Gewinden in Involution* übergehen, da *die mit ihnen verbundene Transformations-Gruppe mit derjenigen identisch ist, die zu der Gruppe von 6 Gewinden gehört, welche aus der von 5 Gewinden durch Hinzufügung des auf alle 5 sich stützenden Gewindes sich ergiebt.* Wir wissen (Nr. 131, 133), dass bei einer solchen Gruppe die Regelschaar, welche 3 Gewinden gemeinsam ist, und diejenige, in der sich die 3 übrigen schneiden, dieselbe Trägerfläche und also auch dasselbe Polarsystem haben, so dass:

$$\mathfrak{P}_{hik} \equiv \mathfrak{P}_{lmn};$$

ferner, dass die gemeinsamen Geraden von je 4 Gewinden die Leitgeraden des Schnitt-Strahlennetzes der beiden übrigen sind, also:

$$\mathfrak{J}_{hikl} \equiv \mathfrak{J}_{mn}.$$

Bei 5 Gewinden $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_5$ hat man zunächst nur 31 Transformationen, nämlich 16 Collineationen: $\mathfrak{J}_0, \mathfrak{J}_{12}, \ldots, \mathfrak{J}_{45}, \mathfrak{J}_{1234}, \ldots, \mathfrak{J}_{2345}$, und 15 Correlationen: $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_5, \mathfrak{P}_{123}, \ldots, \mathfrak{P}_{345}$.

Sind die Gewinde in Involution, so bilden diese noch keine Gruppe, sondern man muss noch das Nullsystem $\mathfrak{N}_6$ des Gewindes Γ_6 hinzunehmen, das sich auf alle 5 stützt; denn z. B. $\mathfrak{J}_{1234}\mathfrak{N}_5 \equiv \mathfrak{J}_{56}\mathfrak{N}_5 = \mathfrak{N}_6$.

Die bei den 6 Gewinden scheinbar neu hinzutretenden Transformationen sind aber mit schon vorhandenen identisch; z. B. $\mathfrak{P}_{126}$ mit $\mathfrak{P}_{345}$, $\mathfrak{J}_{16}$ mit $\mathfrak{J}_{2345}$, $\mathfrak{J}_{56}$ mit $\mathfrak{J}_{1234}$, $\mathfrak{J}_{1236}$ mit $\mathfrak{J}_{45}$.

Demnach hat man bei 6 Gewinden in Involution 16 Collineationen: die Identität und 15 windschiefe Involutionen, 16 Correlationen: 6 Nullsysteme, 10 Polarsysteme.

Bei den windschiefen Involutionen ergiebt sich als vorzuziehende Bezeichnung die durch 2 Zeiger; bei den Polarsystemen müssten wir, wenn wir alle 6 Gewinde gleichmässig berücksichtigen wollen, die etwas umständliche Bezeichnung $\mathfrak{P}_{123,456}$ anwenden; wir werden uns jedoch mit dem jeweilig geeigneteren Zeiger-Tripel begnügen, meistens das 6 nicht enthaltende bevorzugen.

Ein symbolisches Product mit 6 Zeigern ist nur bei zwei iden-

tischen Polarsystemen möglich und ist gleich der Identität, ein solches mit 5 Zeigern muss ebenfalls ein Polarsystem enthalten und wird, indem man dasselbe durch das identische ersetzt, auf 3 Zeiger gebracht.

Also erhalten wir keine neue Formel; *die Geschlossenheit des Systems der 32 Transformationen ist dargethan.* Die Gruppen von 2, 3, 4 Gewinden, die aus unserer Sechser-Gruppe genommen werden können, geben Untergruppen von 4, 8, 16 Transformationen in unserer Transformationsgruppe G_{32}. Jede zwei Transformationen befinden sich mindestens in einer Untergruppe, zu der dann auch ihr Product gehört.

Von den 15 Paaren der Leitgeraden der Schnitt-Strahlennetze be- 186
finden sich je die 10 Paare, die nur 5 Zeiger tragen, in dem Gewinde, das den sechsten Zeiger hat, je die 6 Paare, bezw. 3 Paare, welche 4 oder 3 Zeiger tragen, in dem Strahlennetze, bezw. der Regelschaar, welche den Gewinden mit den übrigen Zeigern gemeinsam ist.

Von den so in einer Regelschaar befindlichen sind je zwei zu einander harmonisch.

Drei Leitgeraden-Paare, welche alle 6 Zeiger enthalten, wie:

$$(12),\ (34),\ (56),$$

sind die Gegenkanten-Paare eines Tetraeders T; denn die (56) sind die gemeinsamen Geraden (g) der 4 Gewinde Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 (Nr. 137).

Solcher Tetraeder T giebt es 15; weil es 5 Zeigerpaare mit dem einen Zeiger 1 giebt und die 4 übrigen Zeiger 3 Paare von Paaren bilden.

Mit jedem dieser Tetraeder haben $2 . 3 = 6$ von den 14 übrigen ein Paar Gegenkanten gemein.

Die Basisfläche jedes der 10 Polarsysteme enthält 6 Paare, je 3 in jeder der beiden Schaaren. Die Geraden jedes der 9 übrigen Paare sind polar in Bezug auf die Fläche.

Auf derjenigen z. B. von $\mathfrak{P}_{123} \equiv \mathfrak{P}_{456}$ liegen nicht (14); sie treffen die (23) aus der einen, die (56) aus der andern Regelschaar, bilden mit ihnen ein Tetraeder, sind daher die Diagonalen des von (23), (56) gebildeten Vierseits.

Aus den 9 Paaren, die ausserhalb der Basisfläche eines Polarsystems liegen, kann man 6 Tetraeder T bilden, die in zwei Ternen zerfallen, derartig, dass jede Terne alle 9 Paare umfasst. Diese 6 Tetraeder sind dann sämmtlich Polartetraeder des Polarsystems.

Zum Polarsysteme $\mathfrak{P}_{245}$ gehören so die in einer Zeile oder Colonne des folgenden quadratischen Schemas stehenden Tetraeder I, II, III; I', II', III':

	I′	II′	III′
I	(12)	(34)	(56)
II	(35)	(26)	(14)
III	(46)	(15)	(23).

Also gehört jedes Tetraeder T zu $\frac{1}{15} \cdot 10 \cdot 6 = 4$ *Polarsystemen;* z. B. (12) (34) (56) zu $\mathfrak{P}_{135}$, $\mathfrak{P}_{145}$, $\mathfrak{P}_{235}$, $\mathfrak{P}_{245}$.

187 *Die 1770 Verbindungslinien der 60 Ecken der 15 Tetraeder T sind zugleich die Schnittlinien der Ebenen derselben und zerfallen in 3 Gruppen.*

Die erste wird durch die 30 Kanten der Tetraeder oder Leitgeraden l_{12} . . ., *gebildet,* von denen jede 15fach unter den Verbindungslinien und Schnittlinien zählt; denn *sie gehört zu 3 Tetraedern und es liegen auf ihr 6 Ecken und 6 Flächen gehen durch sie.* Z. B. l_{12} gehört zu den 3 Tetraedern: (12) (34) (56), (12) (35) (46), (12) (36) (45. Durch die 3 Paare Ecken auf l_{12} gehen also die 3 Paare (34), (35), (45) und da dieselben in einer Regelschaar ($L_{354} \equiv G_{126}$) liegen und zu je zweien harmonisch sind, so *sind auch die 3 Paare der je zu dem nämlichen Tetraeder T gehörigen Ecken oder Flächen, die auf einer der 30 Leitgeraden* l_{12} . . . *liegen, bezw. durch sie gehen, zu je zweien harmonisch.*

Betrachten wir das Tetraeder (12) (34) (56) genauer; seine Ecken seien

$$A \equiv l_{12} l_{34} l_{56},\; B \equiv l_{12} l_{34}' l_{56}',\; C \equiv l_{12}' l_{34} l_{56}',\; D \equiv l_{12}' l_{34}' l_{56}$$

und α, β, γ, δ die Gegenflächen.

Durch l_{12} gehen noch 4 andere Ebenen φ, zu den beiden andern Tetraedern gehörig, welche l_{12} zur Kante haben, ebenso durch l_{34} 4 Ebenen χ und durch l_{56} 4 Ebenen ψ. Es sei $l_{12} l_{35} l_{46}$ eine der φ und $l_{34} l_{26} l_{15}$ *) eine der χ. Auf der Schnittlinie liegen, ausser A, noch die Ecken $l_{35} l_{26} \equiv E$ und $l_{46} l_{15} \equiv F$, durch welche die dritten Geraden l_{14}, bezw. l_{23} gehen. Die 3 Geraden l_{56}, l_{14}, l_{23}, zu dem Tetraeder (56) (14) (23) gehörig, laufen entweder in eine Ecke desselben zusammen oder liegen in einer von seinen Flächen; da sie aber von unserer Schnittlinie in 3 verschiedenen Punkten A, E, F getroffen werden, so ist letzteres der Fall, und die Fläche ist eine der ψ.

Durch jede Schnittlinie einer φ mit einer χ geht auch eine ψ. So erhalten wir aus A 16 derartige Schnittlinien von je 3 Tetraederebenen, und jede enthält ausser A noch 2 Tetraederecken. *Mithin haben wir solcher Verbindungslinien und Schnittlinien, von denen jede 3*

*) Diejenige von 2 Geraden (hi), welche zuerst erwähnt wird, kann l_{hi} (ohne Accent) genannt werden, die andere l_{hi}'.

von den 60 Ecken verbindet und in 3 von den 60 Ebenen liegt, insgesammt $\frac{1}{3}$. 60 . 16 = 320. *Wie aus jeder der Ecken 16 kommen, so liegen auch in jeder Tetraederebene 16.*

Sie zählen dreifach unter sämmtlichen 1770 Geraden; es bleiben daher noch 1770 — 30. 15 — 3 . 320 = 360.

Um zu diesen zu gelangen, schneiden wir eine der Ebenen φ, etwa wiederum $l_{12} l_{35} l_{46}$, mit der der Kante l_{12} an der Ecke A gegenüberliegenden Seitenfläche unseres Tetraeders, also mit $l_{34} l_{56} l_{12}'$; auf der Schnittlinie liegt ausser A noch der Punkt $l_{12}' \, l_{35} \, l_{46}$. *Solcher Linien haben wir aus jeder Ecke oder in jeder Ebene eines der Tetraeder* 3 . 4 = 12, *also im Ganzen* $\frac{1}{2}$. 60 . 12 = 360.

Durch die 32 Transformationen unserer Gruppe G_{32} *ergiebt sich* 188
aus jedem Punkte X oder jeder Ebene ξ *des Raumes eine Figur* F_{32} *von 16 Punkten und 16 Ebenen, welche aus jedem ihrer Elemente durch die nämlichen Transformationen hervorgeht.**)

Betrachten wir zunächst die 6 Nullpunkte einer Ebene ξ, $X_1, \ldots X_6$. Der Schnitt der ξ mit irgend einem der Tetraeder, z. B. mit (12)(34)(56), ist ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen Gegenkanten treffen, also zu den Strahlennetzen $\Gamma_1 \Gamma_2$, $\Gamma_3 \Gamma_4$, $\Gamma_5 \Gamma_6$ gehören und daher je die Nullpunkte X_1, X_2; X_3, X_4; X_5, X_6 enthalten. Da nun die Gewinde zu je zweien in Involution sind, so sind die Nullpunkte harmonisch zu den jeweiligen Schnittpunkten der Diagonale mit den Leitgeraden, d. h. zu den durch sie verbundenen Gegenecken des Vierseits. Für den Kegelschnitt, der durch 5 von den Nullpunkten geht, sind daher 2 Paare Gegenecken des Vierseits conjugirt, folglich, nach Hesse's Satz,**) auch das dritte Paar; demnach geht der Kegelschnitt auch durch den 6. Nullpunkt.

Die Nullpunkte einer Ebene in Bezug auf 6 Gewinde, welche gegenseitig in Involution sind, befinden sich stets auf einem Kegelschnitte und die Nullebenen eines Punktes berühren den nämlichen Kegel 2. Grades.

Geht ξ durch eine Ecke eines der Tetraeder, etwa des (12) (34) (56), so laufen 3 von den 4 Seiten des Vierseits durch diese Ecke und vereinigen sich mit den Diagonalen; infolge dessen werden 4 von den 6 Nullpunkten gebildete Sechsecke, z. B. $X_1 \, X_3 \, X_5 \, X_2 \, X_4 \, X_6$, Brianchon'sche.

*) Deshalb bezeichnen wir die Elemente der Figur verschiedenartig, je nachdem wir sie — für den augenblicklichen Zweck — aus einem Punkte X oder aus einer Ebene ξ abgeleitet denken.

**) Vergl. Steiner-Schröter's Vorlesungen über synthetische Geometrie S. 419 der 2. Aufl.

In derjenigen Transformation von G_{32}, in der sich irgend zwei (gleichartige oder ungleichartige) Elemente von F_{32} entsprechen, entsprechen natürlich auch die 6 Nullelemente des einen denen des andern und also auch der Kegelschnitt oder Kegel, der jene umfasst, dem Kegelschnitte oder Kegel, von welchem diese umfasst werden.

Ausserhalb eines Punktes oder einer Ebene der F_{32} liegen die 10 Polarebenen, bezw. die 10 Pole nach den Polarsystemen.

189 Die 6 Nullebenen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$, die von einem Punkte X der F_{32} kommen, gehen zu je zwei durch die 15 andern Punkte, z. B. ξ_1, ξ_2 durch X_{12}, also sind ihre 15 Schnittlinien zugleich die 15 Geraden aus X nach diesen 15 andern Punkten. *Und daher sind die 120 Verbindungslinien der 16 Punkte von F_{32} mit den 120 Schnittlinien der 16 Ebenen identisch.*

Zu jedem von den 16 Punkten giebt es einen unter den übrigen, der ihm in einer gewissen der Involutionen $\mathfrak{J}_{hi}$ entspricht; also *vertheilen sich diese 120 Geraden zu je 8 auf die 15 Strahlennetze $\Gamma_h \Gamma_i$.*

Jede dieser 120 Linien wird von den $16 - 2 - 2 . 4 = 6$ Ebenen, welche weder durch sie selbst, noch durch einen der beiden verbundenen Punkte gehen, in 6 Punkten getroffen, durch die nur 3 Ebenen gehen. *Wir haben so* $\frac{1}{3} . 120 . 6 = 240$ *Punkte, in denen (nur) 3 von den Ebenen von F_{32} sich schneiden;* mit diesen Punkten und den 20-fach gerechneten 16 Punkten von F_{32} sind die 560 Schnittpunkte der 16 Ebenen dieser Figur erschöpft. Natürlich geben auch die Punkte 240 Verbindungsebenen von je dreien.

Die 10 ausserhalb einer Ebene ξ von F_{32} gelegenen Punkte haben 120 Verbindungsebenen, dazu gehören die 15 übrigen Ebenen und zwar je 4fach; denn jede schneidet die ξ in einer Verbindungslinie von zwei ihrer Punkte, also enthält sie 4 ausserhalb befindliche Punkte. Es bleiben daher 60 Ebenen, welche nur je 3 der äusseren Punkte enthalten; diese schneiden in ξ *die Pascal'schen Linien der 60 Sechsecke,* die man aus den 6 Nullpunkten bilden kann.

Bilden wir z. B. aus den 6 Nullpunkten von ξ das Sechseck $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6$; so gehen durch die Gegenseiten $X_1 X_2$ und $X_4 X_5$ die Ebenen ξ_{12}, ξ_{45}. In ξ_{12} liegen, ausser X_1, X_2, noch die Nullpunkte nach $\mathfrak{N}_3, \ldots, \mathfrak{N}_6$, d. i. wegen 4) die Punkte $X_{123}, X_{124}, X_{125}, X_{126} \equiv X_{345}$, die Pole von ξ nach $\mathfrak{P}_{123}, \ldots$; ebenso liegen in ξ_{45} noch $X_{145}, X_{245}, X_{345}, X_{456} \equiv X_{123}$; also liegen auf der Schnittlinie, welche durch $(X_1 X_2, X_4 X_5)$ geht, die Punkte X_{123}, X_{345}; ebenso auf den Schnittlinien (ξ_{23}, ξ_{56}) und (ξ_{34}, ξ_{61}) die Punkte X_{123}, X_{234}, bezw. X_{234}, X_{345}; folglich geht die Ebene $X_{123} X_{234} X_{345}$ durch die Pascal'sche Linie unseres Sechsecks.

Wir denken die F_{32}, um die frühere Bezeichnung benutzen zu 190
können, wieder aus einem Punkte abgeleitet; aus Nr. 184 wissen wir, dass die nur von 4 Gewinden Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 herrührenden Punkte und Ebenen von F_{32} 4mal 2 **Möbius**'sche Tetraeder bilden, je den Nullsystemen $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_4$ zugehörig. Das $\mathfrak{N}_4$ zugehörige Tetraeder-Paar war:

$$\text{I} \quad X X_{23} X_{31} X_{12} \equiv \xi_{123} \xi_1 \xi_2 \xi_3,$$

$$\text{II} \quad \xi_4 \xi_{234} \xi_{341} \xi_{412} \equiv X_{56} X_{14} X_{24} X_{34};$$

denn $X_{1234} \equiv X_{56}$; beide Tetraeder sind Polartetraeder von $\mathfrak{P}_{123}$.

Aus den 16 übrigen Elementen von F_{32} lassen sich auch 2 **Möbius**'sche Tetraeder bilden, welche gleichfalls zu einander in Bezug auf $\mathfrak{N}_4$ polar, sowie Polartetraeder von $\mathfrak{P}_{123}$ sind:

$$\text{III} \quad X_{15} X_{25} X_{35} X_{46} \equiv \xi_{235} \xi_{135} \xi_{125} \xi_5$$

$$\text{IV} \quad \xi_{145} \xi_{245} \xi_{345} \xi_6 \equiv X_{16} X_{26} X_{36} X_{45};$$

denn z. B. $\xi_{235} \equiv \xi_{146}$ enthält X_{25}, X_{35}, X_{46} und ξ_{235}, ξ_5 sind polar zu X_{15}, X_{46} in Bezug auf $\mathfrak{P}_{123}$ wegen 9) und 5), ξ_{145} und ξ_6 aber denselben Punkten polar in Bezug auf $\mathfrak{N}_4$ wegen 4) und 2).

Solcher Paare von Möbius'schen Tetraeder-Paaren hat man im Ganzen $20 \,.\, 3 = 6 \,.\, 10 = 60$; jedes Tripel von 3 Gewinden giebt 3, jedes Nullsystem 10.

Durch die Transformationen von G_{32} entsteht aus jeder Geraden x 191
eine Figur f_{32} von 32 Geraden, die in zwei Hälften zerfällt:

$$x, x_{hi}; \; x_i, x_{hik},$$

von denen die eine durch die Collineationen, die andere durch die Correlationen entsteht. Jede der beiden Hälften wird durch eine Collineation von G_{32} in sich selbst, durch eine Correlation in die andere Hälfte transformirt. Oder, von irgend einer Geraden von f_{32} ausgehend, gelangt man durch die 16 Collineationen zu den Geraden derselben, durch die 16 Correlationen zu denen der andern Hälfte.

Die Strahlen des Netzes $\Gamma_1 \Gamma_2$, welche die Gerade x treffen, also die Regelschaar $[x l_{12} l_{12}']$ bilden, schneiden auch die Polaren von x nach $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ und, weil sie Leitstrahlen von $\mathfrak{J}_{12}$ sind, auch die x_{12}. Also befinden sich

$$x, x_1, x_2, x_{12}$$

— welche eine f_4 bei 2 Gewinden in Involution bilden — in einer Regelschaar, offenbar derjenigen der Polaren von x nach den Gewinden des Büschels $\Gamma_1 \Gamma_2$ (Nr. 105). Zu 15 solchen Regelschaaren gehört x und jede der 32 Geraden. *Folglich haben wir* $\frac{1}{4} \,.\, 32 \,.\, 15 = 120$

solche „Regelschaar-Gruppen“ von je 4 Geraden der f_{32}, von denen je zwei zu jeder der beiden Hälften gehören. Aus den 15 Regelschaar-Gruppen, zu denen x gehört, erhält man sie durch die 32 Transformationen, so jedoch, dass je 4 Transformationen dieselbe Gruppe in anderer Anordnung liefern. Die obige Gruppe bleibt z. B. durch $\mathfrak{J}_0$, $\mathfrak{J}_{12}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ unverändert, durch $\mathfrak{J}_{13}$, $\mathfrak{J}_{23}$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{P}_{123}$ geht sie in x_3, x_{13}, x_{23}, x_{123}, durch $\mathfrak{J}_{34}$, $\mathfrak{J}_{56}$, $\mathfrak{P}_{131}$, $\mathfrak{P}_{234}$ in x_{34}, x_{56}, x_{134}, x_{234} über.

Dies führt weiter zu „Strahlennetz-Gruppen“. Die 4 Geraden x, x_1, x_2, x_3 bestimmen ein Strahlennetz, dasjenige der Polaren von x nach den Gewinden von $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ (Nr. 130). Zu demselben gehören aber auch x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{123}; denn x_{12} liegt mit x, x_1, x_2, und x_{123} mit x_3, x_{13}, x_{23} in einer Regelschaar. Diese 8 Geraden bilden eine f_8 für die 3 sich stützenden Gewinde Γ_1, Γ_2, Γ_3. Jede Gerade führt zu 20 solcher Gruppen und *insgesammt giebt es* $\frac{1}{8} \cdot 32 \cdot 20 = 80$ *Gruppen von je 8 Geraden der f_{32}, die je zu demselben Strahlennetze gehören.* Aus den 20 von x ausgehenden ergeben sie sich durch die 32 Transformationen, so jedoch, dass je 8 Transformationen zu derselben Gruppe führen.

Endlich, in dem durch x, x_1, x_2, x_3, x_4 bestimmten Gewinde, dem Orte der Polaren von x nach den Gewinden des Gebüsches $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$ (Nr. 142), befinden sich die 6 Geraden x_{12}, x_{13}, ..., x_{34}, die 4 Geraden x_{123}, ..., x_{234} und die Gerade x_{56}, letztere, weil sie z. B. mit x_{34}, x_{134}, x_{234} in einer Regelschaar zusammen liegt, also im Ganzen 16 Gerade der f_{32}, welche wiederum eine f_{16} für Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 bilden. *Solche Gruppen von 16 Geraden der f_{32}, die je in demselben Gewinde sich befinden, haben wir* $\frac{1}{16} \cdot 32 \cdot 15 = 30$. Je 16 Transformationen führen eine dieser Gruppen in eine andere über.

Weil durch Collineationen und Correlationen Incidenzen in Incidenzen übergehen, so wird, wenn bei zwei verschiedenen Figuren F_{32} oder einer f_{32} und einer F_{32} oder zwei f_{32} ein Element der einen mit einem der andern incidirt (also bezw. ein Punkt mit einer Ebene, eine Gerade mit einem Punkte oder einer Ebene oder einer Geraden), jedem Elemente der einen Figur ein incidentes in der andern zugeordnet; im zweiten Falle incidiren dann die Geraden der einen Hälfte von f_{32} mit den Punkten, die der andern mit den Ebenen von F_{32}, und im dritten Falle gehören je zwei incidente (sich schneidende) Geraden beide zu denselben Hälften der Figuren, wie die der Voraussetzung, oder beide zu den andern Hälften.

192 *Es gehe bei einer F_{32}* (die wir uns aus einer Ebene $\mathfrak{x}$ abgeleitet denken wollen) *diese Ebene $\mathfrak{x}$ durch eine Ecke eines der 15 Tetraeder T,*

dann gehen durch jede Ecke dieses Tetraeders 4 Ebenen von F_{32} und die 16 Punkte dieser Figur vertheilen sich zu je 4 in die 4 Seitenflächen des Tetraeders.

Es sei wiederum das Tetraeder (12) (34) (56) gewählt und die obige Bezeichnung (Nr. 187) für die Kanten, Ecken und Ebenen desselben beibehalten; die Ebene ξ gehe durch die Ecke A. Dann trifft sie in diesem Punkte die einen Axen l_{12}, l_{34}, l_{56} der windschiefen Involutionen $\mathfrak{J}_{12}$, $\mathfrak{J}_{34}$, $\mathfrak{J}_{56}$ und begegnet sich daher in A mit den ξ_{12}, ξ_{34}, ξ_{56}, welche ihr in diesen Collineationen entsprechen. Die $l_{12} \equiv AB$ wird von (34) oder (56) in A und B getroffen; sie wird aber auch von (35), (36), (45), (46) getroffen und es sind, nach Nr. 187, je die beiden Treffpunkte zu A und B harmonisch; für $\mathfrak{J}_{35}$ sind (35) die Axen, also A und B entsprechende Punkte; da nun ξ durch A geht, so muss ξ_{35} durch B gehen. Daher gehen durch:

$$A\colon\ \xi,\ \xi_{12},\ \xi_{34},\ \xi_{56},\qquad B\colon\ \xi_{35},\ \xi_{36},\ \xi_{45},\ \xi_{46},$$

$$C\colon\ \xi_{15},\ \xi_{16},\ \xi_{25},\ \xi_{26},\qquad D\colon\ \xi_{13},\ \xi_{14},\ \xi_{23},\ \xi_{24}.$$

Unser Tetraeder ist Polartetraeder für $\mathfrak{P}_{135}$, $\mathfrak{P}_{145}$, $\mathfrak{P}_{235}$, $\mathfrak{P}_{245}$, bei deren Zeigertripeln aus jedem der Paare 12, 34, 56 ein Zeiger genommen ist. Also liegen die Pole $X_{135}, \ldots$ von ξ nach diesen Polarsystemen in $\alpha \equiv BCD$. Die 4 Pole von ξ_{35} sind X_1, X_{134}, X_2, X_{234} wegen 5) und 9), und liegen in β; die 3 andern Ebenen durch A oder B führen zu denselben Punkten in anderer Reihenfolge. Ebenso liegen in γ: X_3, X_4, X_{123}, X_{124} und in δ: X_5, X_6, X_{125}, X_{345}.

Die 6 Gewinde $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$, welche gegenseitig sich stützen, 193
seien alle reell.

Ferner sei die Regelschaar G_{125} und also auch die von der nämlichen Fläche getragene Regelschaar G_{346} reell; dann sind zwei von den 3 Gewinden Γ_1, Γ_2, Γ_5 auf die eine und das dritte auf die andere Art gewunden (Nr. 181). Nehmen wir an, dass Γ_1, Γ_2 rechts, Γ_5 links gewunden sei. Von den 3 Gewinden Γ_3, Γ_4, Γ_6 muss mindestens eins links gewunden sein, etwa Γ_4; dann ist G_{124} reell, also auch G_{356}, mithin von den Gewinden Γ_3, Γ_6 mindestens eins, Γ_3, rechts gewunden. Nun ist aber auch G_{245} reell, also auch G_{136}, folglich können Γ_3, Γ_6 nicht beide rechts gewunden sein und Γ_6 ist links gewunden. Daher sind Γ_1, Γ_2, Γ_3 rechts und Γ_4, Γ_5, Γ_6 links gewunden.

Gehen wir nun von einer imaginären Regelschaar aus; wir wollen annehmen, um ein auch in der Bezeichnung übereinstimmendes Ergebniss zu erhalten, von G_{123}; dann sind Γ_1, Γ_2, Γ_3 gleichartig gewunden und ebenso die 3 übrigen. Das Gebüsche $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$ enthält

(Nr. 145) stets reelle Strahlengebüsche; es sei Γ' eins derselben, Γ'' das zweite ebenfalls reelle Gebüsche im Büschel $\Gamma'\Gamma_4$ und Γ^* das Gewinde, welches dieser Büschel mit dem Netze $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ gemein hat (Nr. 139). Γ^* ist zu Γ_4 in Involution und da sie durch die reellen Gebüsche Γ', Γ'' harmonisch getrennt sind, so sind sie ungleich gewunden; da nun Γ^* mit $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ gleiche Windung hat wegen der imaginären gemeinsamen Regelschaar G_{123}, so sind Γ_4, Γ_5, Γ_6 anders gewunden, als Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Wenn demnach 6 reelle Gewinde sich gegenseitig stützen, so sind 3 auf die eine und 3 auf die andere Weise gewunden.

Sind nur 4 von den Gewinden reell und zwei, Γ_5, Γ_6, conjugirt imaginär, so ist der Büschel $\Gamma_5\Gamma_6$ reell und hat reelle Gebüsche (Nr. 177); sind daher Γ_5', Γ_6' zwei reelle Gewinde desselben, welche sich stützen, so sind dieselben ungleichartig gewunden. Da nun $\Gamma_1, \ldots,$ Γ_4, Γ_5', Γ_6' eine Gewinde-Gruppe der vorigen Art bilden, so müssen von den 4 reellen Gewinden 2 auf die eine, 2 auf die andere Art gewunden sein.

Sind endlich nur noch Γ_1, Γ_2 reell, Γ_3 und Γ_4, Γ_5 und Γ_6 aber conjugirt imaginär, so müssen, wie sich auf dieselbe Weise ergiebt, Γ_1, Γ_2 ungleich gewunden sein. Dies folgt auch daraus, dass die Leitgeradenpaare (34), (56) reell sind, also im Tetraeder (12)(34)(56) auch das dritte Paar von Gegenkanten reell ist.

In einer reellen Gruppe von 6 Gewinden in Involution, d. h. in einer solchen, von welcher jedes etwaige imaginäre auch sein conjugirtes in der Gruppe hat, ist von den reellen Gewinden die eine Hälfte rechts, die andere links gewunden.

194 *Wenn alle 6 Gewinde reell sind* und, wie oben, Γ_1, Γ_2, Γ_3 auf die eine, Γ_4, Γ_5, Γ_5 auf die andere Weise gewunden, so sind die *Leitgeraden-Paare* (12), (13), (23), (45), (46), (56) conjugirt imaginär, die übrigen reell (Nr. 177).

Von den *Durchschnitts-Regelschaaren* sind nun die beiden von derselben Fläche (einem imaginären Ellipsoide) getragenen G_{123} und G_{456} imaginär, aber jede zu sich conjugirt; so dass das Polarsystem reell ist. Die übrigen Regelschaaren sind alle reell.

Hinsichtlich der *Tetraeder*, welche Leitgeraden-Paare zu Gegenkanten haben, gilt allgemein, dass wenn zwei solche Paare beide reell oder beide conjugirt imaginär sind, das dritte reell ist, weil — im zweiten Falle — jede seiner Geraden 2 conjugirt imaginäre Punkte verbindet. Danach haben im vorliegenden Falle alle 15 Tetraeder mindestens ein reelles Gegenkanten-Paar; 6 sind vollständig reell:

(14) (25) (36), (14) (26) (35), (15) (24) (36), (15) (26) (34),
(16) (24) (35), (16) (25) (34).

Wenn zweitens Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 *reell sind* und zwar Γ_1, Γ_2 auf die eine, Γ_3, Γ_4 auf die andere Art gewunden, Γ_5, Γ_6 aber conjugirt imaginär, so sind von den Leitgeraden *der 7 reellen Schnitt-Strahlennetze* (13), (14), (23), (24), (56) reell, (12), (34) je conjugirt imaginär.

Reell sind nur die *Polarsysteme* $\mathfrak{P}_{123}$, $\mathfrak{P}_{124}$, $\mathfrak{P}_{134}$, $\mathfrak{P}_{234}$ und haben reelle Basisflächen (einmantelige Hyperboloide); zu einander conjugirt imaginär sind z. B. $\mathfrak{P}_{125}$ und $\mathfrak{P}_{126} \equiv \mathfrak{P}_{345}$ und zwar so, dass die Regelschaaren G_{125} und G_{346} conjugirt sind zu G_{126}, G_{345}.

Vollständig reell sind von den *Tetraedern* nur (13) (24) (56), (14) (23) (56).

Wenn Γ_3, Γ_4; Γ_5, Γ_6 *conjugirt imaginär sind,* so sind allein (12), (34), (56) und das Tetraeder dieser 3 Paare reell, mögen Γ_1, Γ_2 reell oder conjugirt imaginär sein.

Aber hinsichtlich der *Polarsysteme und Regelschaaren* sind diese beiden Fälle zu unterscheiden.

Wenn Γ_1, Γ_2 reell sind, so sind die Polarsysteme $\mathfrak{P}_{134} \equiv \mathfrak{P}_{256}$ und $\mathfrak{P}_{234} \equiv \mathfrak{P}_{156}$ reell mit reeller Basisfläche; die Schaar $L_{134} \equiv G_{256}$ enthält die reellen Leitgeraden (34) und die zu einander conjugirten l_{13}, l_{14}; l_{13}', l_{14}'; folglich ist sie reell.

Sind aber auch Γ_1, Γ_2 conjugirt imaginär, dann sind z. B. die 6 Leitgeraden (13), (15), (35), welche sich in G_{246} befinden, conjugirt imaginär zu den (24), (26), (46), welche sich in G_{135} befinden; also sind diese beiden Regelschaaren zu einander conjugirt. Je zwei conjugirte von diesen 12 Geraden schneiden einander und haben daher einen reellen Punkt und eine reelle Ebene gemein. Durch diese 6 reellen Punkte und zugehörigen ebenfalls reellen Berührungsebenen ist die gemeinsame Trägerfläche als reelle Fläche und zwar als Ellipsoid oder zweimanteliges Hyperboloid bestimmt.

4 Polarsysteme $\mathfrak{P}_{135}$, $\mathfrak{P}_{145}$, $\mathfrak{P}_{235}$, $\mathfrak{P}_{245}$ *sind reell, wenn alle 6 Gewinde* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_6$ *imaginär, aber zu je zweien conjugirt sind, und zwar haben sie zu Basisflächen reelle Flächen ohne reelle Geraden* (*mit punktirten Geraden*), *also Ellipsoide oder zweimantelige Hyperboloide.**)

*) In Nr. 145 wurden 3 *reelle* Gewinde Γ_1, Γ_2, Γ_3 vorausgesetzt. — Die Gruppe G_{32} (ebenso wie die Untergruppen G_{16}, G_8, G_4) ist ein interessantes Beispiel einer Abel'schen Gruppe (vergl. z. B. Weber, Elliptische Functionen, § 54); als „Basis" nimmt man am einfachsten 5 von den Nullsystemen

Das Gebüsche der Trägerflächen der Regelschaaren eines Strahlennetzes.

195 *Ein Strahlennetz* $[u, v]$ *enthält* ∞^3 *Regelschaaren* ϱ; *die Trägerflächen* f *derselben bilden also ein System 3. Stufe,* Σ.

Hinsichtlich dieses Gebüsches ergab sich schon in Nr. 121, dass *es* ∞^1 *Rotationshyperboloide enthält*, die in zwei Systeme zerfallen, und deren Axen die beiden Geradenschaaren des gleichseitig-hyperbolischen Paraboloids erfüllen, dessen Punkte gleiche Entfernung von u und v haben.

Alle Flächen f, welche durch einen Punkt X_1 gehen, enthalten den Strahl g_1 des Netzes, der von X_1 kommt, vollständig und bilden daher ein Flächennetz mit der in die 3 Geraden u, v, g_1 zerfallenden cubischen Raumcurve als Grundcurve. Den veränderlichen Theil g_1 derselben nennen wir die *Grundgerade* dieses Netzes. Alle f durch 2 Punkte X_1, X_2 enthalten die beiden Geraden g_1, g_2 aus diesen Punkten an $[u, v]$ und bilden einen Büschel mit dem windschiefen Vierseite u, g_1, v, g_2 als Basis; wir nennen die veränderlichen Seiten g_1, g_2 desselben die *Grundgeraden* des Büschels. Durch 3 Punkte X_1, X_2, X_3 geht eine Fläche von Σ, die durch g_1, g_2, g_3 bestimmte.

Diese Eigenschaften weisen darauf hin, dass Σ *linear, also ein Gebüsche ist:* in der That können wir es ja bestimmt denken durch 6 Punkte, je drei auf jeder der beiden Leitgeraden, aber ebenso auch durch 6 Ebenen, je drei durch u und v, als Berührungsebenen. *Das System* Σ *ist also in sich dual, und jedes in ihm enthaltene niedrigere lineare System ebenfalls;* hinsichtlich der eben besprochenen Büschel und Netze ist dies ja bekannt: sie sind gleichzeitig Schaaren, bezw. Schaarschaaren.

Jeder gemeinsame Punkt zieht, wie wir eben sahen, ∞^1 andere nach sich; also genügt es, um alle Büschel (oder Schaaren) mit 2 Grundgeraden in Σ zu erhalten, X_1, X_2 in einer Ebene zu bewegen; dadurch *ergeben sich* ∞^4 *Büschel. Andere Büschel aber als solche mit 2 Grundgeraden giebt es in* Σ *nicht;* denn zwei Flächen des Gebüsches schneiden sich, nach Steiner's Satz, ausser in u, v, noch in zwei Geraden der andern Schaar, also in zwei Geraden des Netzes $[u, v]$. Alle weiteren Flächen des durch sie bestimmten Büschels haben ihre eine Schaar ebenfalls in $[u, v]$ und gehören also zum Gebüsche Σ.

In jedem dieser Büschel (u, v, g_1, g_2) *haben wir 2 ausgeartete Flächen, die sowohl Ebenen-, als Punkte-Paare sind.**)

*) Der Kürze halber nennen wir sie vorzugsweise „Ebenenpaare", so wie wir ja auch die Benennungen „Büschel", „Netz" und „Gebüsche" bevorzugen.

Die eine hat die Ebenen ug_1, vg_2 und die Punkte ug_2, vg_1, die andere die Punkte ug_1, vg_2 und die Ebenen ug_2, vg_1.

Die Doppellinien g', g'', welche je sowohl Schnittlinie der beiden Ebenen, als auch Verbindungslinie der beiden Punkte sind, gehören ebenfalls zum Strahlennetze: sie sind die Diagonalen des Vierseits. Beachten wir, dass aber auch g_1, g_2 Diagonalen des Vierseits (u, g', v, g'') sind.

Wenn die Leitgeraden u, v reell sind, so sind g', g'' gleichzeitig mit g_1, g_2 reell und conjugirt imaginär; sind aber u, v conjugirt imaginär, so sind g', g'' conjugirt imaginär oder reell, je nachdem g_1, g_2 reell oder conjugirt imaginär sind.

Wenn die Doppellinien zweier Ebenenpaare von Σ sich schneiden, so besteht der ganze durch sie bestimmte Büschel aus Ebenenpaaren, deren Doppellinien den durch jene beiden bestimmten Strahlenbüschel von $[u, v]$ bilden mit dem Scheitel auf der einen Leitgeraden und der Ebene durch die andere. Alle diese Ebenenpaare haben eine Ebene gemeinsam, die des eben genannten Strahlenbüschels, die andere dreht sich um diejenige Leitgerade, welche dessen Scheitel enthält. Duales gilt, mit Vertauschung von u, v, für die Punktepaare.

Zu diesen Büscheln gelangt man, wenn man die Grundgeraden g_1, g_2 sich auf einer der Leitgeraden schneiden lässt; jeder Strahl des Büschels $g_1 g_2$ — der zugleich der Büschel der Doppellinien ist — kann dann als Grundgerade aufgefasst werden, weil eben die Ebene $g_1 g_2$ allen Ebenenpaaren des Büschels gemein ist.

Kegel und Kegelschnitte enthält das Flächensystem nicht, seine Ausartungen sind nur die Ebenen-Punkte-Paare und auch bei diesen sind die Ebenen sowohl, wie die Punkte stets getrennt. Also führen die beiden ersten Formeln 3) von Nr. 20 zu: $\nu = 2\mu = 2\varrho$ bei jedem im Systeme enthaltenen einstufigen System und *die 10 Charakteristiken des dreistufigen Systems* μ^3, $\mu^2\varrho$, ... ϱ^3, $\mu^2\nu$, ..., ν^3 reduciren sich auf:

$$\mu^3,\ \mu^2\nu,\ \mu\nu^2,\ \nu^3.$$

Weil nun $\nu = 2\mu$, so folgt aus:

$$\mu^3 = \mu^2 \,.\, \mu = 1,$$

dass $\mu^2\nu = 2$, wie jeder Büschel des Systemes lehrt; hieraus wieder, dass $\mu\nu^2 = 4$, und dann weiter, dass $\nu^3 = 8$.

Lässt man den Punkt X_1, der oben zu einem Netze mit einer 196
Grundgeraden g_1 in Σ führte, eine Ebene durchlaufen, so erhält man nur ∞^2 Netze. Ein Gebüsche aber von Flächen enthält ∞^3 Netze; denn man kann die ∞^3 Flächen desselben auf $\infty^{3.3}$ Weisen zu je dreien zusammenstellen, die ∞^2 Flächen eines Netzes aber auf $\infty^{3.2}$ Weisen, so dass sich jedes Netz auf ∞^6 Weisen ergiebt (vergl. Nr. 140).

Also erschöpfen in unserm Gebüsche Σ die ∞^2 Netze mit einer Grundgeraden nicht den Inbegriff aller Netze; sie bilden unter den ∞^3 Netzen einen besondern Fall.

Ein beliebiges Netz von Σ hat ausserhalb der Geraden u, v keinen gemeinsamen Punkt oder keine gemeinsame Berührungsebene. Wir haben daher eine andere den Flächen eines Netzes gemeinsame Eigenschaft aufzusuchen, durch welche sie aus Σ ausgesondert werden.

Während bei einem beliebigen Gebüsche es nur ∞^2 Punkte giebt — die Punkte der Kern- oder Kegelspitzenfläche des Gebüsches — *von der Beschaffenheit, dass die Polarebenen eines solchen Punktes in Bezug auf alle Flächen des Gebüsches in einen Punkt zusammenlaufen;**) *hat bei unserm speciellen Gebüsche jeder Punkt des Raumes diese Eigenschaft.***) Der gemeinsame conjugirte Punkt ist derjenige, welcher dem Punkte in der mit dem Strahlennetze verbundenen windschiefen Involution $\mathfrak{J}$ entspricht. Ebenso sind je zwei in dieser Involution einander entsprechende Ebenen in Bezug auf alle Flächen von Σ conjugirt. Alle Flächen unseres Gebüsches haben also ihre Mittelpunkte in der Centralebene des Netzes $[u, v]$ (Nr. 111).

Man scheidet nun aus unserm Gebüsche Σ ein Netz N durch die Bedingung aus, dass in Bezug auf die Flächen zwei Punkte conjugirt seien, welche einander nicht in $\mathfrak{J}$ entsprechen.

Sind X und X_1' diese beiden Punkte und X', X_1 die ihnen in $\mathfrak{J}$ entsprechenden, so ist die Gerade $x' \equiv X'X_1'$ dem Punkte X in Bezug auf alle Flächen von N conjugirt. Folglich gehen die Polarebenen eines beliebigen Punktes X_2' von x' durch X, so wie aber auch durch den dem X_2' in $\mathfrak{J}$ entsprechenden Punkt X_2, der auf $x = XX_1$ liegen muss, da diese der x' in $\mathfrak{J}$ entspricht. D. h. diese beiden einander in $\mathfrak{J}$ entsprechenden Geraden x und x' sind für alle Flächen von N polar. Dieselben befinden sich mit u und v in einer Regelschaar, welche daher durch Polarisirung in Bezug auf jede dieser Flächen in sich selbst übergeht. Also sind auch je zwei weitere zu u und v harmonische oder in $\mathfrak{J}$ entsprechende Geraden dieser Regelschaar nach allen Flächen von N polar.

Für jedes Netz von Σ aber giebt es Punkte, welche, in Bezug auf alle seine Flächen, nicht blos den Punkt, der in Bezug auf das ganze Gebüsche conjugirt ist, sondern alle Punkte einer Geraden zu conjugirten haben; und diese Punkte erfüllen eine Fläche 2. Grades.

In der That, wenn das Netz durch 3 beliebige Flächen f_1, f_2, f_3 von Σ constituirt wird, so sei x eine beliebige Gerade und x' die ihr

*) Reye, Geometrie der Lage II 28. Vortrag.

**) Ebenda 11. Vortrag und Silldorf a. a. O.

in $\mathfrak{J}$ entsprechende, welche also die Punkte enthält, die zu ihren Punkten in Bezug auf Σ conjugirt sind. In Bezug auf den Büschel $f_1 f_2$ haben wir dann ein zu x gehöriges Polarhyperboloid, dessen eine Schaar durch die Polaren von x in Bezug auf die einzelnen Flächen von $f_1 f_2$ gebildet wird, während die Geraden der andern Schaar die Schnittlinien der Polarebenen der einzelnen Punkte von x in Bezug auf f_1 und f_2, also die Geraden sind, welche diesen Punkten nach dem Büschel $f_1 f_2$ conjugirt sind. Da x' von allen Geraden der letzteren Schaar getroffen wird, gehört sie zur ersteren. Folglich hat dies Hyperboloid mit demjenigen Polarhyperboloide, das ebenso der Geraden x in Bezug auf den Büschel $f_1 f_3$ zugehört, 2 Gerade der ersteren Schaar (x' und die Polare von x nach f_1) gemein, also auch 2 Gerade der andern. Ist nun X derjenige Punkt von x, dessen Polarebene nach f_1 durch eine dieser beiden letzteren Geraden geht, so gehen durch sie auch seine Polarebenen nach f_2 und f_3 und infolge dessen nach allen Flächen des Netzes $f_1 f_2 f_3$; sie ist ihm in Bezug auf dasselbe conjugirt. Also haben wir auf jeder Geraden x zwei solche Punkte.

Dass u, v auf der von diesen Punkten erzeugten Fläche 2. Grades liegen, ist ersichtlich; mithin gehört sie zu Σ.

Fassen wir zusammen, so haben wir folgenden Satz:

Jedem Netz unseres Gebüsches Σ ist eine ebenfalls zu demselben gehörige Fläche 2. Grades zugeordnet, welche die Eigenschaft hat, dass in derjenigen von ihren beiden Regelschaaren, zu der die Leitgeraden u, v des Strahlennetzes oder die gemeinsamen Geraden aller Flächen des Gebüsches gehören, je zwei in Bezug auf u und v harmonische Geraden für alle Flächen des Netzes polar oder irgend zwei Punkte, die bezw. auf zwei solchen Geraden liegen, in Bezug auf alle Flächen des Netzes conjugirt sind.

Die andere Regelschaar dieser Fläche, also diejenige, die zum Strahlennetze $[u, v]$ gehört, hat auch eine interessante Beziehung zum Flächennetze. Dies Netz enthält ∞^2 Ebenenpaare; ihre Doppellinien gehören zu $[u, v]$; jede muss von zwei solchen polaren Geraden mindestens eine treffen, weil die Polarebene eines Punktes in Bezug auf ein Ebenenpaar durch dessen Doppellinie geht. Als Strahl von $[u, v]$ aber trifft sie dann beide, weil sie sich in $\mathfrak{J}$ entsprechen. Demnach bilden die Doppellinien die zweite Regelschaar.

*Die andere, zu $[u, v]$ gehörige Regelschaar der obigen Fläche wird durch die Doppellinien der im Netze befindlichen Ebenenpaare gebildet.**)

Umgekehrt, 4 Strahlen einer Regelschaar von $[u, v]$ sind Doppel-

*) A. Rasche, Untersuchung der Flächen 2. Grades, welche durch zwei windschiefe Geraden gehen. Dissertation, Münster 1882.

linien von 4 solchen Ebenenpaaren des Gebüsches Σ, welche sich in demselben Netze befinden.

Dafür ist nachzuweisen, dass der durch zwei von den 4 Ebenenpaaren bestimmte Büschel mit dem durch die beiden andern bestimmten eine Fläche gemeinsam hat oder, was dasselbe ist, dass die Grundgeraden des einen und die des andern sich auf der nämlichen Fläche 2. Grades befinden. Wenn nun die 4 Doppellinien die u und v in $U_1, \ldots, U_4$; $V_1, \ldots, V_4$ treffen, so ist, weil sie zur selben Regelschaar gehören, $U_1 U_2 U_3 U_4 \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4$, also auch $\barwedge V_2 V_1 V_4 V_3$; deshalb gehören auch $U_1 V_2$, $U_2 V_1$, $U_3 V_4$, $U_4 V_3$, d. h. die Grundgeraden-Paare der beiden Büschel, zu einer Regelschaar.

Durchläuft man also eine Regelschaar in $[u, v]$, so erhält man die Doppellinien aller Ebenenpaare in einem Netze von Σ.

Weil nun 2 Gerade der zugehörigen Leitschaar, die zu u und v harmonisch sind, alle diese Doppellinien treffen und zu den Ebenen jedes der Ebenenpaare harmonisch sind, so erhellt, dass sie in Bezug auf alle Ebenenpaare und also auch in Bezug auf sämmtliche Flächen des Netzes polar sind.

197 *Die nicht zu $[u, v]$ gehörigen, oder, was dasselbe ist, die u und v enthaltenden Regelschaaren der Flächen unseres Gebüsches*, welche uns im Folgenden besonders interessiren werden, *wollen wir die Leitschaaren dieser Flächen nennen.*

Wenn f im Gebüsche Σ einen Büschel durchläuft, so beschreibt die Leitschaar ein Strahlennetz, dessen Leitgerade ersichtlich die beiden Grundgeraden g_1, g_2 des Flächenbüschels sind.

Aus einem Netze von Σ scheidet ein Punkt X einen Büschel aus; die Geraden, die von X nach der zweiten nicht diesen Punkt enthaltenden Grundgeraden des Büschels gehen, gehören dem Complexe an, der durch die Leitschaaren der Flächen des Netzes gebildet wird.

Die Leitschaaren der Flächen eines Netzes des Gebüsches Σ erzeugen ein Strahlengewinde.

Die Strahlengewinde aller ∞^3 Netze des Gebüsches ergeben, da ihnen allen die Strahlen u und v gemeinsam sind, *ein Gebüsche S_3 von Gewinden mit u und v als Grundgeraden*, also dasjenige Gebüsche, das zu dem Büschel von Gewinden, dessen Basis das Netz $[u, v]$ ist, sich in Involution befindet.

Jedes Gebüsche von Gewinden entsteht auf diese Weise.

Bei einem Ebenenpaare von Σ, dessen Doppellinie g sei, besteht die Leitschaar aus den Strahlenbüscheln um die Punkte gu, gv in den gleichnamigen Ebenen. Das Strahlennetz der Leitschaaren eines Büschels aus lauter Ebenenpaaren zerfällt in einen Bündel und ein Feld.

Wir beziehen das Flächengebüsche Σ collinear auf den Punktraum 198
Σ_1, so dass den Flächen, Büscheln und Netzen von Σ die Punkte, Geraden und Ebenen von Σ_1 entsprechen.

Da jeder Büschel von Σ 2 Ebenenpaare enthält, so *wird in Σ_1 durch die Punkte, denen Ebenenpaare entsprechen, eine Fläche 2. Grades ε_1^2 erzeugt.* Einer Geraden dieser Fläche correspondirt daher in Σ ein Flächenbüschel, der aus lauter Ebenenpaaren besteht; die Doppellinien erfüllen einen Strahlenbüschel in $[u, v]$.

Ordnet man daher jedem Punkte von ε_1^2 die Doppellinie des entsprechenden Ebenenpaares zu, so hat man die in Nr. 96 besprochene collineare Abbildung eines Strahlennetzes in eine Fläche 2. Grades, bei welcher die beiden im Netze befindlichen Systeme von Strahlenbüscheln sich in die beiden Geradenschaaren der Fläche abbilden.

Den beiden Geraden in einer Berührungsebene von ε_1^2 entsprechen Büschel aus verschiedenen Systemen, also mit einem gemeinsamen Strahle, der dann allen Ebenenpaaren gemeinschaftlich ist, die den Punkten der einen und der andern Geraden entsprechen; 3 von ihnen, deren entsprechende Punkte nicht sämmtlich derselben Geraden angehören, bestimmen das Netz, das der Ebene correspondirt; folglich haben alle Flächen desselben den Strahl gemeinsam.

Den Berührungsebenen von ε_1^2 correspondiren also diejenigen Netze in Σ, welche eine Grundgerade haben.

Durch jeden Büschel von Σ gehen ja auch 2 derartige Netze, welche bezw. die eine oder die andere Grundgerade des Büschels zur eigenen Grundgeraden haben; so zeigt sich, dass durch jede Gerade von Σ_1 zwei solche Ebenen gehen.*)

Abbildung des Strahlengewindes in den Punktraum.**)

Die collineare Beziehung des Flächengebüsches Σ auf den Punkt- 199
raum, welche wir eben besprochen haben, führt zu einer Abbildung eines

*) Vergl. del Pezzo, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Bd. I S. 157.

**) Vergl. für diesen und den folgenden Abschnitt: Nöther, Göttinger Nachrichten 1869 S. 298; F. Klein und Lie, Berliner Monatsberichte 1870 S. 898; Lie, Mathem. Annalen, Bd. 5 S. 145; Klein, ebenda S. 257, 278; Cremona, Sulla correspondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie, Atti dell 'Accademia dei Lincei Ser. II Bd. 3; Schur, Math. Annalen Bd. 15 S. 432; Salmon-Fiedler, Anal. Geometrie des Raumes Bd. II S. 515 der 3. Aufl.; del Pezzo, a. oben a. O.; Schumacher, Math. Annalen Bd. 37 S. 102, 103.

Strahlengewindes Γ in den Punktraum Σ_1, welche freilich bei beliebiger Lage von Γ zu Σ einzweideutig ist, d. h. so, dass zwar jedem Strahle von Γ nur ein Punkt von Σ_1 entspricht, jedem Punkte von Σ_1 aber zwei Strahlen in Γ entsprechen. Durch Specialisirung der Lage aber kann eine eindeutige Beziehung erreicht werden.

Wir schneiden nämlich die Leitschaaren der Flächen von Σ mit Γ. Dann entsprechen jedem Punkte von Σ_1 die beiden Strahlen von Γ, in denen Γ von der Leitschaar der dem Punkte entsprechenden Fläche geschnitten wird. Jeder Strahl von Γ aber bestimmt, mit u und v, nur eine Leitschaar und hat also nur einen entsprechenden Punkt in Σ_1.

Einer Geraden in Σ_1 entspricht in Σ ein Flächenbüschel; das Strahlennetz der Leitschaaren desselben hat mit Γ eine Regelschaar gemein. Also:

Die Strahlenpaare, welche den Punkten einer Geraden von Σ_1 in Γ entsprechen, erzeugen eine Regelschaar und bilden in ihr eine Involution; da die Punkte auf der Geraden und die Geraden der Regelschaar in einer Correspondenz [1, 2] stehen (Nr. 21).

Daraus folgt, dass *die Punkte in Σ_1, deren beide entsprechende Strahlen sich vereinigt haben, eine Fläche 2. Grades φ_1^2 erzeugen.*

Einer Ebene entspricht in Σ ein Flächennetz; das Gewinde der Leitschaaren seiner Flächen hat mit Γ ein Strahlennetz gemein; also:

Einer Ebene von Σ_1 entspricht in Γ ein Strahlennetz.

Wir erhalten aber auf diese Weise nur ∞^3 Strahlenpaare, ∞^4 Regelschaaren, ∞^3 Strahlennetze in Γ, während, wie wir wissen, im Ganzen ∞^6 Strahlenpaare, ebenso viele Regelschaaren, ∞^4 Netze in einem Gewinde vorhanden sind (Nr. 58).

Unsere Strahlennetze, Regelschaaren, Strahlenpaare sind aber nur diejenigen, welche in Γ durch die ∞^3 Gewinde, ∞^4 Grund-Strahlennetze und ∞^3 Grund-Regelschaaren des in Nr. 197 erwähnten Gebüsches S_3 von Gewinden eingeschnitten werden. Wir könnten sie die S_3-Strahlennetze, ... von Γ nennen, wollen sie aber lieber, nach der einfacheren mit dem Gebüsche S_3 von Gewinden verbundenen Figur des Gebüsches Σ von Flächen, die Σ-Strahlennetze, Σ-Regelschaaren, Σ-Strahlenpaare von Γ nennen.

Ein beliebiges Strahlennetz, eine beliebige Regelschaar, ein beliebiges Strahlenpaar von Γ ist durch 4, 3, 2 Strahlen, ein Σ-Strahlennetz, ... durch 3, 2, 1 Strahlen von Γ bestimmt.

Einem beliebigen Strahlennetze, einer beliebigen Regelschaar von Γ entspricht in Σ_1 eine Fläche 2. Grades, ein Kegelschnitt; denn die einer Geraden in Σ_1 entsprechende Σ-Regelschaar, bezw. das einer Ebene

von Σ_1 correspondirende Σ-Strahlennetz hat mit dem Strahlennetze, der Regelschaar zwei Strahlen gemein (Nr. 98).

Sind jedoch das Strahlennetz oder die Regelschaar Σ-Gebilde, so sind diese beiden Strahlen gepaart und haben nur einen entsprechenden Punkt in Σ_1; die Fläche 2. Grades, der Kegelschnitt gehen in eine doppelte Ebene oder Gerade über.

Im allgemeinen Falle aber sind das Strahlennetz, die Regelschaar nicht die vollständigen der Fläche oder Curve 2. Grades correspondirenden Gebilde; sie werden durch ein zweites Strahlennetz, eine zweite Regelschaar ergänzt, gebildet durch diejenigen Strahlen von Γ, welche mit ihren Strahlen zu Σ-Strahlenpaaren zusammengehören.

Das Σ-Strahlennetz von Γ, das einer Ebene von Σ_1 entspricht, 200
erhält von jedem Strahlenbüschel von Γ einen Strahl; also fällt von den Punkten von Σ_1, die den Strahlen des Büschels entsprechen, einer in die Ebene.

Einem Strahlenbüschel von Γ entspricht in Σ_1 eine Gerade.

Demnach ist die Abbildung eines beliebigen Strahlennetzes von Γ in die entsprechende Fläche 2. Grades ebenfalls die in Nr. 96 besprochene collineare Abbildung.

Die gepaarten Strahlen zu den Strahlen eines Büschels von Γ bilden einen zweiten Strahlenbüschel, der mit dem ersten die Regelschaar bildet, welche der Geraden in Σ_1 correspondirt. Als zwei eine Regelschaar zusammensetzende Strahlenbüschel haben sie einen Strahl gemein; das ist dann der einzige zu sich selbst gepaarte Strahl in jedem der beiden Büschel. Also hat die Gerade, welche ihnen entspricht, zwei vereinigte Schnitte mit φ_1^2.

Diejenigen Geraden von Σ_1, welche den ∞^3 Strahlenbüscheln von Γ correspondiren, und zwar jede zweien, sind die Tangenten der Fläche φ_1^2.

In jedem Strahlenbüschel (P_1, π_1) von Σ_1 giebt es in der That 2. Denn die Regelschaaren, welche den Strahlen desselben entsprechen, gehen alle durch die beiden Strahlen g', g'', welche dem Scheitel P_1 entsprechen, und treffen die Leitgeraden l', l'' des Netzes, das der Ebene π_1 correspondirt; das Regelschaar-System enthält (Nr. 195) zwei Strahlenbüschel-Paare.

Ist aber π_1 eine Ebene, deren entsprechendes Netz zwei vereinigte Leitgeraden hat: $l' \equiv l''$, so sind beide Strahlenbüschel-Paare zusammengefallen, und zwar wo auch P_1 in π_1 liege; von jedem Punkte P_1 von π_1 kommen zwei vereinigte Tangenten an φ_1^2; d. h. π_1 ist Berührungsebene von φ_1^2.

Die Berührungsebenen von φ_1^2 sind diejenigen Ebenen von Σ_1, denen in Γ Strahlennetze mit vereinigten Leitgeraden entsprechen.

Einer Geraden in Σ_1 entspricht in Γ eine Regelschaar; die ∞^1 Strahlennetze von Γ, welche durch sie gehen, entsprechen den Ebenen durch die Gerade. Ihre Leitgeraden-Paare erfüllen die Leitschaar der Regelschaar und machen sie involutorisch; die Doppelstrahlen dieser Involution gehören zu den Strahlennetzen, denen die Berührungsebenen von φ_1^2, die durch die Gerade gehen, entsprechen.

201 Die Σ-Strahlennetze von Γ, welche den Ebenen von Σ_1 correspondiren, werden in Γ durch die Gewinde des Gebüsches S_3 eingeschnitten; also sind die Leitgeraden der Σ-Strahlennetze von Γ die Axen der Strahlengebüsche, welche in *dem durch* S_3 *und* Γ *constituirten Gewebe* S_4 *von Gewinden* sich befinden, und erfüllen *das Gewinde* Λ, *das auf alle Gewinde dieses linearen Systems 4. Stufe sich stützt.*

Zwei zusammengehörige Leitgeraden sind polar in Bezug auf Γ; vereinigen sie sich, so geschieht es in einem Strahle von Γ.

Demnach ist das Strahlennetz $\Gamma\Lambda$ *der Ort der vereinigten Leitgeraden der Strahlennetze von* Γ, *welche den Tangentialebenen von* φ_1^2 *entsprechen.*

Die beiden dem nämlichen Punkte X_1 von Σ_1 correspondirenden Strahlen g', g'' von Γ — welche als Strahlen von Γ von zwei zusammengehörigen Leitgeraden, als polaren Geraden in Bezug auf Γ, stets zugleich getroffen werden — befinden sich gleichzeitig in allen Strahlennetzen, welche den Ebenen durch X_1 entsprechen; wenn also eine Leitgerade eines Σ-Strahlennetzes (und infolge dessen beide) die eine von zwei solchen gepaarten Geraden trifft, so schneidet sie auch die andere. D. h. g' und g'' sind in Bezug auf Λ polar.

Folglich ist das Strahlennetz $\Gamma\Lambda$ *auch der Ort der Strahlen von* Γ, *welche mit ihren gepaarten Strahlen zusammengefallen sind, oder der Ort derjenigen Strahlen, welche den Punkten von* φ_1^2 *entsprechen.*

$\Gamma\Lambda$ ist kein Σ-Strahlennetz, weil ihm keine Ebene entspricht.

Wir fanden, dass den Punkten einer Geraden die Strahlenpaare einer involutorischen Regelschaar entsprechen. Λ ist das Erzeugniss dieser involutorischen Regelschaar, d. h. der Inbegriff aller Strahlen, welche zwei gepaarte Geraden treffen.

Jeder Strahlenbüschel in Γ hat einen Strahl in Λ, also in $\Gamma\Lambda$; derselbe ist, weil zu sich selbst gepaart, derjenige, den der Büschel mit dem zweiten Strahlenbüschel gemein hat, welchem die nämliche Gerade in Σ_1 correspondirt.

Das Strahlennetz $\Gamma\Lambda$ ist folglich auch der Ort der Doppelstrahlen der ∞^3 Strahlenbüschel-Paare, die sich unter den ∞^4 Σ-Regelschaaren befinden, und zwar ist jeder von seinen Strahlen Doppelstrahl für ∞^1

solche Paare: die Paare der Scheitel bilden eine Involution auf ihm, die der Ebenen eine um ihn.

Die zu $\Gamma\Delta$ gehörigen Büschel sind zu sich selbst gepaart und liefern also die Doppelelemente dieser Involutionen.

Um nun zur *eindeutigen Abbildung* von Γ in Σ_1 zu gelangen, 202
nehmen wir an, dass eine der beiden Geraden u und v zu Γ gehöre, etwa u. Damit die Abbildung reell sei, müssen Γ und $[u, v]$, dann aber auch u und v reell sein; denn conjugirt imaginäre u und v würden sich gleichzeitig in Γ befinden; also würden dann beide Strahlen, welche eine Leitschaar von Σ mit Γ gemein hat, nach u und v fallen und fest sein.

Wir ordnen jetzt nur den zweiten veränderlichen Strahl, den eine der Leitschaaren von Σ, ausser u, mit Γ gemein hat, dem Punkte von Σ_1 zu, dem die tragende Fläche in der Collineation zwischen Σ und Σ_1 entspricht.

Die Σ-Strahlennetze oder -Regelschaaren von Γ sind nun die, welche durch u gehen. Denn wenn z. B. g_1, g_2 zwei Strahlen einer durch u gehenden Regelschaar sind, so bestimmt jeder von ihnen, mit u und v, eine Leitschaar λ_1, λ_2 und deren Trägerflächen bestimmen einen Büschel in Σ; das Strahlennetz der Leitschaaren aller Flächen desselben schneidet in Γ eine durch u, g_1, g_2 gehende, demnach mit der gegebenen identische Regelschaar ein. Wir sagen deshalb lieber: *u-Strahlennetz, u-Regelschaar, u-Strahlenpaar.* Zu allen u-Strahlenpaaren gehört u.

Die Involutionen der u-Strahlenpaare, die je den Punkten einer Geraden in Σ_1 entsprechen, sind daher alle parabolisch und haben zwei in u vereinigte Doppelstrahlen.

Die Fläche φ_1^2, insofern sie ein Punktort ist, ist demnach in eine Doppelebene $\varkappa_1$ ausgeartet, und allen Punkten dieser Ebene $\varkappa_1$ entspricht der Strahl u von Γ.

Damit haben wir eine Ausnahme vom eindeutigen Entsprechen der Strahlen von Γ und der Punkte von Σ_1. Wir wollen, nach der bei Abbildungen üblichen Terminologie, *u den Hauptstrahl* in Γ nennen.

Das Erzeugniss einer parabolisch-involutorischen Regelschaar ist stets ein Strahlengebüsche, dessen Leitgerade der — einzige — Doppelstrahl der Involution ist.

Demnach ist, im jetzigen Falle, Δ das Gebüsche $[u]$ und das Strahlennetz $\Gamma\Delta$ ist das Strahlennetz mit zwei in u vereinigten Leitgeraden, das zu Γ gehört. Als solches geht es durch u; folglich entspricht ihm eine Ebene, nämlich die Ebene $\varkappa_1$, die ja, doppelt genommen, an Stelle von φ_1^2 getreten ist, welche, im allgemeinen Falle, dem Netze $\Delta\Gamma$ entspricht.

Wir nennen dies Netz besser (Γ, u).

Es enthält nur ein System von ∞^1 Strahlenbüscheln und zu allen gehört u; jeder von seinen Strahlen g gehört zu einem dieser Büschel. Der ihm in Σ_1 correspondirende Punkt liegt in $\varkappa_1$. Der Strahl g bestimmt, mit u und v, eine Leitschaar von Σ, die in zwei Büschel zerfällt, von denen der eine der durch g und u bestimmte ist. Derselbe gehört zu (Γ, u) und also ganz zu Γ; folglich entspricht allen seinen Strahlen der nämliche Punkt von $\varkappa_1$, derjenige, welcher der Trägerfläche der zerfallenden Leitschaar correspondirt.

Somit haben wir in $\varkappa_1$ eine Curve von solchen Punkten, dass jedem sämmtliche Strahlen eines Strahlenbüschels von (Γ, u) entsprechen, und darin eine zweite Ausnahme von der eindeutigen Beziehung. Wir nennen diese Curve die *Hauptcurve* der Abbildung in Σ_1.

Das Strahlennetz von Γ mit den Leitgeraden l_1, l_2, das einer beliebigen Ebene π_1 von Σ_1 entspricht, enthält u; also befinden sich in ihm zwei zu (Γ, u) gehörige Strahlenbüschel, deren Scheitel in die Punkte $l_1 u$, $l_2 u$ fallen, während die Ebenen durch l_2, l_1 bezw. gehen. In π_1 liegen deshalb 2 Punkte der Hauptcurve.

Die Hauptcurve in $\varkappa_1$ ist also ein Kegelschnitt k_1^2. In ihn ist die Fläche φ_1^2 im vorliegenden Falle ausgeartet.

Wie die Strahlenbüschel von (Γ, u), so sind auch die Punkte von k_1^2 reell.

Die Tangenten von φ_1^2, d. h. die Geraden von Σ_1, denen die Strahlenbüschel von Γ entsprechen, sind in die Treffgeraden dieses Kegelschnittes k_1^2 übergegangen.

In der That, jeder Büschel von Γ hat mit (Γ, u) einen Strahl gemein; also trifft jede Gerade von Σ_1, der ein Strahlenbüschel in Γ correspondirt, den k_1^2. Der zweite Strahlenbüschel, der ihr im allgemeinen Falle noch entspricht und von dem wir hier absehen, ist derjenige, der dem Treffpunkte allein entspricht.

Den Strahlenbüscheln von Γ entsprechen die Treffgeraden der Hauptcurve k_1^2 und zwar entspricht jeder von ihnen in der jetzigen eindeutigen Abbildung nur ein Strahlenbüschel.

Dieser Büschel hat mit demjenigen, der dem Stützpunkte auf k_1^2 allein entspricht, einen Strahl gemein, da er ja mit ihm zusammen eine Regelschaar darstellt.

Den Strahlen des Bündels in Σ_1 um einen Punkt von k_1^2 entsprechen alle diejenigen Büschel von Γ, welche mit demjenigen Büschel von Γ, der dem Scheitel allein entspricht, einen Strahl gemeinsam haben. Dazu gehören auch alle Büschel von (Γ, u); die ihnen ent-

sprechenden Strahlen sind die in die Ebene $\varkappa_1$ fallenden Strahlen des Bündels.

Will man also, was für manche Zwecke doch erwünscht ist, *auch für einen zu* (Γ, u) *gehörigen Strahlenbüschel von* Γ *entsprechende Gerade haben, so kann man als solche jede beliebige Gerade in* $\varkappa_1$ *annehmen, die durch den Punkt auf* k_1^2 *geht, der nach Obigem dem Strahlenbüschel entspricht.*

Wenn in einem u-Strahlennetze von Γ die beiden Leitgeraden sich vereinigen, so thun es auch die beiden Strahlenbüschel, die es mit (Γ, u) gemein hat, also auch die beiden Schnittpunkte der entsprechenden Ebene π_1 mit k_1^2.

Den u-Strahlennetzen von Γ, *welche vereinigte Leitgeraden haben, entsprechen die Ebenen, welche* k_1^2 *berühren* und ja die Tangentialebenen der ausgearteten φ_1^2 darstellen.

Für eine Gerade in $\varkappa_1$ zerfällt die correspondirende u-Regelschaar in die beiden Büschel von (Γ, u), welche je allein den Begegnungspunkten mit k_1^2 entsprechen; den übrigen Punkten der Geraden correspondirt nur der beiden Büscheln gemeinsame Strahl u.

Die Strahlen in Γ, welche 2 oder 3 Punkten von Σ_1 correspondiren, bestimmen, mit u, die Regelschaar, das Strahlennetz, welche bezw. der Verbindungs-Linie oder -Ebene der Punkte entsprechen. Die Strahlennetze von Γ, welchen 2 oder 3 Ebenen von Σ_1 entsprechen, haben die Regelschaar, bezw. (ausser u) den Strahl gemein, welche der Schnittlinie, bezw. dem Schnittpunkte der Ebenen correspondiren.

Einem nicht durch u gehenden Strahlennetze von Γ *entspricht in* Σ_1 203
eine Fläche 2. Grades, welche die Hauptcurve k_1^2 *enthält;* weil jenes Strahlennetz mit jedem Strahlenbüschel von (Γ, u) einen Strahl gemein hat. Sie zerfällt, wenn das Netz durch u geht, in die demselben entsprechende Ebene und $\varkappa_1$.

Die Zahl der Strahlennetze in Γ und ebenso die der Flächen 2. Grades durch k_1^2 ist ∞^4.

Einer nicht durch u gehenden Regelschaar von Γ *entspricht in* Σ_1 *ein Kegelschnitt, welcher der Hauptcurve* k_1^2 *zweimal begegnet;* weil die Regelschaar und (Γ, u) zwei Strahlen gemein haben.

Er bildet mit k_1^2 die Grundcurve eines Büschels von Flächen 2. Grades, welche den die Regelschaar enthaltenden Strahlennetzen von Γ entsprechen; dem Ebenenpaar des Büschels correspondirt ein u-Strahlennetz.

Geht die Regelschaar durch u, so besteht der Flächenbüschel aus lauter Ebenenpaaren, denen die Ebene $\varkappa_1$ und die Bildgerade der u-Regelschaar gemeinsam ist.

Den ∞^6 Regelschaaren von Γ entsprechen die ∞^6 Kegelschnitte in Σ_1, welche k_1^2 zweimal treffen.

Umgekehrt, die beiden Flächen, welche zwei beliebigen Strahlennetzen von Γ correspondiren, schneiden sich zunächst in dem Kegelschnitte, welcher der den Netzen gemeinschaftlichen Regelschaar entspricht. Jedem Punkte X_1 des Restschnitts 2. Ordnung correspondirt ein Strahl x des einen und ein von diesem verschiedener Strahl x' des andern Netzes. Die Leitschaar der Fläche von Σ, welche dem X_1 entspricht, enthält u, x, x' und müsste also, wenn sie nicht zerfiele, ganz zu Γ gehören; da sie aber auch v enthält, ist das nicht möglich; also besteht sie aus zwei Strahlenbüscheln, von denen der eine ganz zu Γ gehört. So gelangen wir auch auf diese Weise zu den Punkten eines Kegelschnitts als solchen ausgezeichneten Punkten der Abbildung, dass jedem von ihnen ein ganzer Strahlenbüschel in Γ entspricht.

204 Für unsere eindeutige Abbildung des Gewindes in den Punktraum können wir aber *eine einfachere Herstellungsweise* gewinnen als die, von der wir ausgegangen sind.

Es sei (P, π) *ein Strahlenbüschel von* (Γ, u) *und* O_1 *der Punkt von* k_1^2, *der ihm entspricht; dann befinden sich das Feld in* π *und der Bündel aus* O_1 *in Collineation;* dem Punkte X von π entspricht in derselben der Strahl aus O_1, welcher in unserer Abbildung dem von X ausstrahlenden Büschel von Γ correspondirt; denn da dieser Büschel einen Strahl durch P, also zum Büschel (P, π) sendet, so muss seine Bildgerade durch O_1 gehen, der ja allen Strahlen von (P, π) entspricht. Umgekehrt, jedem Strahle von O_1 entspricht ein Strahlenbüschel von Γ, der einen Strahl von (P, π) enthält, also seinen Scheitel in π hat, mithin in der jetzigen Verwandtschaft dieser Scheitel.

Alle Strahlenbüschel von Γ, welche von den Punkten X einer Geraden in π ausgehen, bilden ein Netz, zu dem auch u gehört; also bewegen sich die entsprechenden Strahlen von O_1 in der Ebene, in welche sich dies u-Strahlennetz abbildet Damit ist die Collineation dargethan.

Dem Schnittpunkte der Geraden mit u entspricht ein in die Ebene $\varkappa_1$ fallender Strahl, der nämlich nach dem Punkte von k_1^2 geht, welcher dem aus dem Schnittpunkte kommenden Strahlenbüschel von (Γ, u) entspricht.

In unserer Collineation sind also die Gerade u *und die Ebene* $\varkappa_1$ *homolog.*

Wenn (P', π') ein zweiter u-Strahlenbüschel von Γ ist und O_1'

sein entsprechender Punkt auf k_1^2, welche natürlich eine analoge Collineation zwischen π' und O_1' bewirken; so entspricht in der vorigen Collineation zwischen π und O_1 einer Geraden in π durch P' — denn P' liegt in π —, weil unter den Strahlenbüscheln von Γ aus ihren Punkten sich (P', π') befindet, eine durch O_1' gehende Ebene. Also ist in der ersten Collineation zu jedem Strahle von (P', π) und ebenso in der zweiten zu jedem Strahle von (P, π') eine Ebene durch $O_1 O_1'$ homolog.

Diese beiden Strahlenbüschel (P', π) und (P, π') sind aber in Bezug auf Γ polar und daher so projectiv, dass alle Strahlen von Γ, die einen Strahl des einen treffen, auch dem homologen im andern begegnen. Demnach entspricht zwei solchen homologen Strahlen in unsern beiden Collineationen je die nämliche Ebene durch $O_1 O_1'$. Den Strahlen in dieser Ebene durch O_1, bezw. O_1' entsprechen die einen oder andern Strahlenbüschel des Netzes von Γ, welches die beiden homologen und in Bezug auf Γ polaren Geraden zu Leitlinien hat.

Folglich können wir unsere Abbildung in folgender Weise herstellen: *(P, π) und (P', π') seien zwei Strahlenbüschel von Γ, welche einen Strahl u gemeinsam haben. Durch Γ werden dann die beiden Büschel (P', π) und (P, π') so projectiv, dass alle Strahlen von Γ, welche einen Strahl des einen dieser Büschel schneiden, auch den homologen Strahl im andern treffen; u entspricht sich selbst. Auf die beiden Felder π und π' beziehe man nun zwei Bündel O_1, O_1' bezw. so collinear, dass jeder Ebene des den Bündeln gemeinsamen Ebenenbüschels in den beiden Collineationen bezw. zwei Strahlen von (P', π) und (P, π') entsprechen, die in der erwähnten Projectivität homolog oder in Bezug auf Γ polar sind.*

Ein Strahl x von Γ trifft dann, wie gesagt, zwei solche homologe Strahlen; den Treffpunkten entsprechen in den Collineationen Strahlen von O_1 und O_1', welche in die nämliche Ebene durch $O_1 O_1'$ fallen, also sich schneiden. Ihr Schnittpunkt X_1 ist der Bildpunkt von x. Umgekehrt, zwei sich in X_1 schneidende Strahlen von O_1 und O_1' haben ihre entsprechenden Punkte in π und π' auf homologen Strahlen von (P', π) und (P, π') liegen; die Verbindungslinie ist also ein Strahl von Γ.

Dem sich selbst entsprechenden Strahle u correspondirt in beiden Collineationen die nämliche Ebene $\varkappa_1$, der Punktreihe auf u entsprechen also zwei projective Strahlenbüschel $(O_1, \varkappa_1)$ und $(O_1', \varkappa_1)$. Ihr Erzeugniss ist die Hauptcurve k_1^2 der Abbildung. Jedem ihrer Punkte entspricht der Strahlenbüschel von Γ aus dem Punkte von u, der den beiden in ihm sich schneidenden Strahlen von $(O_1, \varkappa_1)$ und $(O_1', \varkappa_1)$ correspondirt.

Ein beliebiger Strahlenbüschel von Γ bewirkt auf π und π' zwei

projective Punktreihen mit sich selbst entsprechendem Punkte auf u; die beiden entsprechenden projectiven Strahlenbüschel in O_1 und O_1' haben ihre homologen Strahlen je in derselben Ebene durch $O_1 O_1'$, also erzeugen sie eine Gerade, welche k_1^2 in dem Schnittpunkte der beiden Strahlen trifft, welche dem sich selbst entsprechenden Punkte auf u correspondiren.

Eine durch u gehende Regelschaar von Γ bewirkt ebenfalls zwei projective Punktreihen in π und π', die jedoch nicht perspectiv sind; also entspricht ihr ebenfalls eine Gerade, welche sich aber nicht auf k_1^2 stützt.

Ein durch u gehendes Strahlennetz von Γ macht die Felder π und π' so collinear, dass jede zwei Strahlen von (P', π) und (P, π'), welche in der obigen Projectivität homolog sind, sich entsprechen. Mithin werden die Bündel O_1 und O_1' so collinear, dass jede von den gemeinsamen Ebenen sich selbst entspricht. Also sind sie in perspectiver Lage und erzeugen eine Ebene, das Bild des Strahlennetzes.

205 *Zwei sich schneidenden Strahlen von Γ entsprechen,* weil sie stets zu einem Strahlenbüschel von Γ gehören, *in Σ_1 zwei Punkte, deren Verbindungslinie den k_1^2 trifft,* und umgekehrt; *einem nicht durch u gehenden Strahlennetze von Γ mit zwei vereinigten Leitgeraden,* das also nur ein System von Strahlenbüscheln besitzt, welche alle diese eine — zu Γ gehörige — Leitgerade zum gemeinsamen Strahl haben, *entspricht* eine Fläche 2. Grades durch k_1^2, welche ∞^1 durch einen Punkt gehende Geraden enthält, also *ein Kegel 2. Grades.*

In den Raum Σ_1 sei eine Fläche F_1 gelegt; ihr entspricht in Γ eine Congruenz. Sie hat mit einem Strahlenbüschel von Γ n Strahlen gemein, d. h. ihr Grad (Nr. 58) ist n, wenn jede Treffgerade von k_1^2 der F_1, ausserhalb der Hauptcurve, n-mal begegnet. Zu einer Congruenz 2. Grades führt deshalb eine F_1, welche $(2 + \tau)^{\text{ter}}$ Ordnung ist und durch k_1^2 τ-mal geht.

In jedem Punkte hat F_1 zwei Tangenten, welche k_1^2 treffen. Folglich wird jeder Strahl der Congruenz von zwei ihm unendlich nahen andern Strahlen derselben geschnitten. Wir werden dies als eine allen Congruenzen zukommende Eigenschaft erkennen und die Schnitte eines Congruenzstrahles mit den beiden ihn schneidenden unendlich nahen Congruenzstrahlen seine Brennpunkte, die Ebenen aber, welche ihn mit denselben verbinden, seine Brennebenen nennen (vergl. Nr. 114). Es wird sich weiter zeigen, dass, im allgemeinen, der Ort der Brennpunkte aller Strahlen einer Congruenz zugleich von den Brennebenen derselben eingehüllt wird; er heisst die Brennfläche der Congruenz.

Auf F_1 haben wir ein System von Curven, deren Tangenten sämmtlich den $k_1{}^2$ treffen; durch jeden Punkt von F_1 gehen zwei. Bewegt man sich längs einer von ihnen, so erhält man in der entsprechenden Congruenz eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrcurve auf der Brennfläche liegt. Man erkennt, dass jeder Strahl der Congruenz diese Fläche in seinen beiden Brennpunkten berührt. Die Fläche F_1 und die Brennfläche der correspondirenden Congruenz befinden sich, hinsichtlich ihrer Punkte, in einer einzweideutigen Verwandtschaft.

Einer in Σ_1 befindlichen Curve C_1 entspricht in Γ eine Regelfläche; ihr Grad ist die Zahl der Erzeugenden, welche sie mit einem beliebigen Strahlennetze von Γ gemein hat, also gleich der Zahl der Punkte, in denen C_1 von der Fläche 2. Grades, welche dem Netze entspricht, (ausserhalb $k_1{}^2$) geschnitten wird.

Schneiden alle Tangenten von C_1 den $k_1{}^2$, so ist diese Regelfläche abwickelbar.

Einer Congruenz n^{ten} Grades in Γ (welche n Strahlen in jeden Büschel von Γ sendet, also auch in jeden von (Γ, u)) *entspricht in Σ_1 eine Fläche, welche n-mal durch $k_1{}^2$ geht und* jede Treffgerade dieses Kegelschnitts noch n-mal trifft, also *$2n^{\text{ter}}$ Ordnung ist.*

Eine Regelfläche n'^{ten} Grades in Γ sendet in jedes u-Strahlennetz (bezw. ein Gewinde, welches dasselbe einschneidet) n' Strahlen, also auch in n' Strahlenbüschel von (Γ, u) je einen Strahl; daher *entspricht ihr in Σ_1 eine Raumcurve n'^{ter} Ordnung, welche $k_1{}^2$ n'-mal trifft.* Weil die obige Fläche und diese Curve, ausserhalb $k_1{}^2$, $2nn - nn' = nn'$ Punkte gemein haben, so folgt:

Eine Congruenz n^{ten} Grades und eine Regelfläche n'^{ten} Grades, welche demselben Gewinde angehören, haben nn' Strahlen gemein.

Insofern den Strahlenbüscheln von Γ die Treffgeraden von $k_1{}^2$ correspondiren, sind den Punkten (oder Ebenen) des Raumes $\mathfrak{G}$, in dem sich Γ befindet, die Strahlen des Complexes 2. Grades $(k_1{}^2)$ dieser Treffgeraden eindeutig zugeordnet.

Durchläuft der Punkt in $\mathfrak{G}$ eine Ebene π, deren Nullpunkt nach Γ wiederum P sei, so beschreibt der zugeordnete Strahl die Congruenz der Geraden, welche sich auf $k_1{}^2$ und denjenigen Strahl von $(k_1{}^2)$ stützen, welcher dem P entspricht.

Diese Congruenz (1. Ordnung 2. Klasse) werden wir später behandeln.

Ebenso finden wir, dass einer Geraden in $\mathfrak{G}$ im Complexe $(k_1{}^2)$ eine Regelfläche 2. Grades zugeordnet ist.

Als eine interessante Anwendung unserer Abbildung wollen wir 206

die Uebertragung des Correspondenz-Princips im Punktraume (Nr. 33) *auf das Gewinde* vornehmen.

In einem Gewinde Γ bestehe zwischen den Geraden g und g' — wir wollen Γ, je nachdem es von g oder g' erfüllt gedacht wird, mit (g), bezw. (g') bezeichnen — *eine Correspondenz von folgender Beschaffenheit:*

Jedem Strahle g entsprechen n' Strahlen g', jedem g' aber n Strahlen g; es giebt m Paare entsprechender Strahlen, bei denen die g einem gegebenen Strahlenbüschel von Γ angehört, g' aber einer gegebenen Geraden l' begegnet, also in dem durch das Gebüsche $[l']$ aus Γ geschnittenen Netze sich befindet, oder, was dasselbe ist, einem Strahlenbüschel von (g) entspricht eine Regelfläche m^{ten} Grades von (g') und einem Strahlennetze von (g') eine Congruenz m^{ten} Grades von (g); endlich giebt es m' Paare entsprechender Strahlen, bei denen g' einem gegebenen Strahlenbüschel von Γ angehört und g eine gegebene Gerade schneidet.

Wenn die Correspondenz von der Art ist, dass sie nur eine endliche Zahl sich selbst entsprechender Strahlen (Coincidenzen) besitzt, so ist diese Zahl

$$n + n' + m + m'.$$

Das Gewinde bilde sich, je nachdem es (g) oder (g') ist, in den Punktraum (X_1), bezw. (X_1') ab, und die Correspondenz zwischen diesen Punkträumen hat also folgende Eigenschaften:

Einem Punkte X_1 entsprechen n' Punkte X_1', einem X_1' aber n Punkte X_1.

Einer Geraden in (X_1) entspricht in (g) eine Regelschaar, einer Ebene in (X_1') ein Strahlennetz in (g'). Diesem Strahlennetze correspondirt in (g) eine Congruenz m^{ten} Grades, welche mit der Regelschaar, d. h. mit irgend einem Strahlennetze, das sie in Γ einschneidet, $2m$ Strahlen gemein hat. Es giebt also $2m$ Paare entsprechender Punkte, bei denen der X_1 auf einer gegebenen Geraden, der X_1' auf einer gegebenen Ebene liegt, und ebenso $2m'$ Paare, bei welchen X_1 auf einer gegebenen Ebene und X_1' auf einer gegebenen Geraden liegt. Folglich giebt es $n + n' + 2m + 2m'$ Punkte X_1, die mit einem der entsprechenden Punkte X_1' zusammenfallen.

Aber unter ihnen giebt es auch solche, die zwei nicht vereinigten Strahlen g und g' entsprechen. Wir haben in Σ_1 ∞^1 Punkte — die von k_1^2 —, denen je nicht blos ein Strahl, sondern ∞^1 einen Büschel bildende Strahlen correspondiren. Diese Büschel bilden das Netz (Γ, u) mit in u vereinigten Leitgeraden; zu allen gehört u und ihre Scheitel und Ebenen sind projectiv einander zugeordnet. Jedem derselben entspricht, als Büschel von (g), in (g') eine Regelfläche m'^{ten} Grades,

welche mit m' ihrer Strahlen die u trifft, oder in so viele Büschel des Netzes (Γ, u) Strahlen g' hineinwirft, welchen Strahlen unseres Büschels entsprechen. Der Ebene desselben, zu (g) gerechnet, entsprechen also m' Ebenen, die auch durch u gehen, in (g') und umgekehrt, jeder zu (g') gehörigen Ebene durch u entsprechen m ebenfalls durch u gehende Ebenen in (g).

Diese Correspondenz $[m, m']$ im Ebenenbüschel u, deren entsprechende Ebenen entsprechende Strahlen g und g' enthalten, führt zu $m + m'$ Strahlenbüscheln von (Γ, u), von denen jeder zwei entsprechende Strahlen g und g' enthält; diesen entspricht der nämliche Punkt in Σ_1. Damit haben wir $m + m'$ Coincidenzen der Correspondenz zwischen (X_1) und (X_1'), denen keine Coincidenz in derjenigen zwischen (g) und (g') entspricht; die übrigen $n + n' + m + m'$ Coincidenzen der ersteren liefern ebenso viele für die letztere.*)

Wir nehmen nun an, das Gewinde Γ sei ein Gebüsche mit der 207
Axe l. Die ihm angehörigen Strahlenbüschel zerfallen dann in 2 getrennte Systeme: die einen haben einen beliebigen Scheitel und senden ihre Ebene durch l; die andern befinden sich in beliebiger Ebene und haben ihren Scheitel auf l; gemeinsam sind beiden Systemen die ∞^2 Strahlenbüschel, zu denen l selbst gehört.

Folglich muss die Hauptcurve der Abbildung zerfallen in zwei Gerade, so dass die eine von den Bildgeraden der einen, die andere von denen der andern Strahlenbüschel getroffen wird; durch den Schnittpunkt gehen die Bilder der l enthaltenden Büschel.

Dies Zerfallen von k_1^2 ergiebt sich auch daraus, dass *das Netz (Γ, u)*, dessen u enthaltende Büschel den Punkten von k_1^2 entsprechen, *sich in den Bündel aus dem Punkte $L \equiv lu$ und das Feld in der Ebene $\lambda \equiv lu$ theilt.*

Es sei x ein Strahl von L; so gehört der Büschel xu ganz zu der Leitschaar einer Fläche f des Gebüsches Σ durch u, v (Nr. 197), welche Schaar durch einen zweiten Büschel vervollständigt wird, der durch v und den v treffenden Strahl des ersten Büschels bestimmt ist. Dieser erste Büschel gehört auch ganz zum Gebüsche $[l]$ und ihm entspricht der Punkt in Σ_1, welcher der f correspondirt.

Das u-Strahlennetz von Γ oder $[l]$, das einer beliebigen Ebene π_1

*) Für den speciellen Fall des Gebüsches — Strahlenaxe nach seiner Terminologie — hat Schubert (Math. Annalen Bd. 10 S. 67 Formel (III)) durch Methoden der abzählenden Geometrie dies Correspondenz-Princip abgeleitet, jedoch wiederum unter der allgemeineren Voraussetzung, dass die Correspondenz auch Coincidenzen niedrigerer Gattung und infolge dessen nicht blos eine endliche Anzahl besitzt.

entspricht, enthält einen Strahlenbüschel aus dem Bündel L, und so *erhalten wir in* $\varkappa_1$ *eine Gerade* k_1^L, *deren einzelnen Punkten die den Bündel L erfüllenden Strahlenbüschel von [l] entsprechen, welche alle den festen Scheitel L haben, während die Ebene sich um u dreht, und analog eine zweite Gerade* k_1^λ, *deren einzelnen Punkten die das Feld* λ *erfüllenden Strahlenbüschel von [l] correspondiren, welche die feste Ebene* λ *haben, während der Scheitel die u durchläuft.* k_1^L und k_1^λ setzen k_1^2 zusammen. Dem Schnittpunkte K_1 entspricht der Büschel (L, λ), und darin der Strahl l.

Ein Strahlenbüschel von $[l]$, dessen Scheitel auf l liegt, sendet in das Feld λ einen Strahl, also in einen der zuletzt genannten Strahlenbüschel. Diesem Strahl entspricht also ein Punkt auf k_1^λ.

Die Bildgeraden derjenigen Strahlenbüschel von [l], welche ihren Scheitel auf l haben, treffen k_1^λ *und die Bildgeraden der Strahlenbüschel von [l], deren Ebenen durch l gehen, stützen sich auf* k_1^L.

Im ersteren Falle ist der Stützpunkt derjenige Punkt von k_1^λ, welcher dem Strahlenbüschel in der Ebene λ entspricht, dessen Scheitel in den Schnittpunkt von u mit der Ebene des abgebildeten Strahlenbüschels fällt; im zweiten Falle entspricht der Stützpunkt auf k_1^L demjenigen Strahlenbüschel aus L, dessen Ebene die u mit dem Scheitel dss Strahlenbüschels verbindet, der abgebildet wird.

Wir haben im Gebüsche $[l]$ ∞^1 Bündel, aus den Punkten von l, und ∞^1 Felder, in den Ebenen durch l.

Die u-Regelschaar, welche in $[l]$ einer beliebigen Geraden von Σ_1 entspricht, hat l zur Leitgeraden; folglich sendet jeder der Bündel und jedes der Felder von $[l]$ ihr einen Strahl zu.

Demnach entspricht einem Bündel sowohl wie einem Felde von [l] eine Ebene.

Die einem Bündel entsprechende Ebene geht durch k_1^λ, weil die Geraden, welche seinen Strahlenbüscheln correspondiren und diese Ebene erfüllen, sich auf k_1^λ stützen oder auch weil der Bündel zu jedem der u-Strahlenbüschel, die den Punkten von k_1^λ entsprechen, einen Strahl sendet.

Die einem Felde entsprechende Ebene geht durch k_1^L.

Einem Strahlenbüschel, zu dem die Leitgerade l gehört, entspricht die Schnittlinie der beiden Ebenen, welche dem Bündel aus seinem Scheitel und dem Felde in seiner Ebene correspondiren.

208 *Eine Congruenz* n^{ten} *Grades im Gebüsche [l]* sendet in jeden Büschel desselben n Strahlen, auch in diejenigen, denen die Punkte von k_1^L und k_1^λ entsprechen, also *entspricht ihr in* Σ_1 *eine Fläche*

$2n^{\text{ter}}$ *Ordnung, auf welcher die beiden Hauptgeraden* k_1^L *und* k_1^λ *n-fach sind;* die Strahlen durch ihren Schnitt K_1 treffen die Fläche, ausserhalb desselben, auch noch in n Punkten; also ist dieser Punkt nicht mehr als n-fach auf der Fläche.

In $[l]$ *liege ferner eine Regelfläche* $(m+n)^{\text{ten}}$ *Grades, für welche* l *eine m-fache Leitgerade ist,* so dass von jedem Punkte derselben m Erzeugende ausgehen und n in jeder Ebene durch l gelegen sind. Das Strahlennetz in $[l]$, welches sich in eine gegebene Ebene von Σ_1 abbildet, oder ein Gewinde, welches dieses Netz in $[l]$ einschneidet, hat mit der Regelfläche $m+n$ Strahlen gemeinsam; *folglich ist ihr Bild eine Curve* $(m+n)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

In dem Felde λ hat die Regelfläche n, im Bündel L aber m Erzeugende; *folglich trifft die Bildcurve die* k_1^λ *in* n, *die* k_1^L *in* m *Punkten.*

Nehmen wir an, dass *die Regelfläche* r *Paare Erzeugende besitzt, welche mit* l *zu demselben Strahlenbüschel gehören*, so heisst das, weil der l der Punkt K_1 entspricht, dass an die Bildcurve aus K_1, ausser den beiden m- und n-fachen Secanten, noch r Doppelsecanten kommen; also ist die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Curve

$$r+\tfrac{1}{2}m(m-1)+\tfrac{1}{2}n(n-1).$$

Vielfache Erzeugende setzen wir bei der Regelfläche nicht voraus, folglich auch keine vielfachen Punkte auf der Bildcurve. *Mithin ist ihr Rang*

$$(m+n)(m+n-1)-2r-m(m-1)-n(n-1)=2(mn-r).$$

Zwei sich auf l schneidenden Erzeugenden der Regelfläche entsprechen zwei Punkte der Curve, deren Verbindungslinie die k_1^λ trifft. Den m von einem Punkte der l ausgehenden Erzeugenden der Regelfläche entsprechen m Punkte der Curve, deren sämmtliche Verbindungslinien k_1^λ treffen, die also in einer Ebene durch k_1^λ liegen. Ebenso liegen die Bildpunkte der n Erzeugenden, die in eine Ebene durch l fallen, in einer Ebene durch k_1^L.

Von k_1^λ, welche die Curve n-mal trifft, kommen noch

$$2(nm-r)-2n=2n(m-1)-2r$$

Berührungsebenen an sie, von k_1^L aber, die ihr m-mal begegnet, noch

$$2m(n-1)-2r.$$

Auf l *giebt es daher* $2n(m-1)-2r$ *Punkte, von denen 2 unendlich nahe Erzeugende der Regelfläche ausgehen, und durch* l *giebt es* $2m(n-1)-2r$ *Ebenen, welche zwei unendlich nahe Erzeugende enthalten.*

Jede Erzeugende einer Regelfläche, welche von einer unendlich nahen getroffen wird, heisst (Nr. 38) eine *Torsallinie* der Fläche; weil die Fläche in allen Punkten einer solchen Erzeugenden von der nämlichen Ebene, der Verbindungsebene der beiden unendlich nahen Erzeugenden, berührt wird und also längs der Torsallinie den Charakter einer abwickelbaren Fläche, eines Torsus, annimmt.

Unsere Fläche hat demnach $4mn - 2(m+n) - 4r$ Torsallinien.

Dies findet seine Bestätigung in dem Satze, dass jede Regelfläche vom Grade ν und vom Range ϱ (d. h. deren ebener Schnitt die Klasse ϱ hat) $2(\varrho - \nu)$ Torsallinien besitzt.*) Für unsere Regelfläche, bei welcher $\nu = m + n$ ist, lässt sich nämlich leicht nachweisen, dass ihr Rang ϱ mit dem der Bildcurve übereinstimmt.

Dass wir aber die *einzelnen* Zahlen der beiden verschiedenen Arten von Torsallinien erhalten, derer, die ihre „Spitze" auf l, und derjenigen, welche sie ausserhalb l haben, wird uns später bei den Congruenzen von Werth sein.

Abbildungen des Strahlenraums in lineare Systeme vierter Stufe.

209 Unsere eindeutige Abbildung des (allgemeinen) Gewindes Γ in den Punktraum Σ_1 führt zu *einer eindeutigen Verwandtschaft zwischen dem von Strahlen erfüllten Raume* 𝔊, *in dem sich* Γ *befindet, und dem linearen Systeme 4. Stufe* $\mathfrak{S}_1$ *der Flächen 2. Grades* S_1, *welche durch die Hauptcurve* k_1^2 *gehen.*

Wir wollen nun das bisher Γ genannte „Grundgewinde" Γ_0 nennen.

Jede Gerade x *von* 𝔊 *bestimmt in* Γ_0 *ein Strahlennetz; ihr und der zu ihr nach* Γ_0 *polaren zweiten Leitgeraden* x' *dieses Netzes ordnen wir die Fläche von* $\mathfrak{S}_1$ *zu, die in der Abbildung von* Γ_0 *in* Σ_1 *dem Netze entspricht.*

Den u-Strahlennetzen von Γ_0 entsprechen (abgesehen von der Ebene $\varkappa_1$ von k_1^2) die Ebenen von Σ_1.

Den Geraden x *und* x', *welche* u *treffen, entsprechen in* $\mathfrak{S}_1$ *Ebenen.*

Den Strahlennetzen von Γ_0, welche zwei vereinigte Leitgeraden haben, entsprachen (Nr. 205) in Σ_1 Kegel 2. Grades. Diese Leitgeraden gehören zu Γ_0.

Den Geraden x *von* 𝔊, *welche zu* Γ_0 *gehören und sich daher mit den gepaarten Geraden* x' *vereinigt haben, entsprechen in* $\mathfrak{S}_1$ *Kegel.*

*) Mathem. Annalen Bd. 6 S. 255.

Ein besonders interessanter Fall ergiebt sich, wenn der absolute Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ als Hauptcurve $k_1{}^2$ genommen wird. Das System $\mathfrak{S}_1$ besteht dann aus dem Inbegriffe *aller Kugeln des Raumes*, und wir haben deshalb eine Abbildung des Strahlenraumes in den Kugel-Raum, welche beide die Mannigfaltigkeit 4 haben.*) Aber diese Abbildung ist nicht reell; denn zu einer reellen Abbildung ist, wie wir fanden (Nr. 202), erforderlich, dass die Punkte von $k_1{}^2$ reell sind; also einer reellen Geraden entspricht nicht eine reelle Kugel. Den Geraden von $\mathfrak{G}$, welche u treffen, entsprechen die zu Ebenen abgeflachten Kugeln, den Strahlen von Γ_0 die Punktkugeln, d. h. Kegel, welche den $\mathfrak{K}^2$ projiciren.

Kehren wir zum allgemeinen Fall zurück. Es seien x und y 210
zwei sich schneidende Geraden von $\mathfrak{G}$, x' und y' ihre sich ebenfalls schneidenden Polaren nach Γ_0, so haben die beiden Strahlennetze $[xx']$ und $[yy']$ von Γ_0 die beiden Strahlenbüschel $(xy, x'y')$**) und $(x'y', xy)$ gemein und folglich haben die beiden Flächen von $\mathfrak{S}_1$, welche den Paaren xx' und yy' entsprechen, die beiden (auf $k_1{}^2$ sich stützenden) Geraden gemein, die in der Abbildung von Γ_0 in Σ_1 diesen Strahlenbüscheln entsprechen; sie berühren sich also im Schnittpunkte derselben.

*Zwei sich schneidenden Geraden von $\mathfrak{G}$ entsprechen zwei sich berührende Flächen von $\mathfrak{S}_1$.****)

Oder:

Einem Strahlengebüsche in $\mathfrak{G}$ entspricht der Inbegriff aller der Flächen von $\mathfrak{S}_1$, welche diejenige Fläche dieses Systems tangiren, die der Axe des Gebüsches entspricht.

Dieselben Flächen entsprechen auch dem zum gegebenen nach Γ_0 polaren Gebüsche.

Wenn aber die Axe des Gebüsches zu Γ_0 gehört, so gehen die Flächen, welche seinen Strahlen entsprechen, durch den Punkt, welcher der Axe (in der Abbildung von Γ_0 in Σ_1) entspricht, und haben mit

*) Lie, Mathem. Annal. Bd. 5 S. 170; vergl. auch Darboux, Théorie générale des surfaces Bd. I S. 232.

**) d. h. mit dem Scheitel xy und der Ebene $x'y'$.

***) Bei Lie's Abbildung kann man jede Kugel doppelt annehmen, mit positivem und mit negativem Halbmesser, und die positive dem einen, die negative dem andern von den beiden entsprechenden Strahlen correspondiren lassen.

4 Kugeln entsprechen 4 Strahlenpaare; aus den letzteren kann man 16 Quadrupel bilden, indem man aus jedem Paare eine Gerade nimmt. Den 16 Treffpaaren dieser Quadrupel entsprechen die 16 Kugeln, welche die gegebenen Kugeln berühren.

dem Kegel von $\mathfrak{S}_1$, dessen Spitze in diesen Punkt fällt, zwei Kanten gemein. Ein solches Gebüsche ist zu sich selbst nach Γ_0 polar.

211 Die beiden Paare xx' und yy' von Polaren befinden sich in einer und derselben Regelschaar, der Leitschaar derjenigen Regelschaar ϱ von Γ_0, welche den Netzen $[xx']$ und $[yy']$ gemeinsam ist.

Wir wollen annehmen, dass sie zu einander harmonisch sind, und die Beziehung aufsuchen, welche zwischen den entsprechenden Flächen S_1^x und S_1^y von $\mathfrak{S}_1$ besteht.

Einem beliebigen Strahle g von ϱ, als Strahl von Γ_0, entspricht in Σ_1 ein Punkt G_1 auf dem Kegelschnitt r_1^2, in den sich ϱ abbildet und welcher S_1^x und S_1^y (ausser k_1^2) gemeinsam ist; den 4 Punkten, in denen er unsere 4 harmonischen Strahlen trifft, oder besser den 4 Strahlenbüscheln von Γ_0, welche von ihnen kommen, entsprechen 4 von G_1 ausgehende und auf k_1^2 sich sützende Geraden, zwei auf S_1^x, zwei auf S_1^y; da zwei der Strahlenbüschel zu $[xx']$, die beiden andern zu $[yy']$ gehören. Weil die Punkte $g(x, x')$ zu den $g(y, y')$ harmonisch sind, so sind auch auf dem Kegel $G_1 k_1^2$, dessen Kanten den sämmtlichen Büscheln von Γ_0, zu welchen g gehört, correspondiren, die beiden Geradenpaare auf S_1^x und S_1^y harmonisch; und dies bleibt bestehen, wenn g die ϱ und G_1 den r_1^2 durchläuft. Folglich sind auch die Punktepaare, in denen diese Geradenpaare die Hauptcurve k_1^2 treffen, harmonisch und ihre Verbindungslinien in Bezug auf k_1^2 conjugirt.

*Zwei Geradenpaaren von $\mathfrak{G}$, welche harmonisch zu einander sind, entsprechen also in $\mathfrak{S}_1$ zwei Flächen, deren Berührungsebenen in irgend einem Punkte der Schnittcurve, welche sie ausser k_1^2 haben, die Ebene von k_1^2 in zwei Geraden schneiden, die in Bezug auf k_1^2 conjugirt sind.**)

*) Wir haben so indirect den Satz erhalten:

Wenn zwei Flächen 2. Grades S und S' sich in zwei Kegelschnitten k^2 und r^2 durchschneiden und die Berührungsebenen in irgend einem Punkte des einen r^2 die Ebene des andern in 2 Geraden t und t' treffen, welche in Bezug auf k^2 conjugirt sind; so gilt dies für jeden Punkt von r^2.

In der That, die t und t' umhüllen zwei Kegelschnitte t^2, t'^2, welche k^2 in den beiden Schnitten U und V von r^2 und k^2 berühren. Der Berührungspunkt einer t mit t^2 ist der Punkt, der dem Schnitte (t, UV) harmonisch zugeordnet ist in Bezug auf die beiden Punkte (t, k^2); vergl. Steiner-Schröter's Vorlesungen S. 350 der 2. Aufl.; analoges gilt bei t'. Wenn nun einmal t und t' in Bezug auf k^2 conjugirt sind, so ist jeder der beiden Berührungspunkte der Pol der andern Geraden nach k^2; d. h. die Polarcurve von t^2 nach k^2, welche auch k^2 in U und V tangirt, hat mit t'^2 noch einen Punkt gemein und ist mit ihm identisch, und für jede t' ist der Berührungspunkt der Pol von t.

Also umhüllen die Spuren t und t' zwei Kegelschnitte, welche zu einander polar sind nach k^2.

Ist k_1^2 der absolute Kegelschnitt, so bedeutet dies, dass die beiden Kugeln sich rechtwinklig schneiden.

Wenn nun ein Gewinde Γ *zu* Γ_0 *in Involution ist*, so liegt von jedem Strahle x von Γ auch die Polare x' nach Γ_0 in Γ und beide sind harmonisch zu den Leitgeraden y, y' des Netzes $\Gamma_0 \Gamma$. *Die Flächen* S_1^x, *welche den Strahlenpaaren* xx' *von* Γ *correspondiren, schneiden die dem festen Paare* yy' *entsprechende Fläche* S_1^y *so, dass die beiden Tangentialebenen an* S_1^x *und* S_1^y *in irgend einem Punkte der (veränderlichen) Schnittcurve die Ebene* $\varkappa_1$ *von* k_1^2 *in zwei Geraden treffen, welche in Bezug auf* k_1^2 *conjugirt sind.*

Es durchlaufe nun x *ein beliebiges Gewinde* Γ, dann durchläuft die nach Γ_0 polare Gerade x' ein von Γ verschiedenes Gewinde Γ', das zu Γ nach Γ_0 polare. Das Schnitt-Strahlennetz $[yy']$ mit Γ_0 haben sie gemeinsam.

Das Doppelverhältniss $(yy'xx')$ — von 4 Strahlen, die je zu derselben Regelschaar gehören — ist fest, nämlich, da sie die Polaren von x nach den Gebüschen $[y]$, $[y']$ und den Gewinden Γ, Γ_0 sind, gleich dem Doppelverhältniss dieser 4 zu dem nämlichen Büschel gehörigen Gewinde.

Wir schliessen daraus, in ähnlicher Weise wie oben, dass *die Berührungsebenen der festen Fläche* S_1^y *und der veränderlichen* S_1^x *in irgend einem Punkte ihres (variabeln) Schnitts* r_1^2 *die beiden Flächen in Geradenpaaren schneiden, deren Spuren auf* k_1^2 *einen Punktwurf von gegebenem Doppelverhältnisse bilden.*

Das dreifach unendliche System der S_1^x entspricht dem Paare von Gewinden Γ und Γ'.

Die Spurpunkte auf k_1^2 wollen wir — dabei für den nächstfolgenden Beweis den Zeiger 1 unterdrückend — Y, Y', X, X', ihr Doppelverhältniss λ nennen und zeigen, dass mit diesem Doppelverhältnisse auch das der 4 Punkte M, N, V, W constant ist, in denen die Polare z von $Z \equiv (YY', XX')$ nach k_1^2 diese Curve und die beiden Linien YY', XX' schneidet. Um die Beziehung zwischen:

$$\lambda = (YY'XX') \quad \text{und} \quad \mu = (MNVW),$$

aus der dies hervorgeht, zu gewinnen, führen wir noch die beiden andern Diagonalpunkte $P \equiv (XY', YX')$ und $Q \equiv (XY, X'Y')$ und den Pol V' von YY' an, die alle drei auf z liegen. Dann ist

$$\lambda = (V'VQP);$$

ferner haben wir die beiden Involutionen:

$$MM,\ NN,\ PQ,\ VV' \quad \text{und} \quad PP,\ QQ,\ MN,\ VW.$$

Die Gerade z, auf der sich nun beide Würfe $V'VQP$ und $MNVW$ befinden, projiciren wir so, dass P ins Unendliche geht. Wir haben (indem wir dieselben Namen für die Projectionen beibehalten) wegen der zweiten Involution:

$$QN = -QM,\ QW = -QV; \quad \text{sodann} \quad QV' = \lambda . QV.$$

Ferner, weil Q Centralpunkt der ersten Involution geworden ist:

$$\overline{QM}^2 = \overline{QN}^2 = QV . QV' = \lambda . \overline{QV}^2;$$

also:

$$QM = \sqrt{\lambda} . QV,\ QN = -\sqrt{\lambda} . QV;$$

daher:

$$\mu = \frac{MV}{NV} \cdot \frac{NW}{MW} = \frac{QV - QM}{QV - QN} \cdot \frac{QW - QN}{QW - QM}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{\lambda}}{-1 - \sqrt{\lambda}} = \left(\frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}}\right)^2 . \text{*)}$$

Wenn $\lambda = -1$, so ist auch $\mu = -1$, wie wir oben unmittelbar erkannt haben.

Das erhaltene Ergebniss bedeutet, wenn k_1^2 wiederum der unendlich ferne Kugelkreis $\mathfrak{K}^2$ ist, dass die Berührungsebenen an die Kugeln S_1^y und S_1^x in einem Punkte ihres (endlichen) Schnittkreises, welche ja nach YY', XX' gehen, mit den Ebenen, die von ihrer Schnittlinie tangential an $\mathfrak{K}^2$ gehen und M, N zu Berührungspunkten haben, einen Ebenenwurf von constantem Doppelverhältnisse bilden, d. h. einander unter constantem Winkel schneiden, der ein rechter ist, wenn $\lambda = -1$, wenn also Γ zu Γ_0 in Involution ist.

212 *Es seien Γ_1, Γ_2 zwei Gewinde, welche unter einander und zu Γ_0 in Involution sind, y_1, y_1'; y_2, y_2' die Leitgeraden der Netze $\Gamma_0\Gamma_1$, $\Gamma_0\Gamma_2$; dann sind diese beiden Geradenpaare harmonisch.*

Wenn nämlich l und l' die Leitgeraden von $\Gamma_1\Gamma_2$ sind, so stützen sich die Gebüsche $[l]$, $[l']$ auch auf Γ_0, weil sie zum Büschel $\Gamma_1\Gamma_2$ gehören; also befinden sich l und l' in Γ_0. Die Leitgeraden-Paare der Netze, welche den Gewinden von $\Gamma_1\Gamma_2$ mit Γ_0 gemeinsam sind, bilden in der Leitschaar der Regelschaar $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2$ eine Involution, von welcher l und l' die Doppelstrahlen sind, da diese, als zu Γ_0 gehörig, sich je mit ihren Polaren nach Γ_0 vereinigt haben. Schneiden wir diese Involution mit einer Ebene, so sei C das Centrum der entstehenden conischen Involution, durch das demnach die Tangenten

*) Im Journal für Mathematik Bd. 90 S. 92 wurde dieselbe Beziehung für einen andern Zweck ermittelt. — Die Unbestimmtheit des Vorzeichens von $\sqrt{\lambda}$ liefert zwei reciproke Werthe von μ, wie das die Möglichkeit, M und N zu vertauschen, ja auch erfordert.

LL, $L'L'$ und die Secanten Y_1Y_1', Y_2Y_2' des diese Involution tragenden Kegelschnittes gehen; wobei $Y_1, \dots$ die Spuren von $y_1, \dots$ in der Ebene sind. Weil nun Γ_1, Γ_2 in Involution sind, so sind sie harmonisch zu $[l]$, $[l']$; also sind auch, in der conischen Involution, die Paare Y_1Y_1', Y_2Y_2' zu den Paaren LL, $L'L'$ oder, in dem Strahlenbüschel C, die Secanten Y_1Y_1', Y_2Y_2' zu den Tangenten LL, LL' harmonisch; folglich sind jene in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt und demnach wiederum Y_1, Y_1' harmonisch zu Y_2, Y_2' und also auch y_1, y_1' zu y_2, y_2'.

Umgekehrt, wenn zwei Paare von Polaren y_1, y_1'; y_2, y_2' in Bezug auf Γ_0 zu einander harmonisch sind, so befinden sich diejenigen Gewinde Γ_1, Γ_2 in den Büscheln durch die Netze $[y_1y_1']$, $[y_2y_2']$, welche zu Γ_0 in Involution sind, auch unter einander in Involution.

Liegen daher 5 Gewinde $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_5$ vor, welche zu je zweien, so wie alle zum Grundgewinde Γ_0 in Involution sind, so dass alle sechs eine solche Gruppe bilden, wie sie in den Nrn. 185—194 betrachtet wurde; dann sind die Leitgeraden-Paare $y_1, y_1'; \dots; y_5, y_5'$ der Netze, in denen Γ_0 von $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$ geschnitten wird, zu je zweien harmonisch; die Flächen $S_1^{y_1}, \dots, S_1^{y_5}$ in $\mathfrak{S}_1$, welche ihnen entsprechen, sind zu je zweien so beschaffen, dass ihre Berührungsebenen in irgend einem Punkte ihres veränderlichen Schnittes der Ebene von k_1^2 in zwei in Bezug auf diesen Kegelschnitt conjugirten Geraden, oder, wie wir auch sagen können, dass die Kegel, welche den beiden Flächen längs dieses Schnittes umgeschrieben sind, die genannte Ebene in zwei Kegelschnitten schneiden, die in Bezug auf k_1^2 polar zu einander sind.

Wenn also k_1^2 der absolute Kegelschnitt ist, dann sind je zwei der 5 Kugeln $S_1^{y_1}, \dots$ orthogonal.

Und umgekehrt, jede Gruppe von 5 Flächen $S_1^{y_1}, \dots$ durch k_1^2, welche die erörterte Lage haben, führt zu 5 dreifach unendlichen Systemen von S_1. Die Flächen jedes dieser Systeme haben zu einer der Flächen $S_1^{y_1}, \dots$ die erwähnte Lage und im Systeme befinden sich die 4 übrigen Flächen der Gruppe. Diesen 5 Systemen von $\mathfrak{S}_1$ entsprechen dann in $\mathfrak{G}$ 5 Gewinde, welche alle zu Γ_0 und zu je zwei unter einander in Involution sind.

Die Bedingung, dass zwei Flächen von $\mathfrak{S}_1$ die besprochene Lage haben, ist eine einfache und wir können deshalb in $\mathfrak{S}_1$ $\infty^{4+3+2+1}$ solche Gruppen von 5 Flächen S_1 bilden.

Wollen wir, statt der einzweideutigen Abbildung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{S}_1$, 213
eine *eindeutige* haben, so müssen wir als Grundgewinde Γ_0 nicht ein

allgemeines Gewinde, sondern ein *Gebüsche* $[l]$ nehmen, weil, in Bezug auf ein solches, zu jeder beliebigen Geraden x die Axe oder Leitgerade l polar ist und daher von dieser allen Paaren gemeinsamen Geraden abgesehen werden kann.

Wir wissen, dass in diesem Falle die Hauptcurve k_1^2 in zwei Gerade k_1^L und k_1^λ zerfällt.

Jeder Geraden x, und nur ihr, entspricht im System $\mathfrak{S}_1$, dessen Flächen nun alle durch das Geradenpaar (k_1^L, k_1^λ) gehen, diejenige *Fläche S_1^x, welche dem Strahlennetze $[lx]$, in der Abbildung von $[l]$ in Σ_1* (Nr. 207), *correspondirt.*

Eine Ausnahme von der Eindeutigkeit machen erstens diejenigen Strahlen x_0 von $\mathfrak{G}$, welche die Axe l treffen; denn das in Bündel und Feld zerfallende Netz $[lx_0]$ hat nicht nur die Geraden l und x_0, sondern alle Strahlen des durch sie bestimmten Büschels zu Leitgeraden. Wie das Netz, so zerfällt auch die entsprechende Fläche in $\mathfrak{S}_1$: sie besteht aus zwei bezw. durch k_1^L und k_1^λ gehenden Ebenen, und zwar geht die Ebene, welche dem Strahlenbündel lx_0 entspricht, durch k_1^λ, denn dieser Bündel sendet zu jedem der Strahlenbüschel, deren Ebene λ ist und deren Scheitel u durchläuft (Nr. 207), einen Strahl; hingegen geht die dem Felde lx_0 entsprechende Ebene durch k_1^L.

Wir haben also in $\mathfrak{S}_1$ ∞^2 *Flächen — die Ebenenpaare Π_1, deren Ebenen bezw. durch k_1^L, k_1^λ gehen —, denen in $\mathfrak{G}$ je ∞^1 einen Büschel bildende Strahlen entsprechen. Diese Büschel sind diejenigen, zu denen l gehört;* wir wollen sie deshalb l-Strahlenbüschel nennen.

Die beiden Ebenen durch k_1^L, k_1^λ bezw. sind diejenigen, welche, in der Abbildung des Gebüsches $[l]$ in den Punktraum Σ_1, dem Felde in der Ebene und dem Bündel aus dem Scheitel des l-Strahlenbüschels entsprechen.

Wenn wir also bei einem solchen l-Strahlenbüschel den Scheitel oder die Ebene festhalten, so bleibt beim entsprechenden Ebenenpaare die eine Ebene fest und zwar bezw. die durch k_1^λ oder k_1^L gehende.

Die Gerade l gehört zu allen diesen ausgezeichneten Strahlenbüscheln und deshalb entspricht ihr nicht blos eine Fläche in $\mathfrak{S}_1$, sondern alle diese ∞^2 Ebenenpaare Π_1. Aber damit haben wir noch nicht das vollständige Bild von l.

Eine beliebige Gerade x bestimmt, mit l zusammen, eindeutig ein Strahlennetz und hat deshalb, bei unserer jetzigen Abbildung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{S}_1$, eine einzige entsprechende Fläche. Fällt aber x mit l zusammen, so sind ∞^3 Strahlennetze möglich (vergl. Nr. 153), da ja die Punktreihe auf l und der Ebenenbüschel um l auf ∞^3 Weisen projectiv auf einander bezogen werden können (Nr. 58), oder, wenn wir

wollen, der l kann man sich auf ∞^3 Weisen nähern: es giebt ∞^3 ihr unendlich nahe Strahlen und darunter ∞^2 sie schneidende, in jedem der l-Strahlenbüschel einen; die letzteren führen uns zu den Ebenenpaaren Π_1 als zu l entsprechenden Flächen.

Aber in Wirklichkeit entspricht der Geraden l ein System 3. Stufe von Flächen in $\mathfrak{S}_1$, das wir Λ_1 nennen wollen und welches das System 2. Stufe (Π_1) der Ebenenpaare Π_1 in sich enthält; und damit haben wir *die zweite Ausnahme* von der Eindeutigkeit.

Ehe wir aber in der Besprechung dieser Abbildung weiter gehen, 214
müssen wir uns mit dem Flächensystem $\mathfrak{S}_1$, in das wir den Strahlenraum $\mathfrak{G}$ abbilden, noch etwas mehr vertraut machen.

Alle Flächen desselben haben das Geradenpaar $k_1^2 \equiv (k_1^L, k_1^\lambda)$ gemein. Wenn also im Folgenden von gemeinsamen Curven oder Punkten von Flächen des Systems gesprochen wird, so sind solche gemeint, welche sie ausser k_1^2 haben, und dasselbe gilt, wenn wir von der Grundcurve eines Büschels oder den Grundpunkten eines Netzes in $\mathfrak{S}_1$ sprechen.

Zwei Flächen von $\mathfrak{S}_1$ haben einen Kegelschnitt r_1^2 gemein und bestimmen einen *Büschel* in $\mathfrak{S}_1$, zu dem alle durch r_1^2 gehende Flächen von $\mathfrak{S}_1$ gehören und dessen *Grundcurve* wir r_1^2 nennen. *Solcher Büschel haben wir* ∞^6, da wir die ∞^4 Flächen von $\mathfrak{S}_1$ auf ∞^8 Weisen, diejenigen aber eines Büschels auf ∞^2 Weisen paaren können, oder weil es ∞^6 Kegelschnitte r_1^2 giebt, welche k_1^L und k_1^λ treffen.

3 beliebige Punkte bestimmen einen solchen Kegelschnitt r_1^2 und also auch einen Büschel in $\mathfrak{S}_1$.

Unter diesen ∞^6 Büscheln giebt es ∞^5, bei denen die Grundcurve r_1^2 in ein Geradenpaar ausartet.

Drei Flächen von $\mathfrak{S}_1$ haben zwei Punkte gemein, da die beiden Kegelschnitte, in welchen eine von ihnen die beiden andern schneidet, sich in zwei Punkten begegnen; alle übrigen Flächen ihres *Netzes* gehen ebenfalls durch diese Punkte: die *Grundpunkte* des Netzes. Man kann die ∞^4 Flächen von $\mathfrak{S}_1$ auf ∞^{12}, diejenigen eines Netzes auf ∞^6 Weisen zu je dreien zusammenstellen; *also enthält* $\mathfrak{S}_1$ ∞^6 *Netze*, so viele als es Punktepaare im Raume giebt.

Wenn die Verbindungslinie eines solchen Paares das Geradenpaar k_1^2 trifft, so *haben wir ein Netz, dessen sämmtliche Flächen eine Gerade gemein haben; es giebt* ∞^3 *solche Netze*, welche in 2 Systeme zerfallen, je nachdem diese Grundgerade der k_1^L oder der k_1^λ begegnet.

Vier Flächen endlich von $\mathfrak{S}_1$ haben (ausser k_1^2) im allgemeinen keinen Punkt gemein, sie bestimmen ein Gebüsche. *Die Zahl der Ge-*

büsche ist ∞^4; unter ihnen befinden sich ∞^3, die einen gemeinsamen Punkt haben.

Unser lineares System 4. Stufe $\mathfrak{S}_1$ hat also ∞^4 Flächen, ∞^6 Büschel, ∞^6 Netze, ∞^4 Gebüsche, Mannigfaltigkeiten, die natürlich übereinstimmen müssen mit denen der Gewinde und der niedrigeren linearen Systeme im Gewebe von Gewinden (Nr. 147 ff.). Da eben die Abzählung die nämliche ist, so übertragen wir die dort erhaltenen weiteren Ergebnisse.

Ein Netz in $\mathfrak{S}_1$ hat ∞^2 Büschel; es giebt in der That durch seine beiden Grundpunkte ∞^2 Kegelschnitte, welche $k_1{}^2$ zweimal treffen.

Hat das Netz eine Grundgerade, so ist diese den Grundcurven aller in ihm enthaltenen Büschel gemeinsam und dieselben sind Geradenpaare.

Ein Gebüsche hat ∞^4 Büschel und ∞^3 Netze.

Durch eine Fläche von $\mathfrak{S}_1$ gehen ∞^3 Büschel, ∞^4 Netze, ∞^3 Gebüsche, die sich auch ergeben, wenn man die Fläche mit den ∞^3 Flächen, ∞^4 Büscheln, ∞^3 Netzen eines Gebüsches von $\mathfrak{S}_1$ verbindet, das sie nicht enthält.

Durch einen Büschel gehen ∞^2 Netze und ∞^2 Gebüsche, welche man auch erhält, wenn man den Büschel mit den ∞^2 Flächen und ∞^2 Büscheln eines beliebigen Netzes von $\mathfrak{S}_1$ verbindet; wir können dies als *einen Bündel von Netzen und Gebüschen* bezeichnen, dessen „Basis" der Büschel ist.

Durch ein Netz endlich gehen ∞^1 Gebüsche; sie „projiciren" aus dem Netze die Flächen eines beliebigen Büschels. Wir haben so *einen Büschel von Gebüschen.*

So lange die Stufensumme zweier linearer Systeme unter 4 ist, haben sie im allgemeinen keine Fläche gemein: *so haben zwei Büschel oder ein Büschel und ein Netz keine Fläche gemein;* ist es bei zwei Büscheln der Fall, so befinden sie sich in demselben Netze; wenn bei einem Büschel und einem Netze, so gehören sie demselben Gebüsche an, wofern nicht der Büschel ganz im Netze enthalten ist.

Zwei Netze haben im allgemeinen nur eine Fläche gemein, hingegen einen Büschel, wenn sie sich in demselben Gebüsche befinden.

Ein Büschel und ein Gebüsche haben eine Fläche gemein.

Ein Netz und ein Gebüsche haben einen Büschel, zwei Gebüsche aber ein Netz gemein.

Wir nennen ein System α^{ter} Stufe in $\mathfrak{S}_1$ *von der Ordnung ν,* wenn es mit einem linearen System $(4-\alpha)^{\text{ter}}$ Stufe von $\mathfrak{S}_1$ ν Flächen gemein hat.

Danach ist das System (Π_1) *der Ebenenpaare* Π_1 *quadratisch*, weil sich in jedem Netze von $\mathfrak{S}_1$ 2 solche Ebenenpaare befinden.

$\mathfrak{S}_1$ enthält noch ein anderes System von Ebenenpaaren, welche aus der festen Ebene $\varkappa_1$ von $k_1{}^2$ und irgend einer beliebigen Ebene bestehen; diese bilden ein lineares System 3. Stufe oder ein Gebüsche, da jeder Büschel von $\mathfrak{S}_1$ eins enthält.

In einem Systeme α^{ter} Stufe ν^{ter} Ordnung gehen ν Flächen durch α gegebene Punkte, welche ja ein lineares System $(4 - \alpha)^{\text{ter}}$ Stufe aus $\mathfrak{S}_1$ ausscheiden.

Es gilt natürlich auch, dass 2 Systeme *beliebiger* Ordnung, deren Stufensumme unter 4 bleibt, z. B. eins der 1. und eins der 2. Stufe, im allgemeinen keine Fläche gemeinsam haben.

Nun wenden wir uns zur Abbildung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{S}_1$ zurück und 215
ermitteln zunächst, welche Systeme die Flächen in $\mathfrak{S}_1$ bilden, die den Strahlen eines Bündels, Feldes oder Büschels in $\mathfrak{G}$ entsprechen.

Durchläuft x einen Bündel P in $\mathfrak{G}$, so haben alle Strahlennetze $[lx]$ den Büschel gemeinsam, welcher aus P die Axe l projicirt; also haben die entsprechenden Flächen die auf $k_1{}^L$ sich stützende Gerade gemein, welche das Bild dieses Strahlenbüschels in Σ_1 ist (Nr. 207).

Das Bild eines Strahlenbündels von $\mathfrak{G}$ *in* $\mathfrak{S}_1$ *ist ein Flächennetz, das eine auf* $k_1{}^L$ *sich stützende Grundgerade hat.*

Ebenso ist das Bild eines Strahlenfeldes von $\mathfrak{G}$ *in* $\mathfrak{S}_1$ *ein Flächennetz, welches eine auf* $k_1{}^\lambda$ *sich stützende Grundgerade hat.*

Die Zahl der Bündel und Felder in $\mathfrak{G}$ und der Netze mit Grundgeraden in $\mathfrak{S}_1$ ist ∞^3.

Jedes Netz von $\mathfrak{S}_1$ mit einer Grundgeraden enthält von (Π_1) ∞^1 Ebenenpaare, welche alle die eine Ebene gemein haben und daher einen Büschel bilden.

Wenn x einen Strahlenbüschel (P, π) durchläuft, so haben alle Netze $[lx]$ zwei Strahlenbüschel gemein: der eine kommt aus P und sendet seine Ebene durch l, der andere liegt in π und hat seinen Scheitel auf l; sie haben einen Strahl gemeinsam, und bilden sich ab in zwei Gerade, welche sich bezw. auf $k_1{}^L$ und $k_1{}^\lambda$ stützen und einander im Bildpunkte dieses gemeinsamen Strahls schneiden.

Ein Strahlenbüschel von $\mathfrak{G}$ *bildet sich daher in* $\mathfrak{S}_1$ *ab in einen Flächenbüschel mit einem Geradenpaare als Grundcurve, oder in einen Büschel, dessen Flächen sich alle in einem Punkte berühren.**)

*) denn zwei sich (ausserhalb $k_1{}^2$) berührende Flächen von $\mathfrak{S}_1$ haben ein Geradenpaar gemein.

Die beiden Netze, welche dem Bündel P und dem Felde π entsprechen, haben also nicht blos eine Fläche, sondern einen Büschel gemein und gehören demnach zu demselben Gebüsche.

Der dem Strahlenbüschel (P, π) entsprechende Flächenbüschel besitzt ferner ein Ebenenpaar Π_1; *also hat dieser Büschel mit dem quadratischen Systeme* (Π_1) *eine Fläche gemein.*

Es giebt in $\mathfrak{G}$ ∞^5 Strahlenbüschel, in $\mathfrak{S}_1$ ∞^5 Büschel mit zerfallender Grundcurve.

Ein Gebüsche $[p]$ in $\mathfrak{G}$ erzeugen wir uns durch die ∞^1 Bündel, deren Scheitel die Axe p erfüllen (oder durch die ∞^1 Felder in den Ebenen durch p). Zu allen diesen Bündeln gehört p, also zu allen entsprechenden Netzen die Fläche von $\mathfrak{S}_1$, in welche sich p abbildet; die Grundgeraden dieser Netze erfüllen demnach diejenige Regelschaar dieser Fläche, für welche k_1^L Leitgerade ist. Von der Grundcurve r_1^2 eines beliebigen Büschels in $\mathfrak{S}_1$ wird diese Schaar (ausser auf k_1^2) zweimal getroffen; die Fläche des Büschels, welche eine der beiden getroffenen Geraden der Schaar enthält, gehört zu einem unserer Netze und entspricht einem Strahle von $[p]$. Das Gebüsche enthält ferner von jedem der l-Strahlenbüschel einen Strahl; also:

Einem Strahlengebüsche $[p]$ *in* $\mathfrak{G}$ *entspricht in* $\mathfrak{S}_1$ *ein quadratisches System 3. Stufe, welches das quadratische System 2. Stufe* (Π_1) *in sich enthält.*

Wenn aber die Axe p diejenige l des Grundgebüsches trifft, dann liegen die Strahlenbüschel, welche l aus den verschiedenen Punkten von p projiciren, alle in der Ebene lp; die ihnen entsprechenden Geraden befinden sich alle in derjenigen Ebene durch k_1^L, welche dem Felde lp, in der Abbildung von $[l]$ in Σ_1 (Nr. 207), entspricht, und gehen durch den Punkt, in den sich der gemeinsame Strahl p, als Strahl von $[l]$, abbildet. Also beschreiben die Grundgeraden der Netze von $\mathfrak{S}_1$, welche den Bündeln aus den Punkten von p entsprechen, einen Strahlenbüschel, durch dessen Scheitel also alle Flächen sämmtlicher Netze gehen. Von der Grundcurve r_1^2 eines beliebigen Flächenbüschels von $\mathfrak{S}_1$ wird er, ausser auf k_1^L, nur einmal getroffen.

Demnach entspricht einem Strahlengebüsche in $\mathfrak{G}$, *dessen Axe die Gerade* l *trifft, in* $\mathfrak{S}_1$ *ein lineares System 3. Stufe (ein Gebüsche) mit einem gemeinsamen Punkte.*

Zum quadratischen System wird es durch das System 3. Stufe ergänzt, welches der Geraden l allein entspricht; dasselbe ist daher linear, wie wir bald noch auf andere Weise erkennen werden.

Von den l-Strahlenbüscheln enthält unser jetziges Gebüsche $[p]$ nur diejenigen in der Ebene lp und die aus dem Punkte lp. *Demnach*

enthält das Flächengebüsche aus dem quadratischen Systeme (Π_1) *nur 2 Büschel,* dessen Ebenenpaare aus einer festen Ebene durch k_1^L, bezw. k_1^λ und einer veränderlichen Ebene durch die andere Gerade bestehen.

Einem beliebigen Flächenbüschel in $\mathfrak{S}_1$ (dessen Grundcurve nicht 216
zerfällt) entspricht eine Regelfläche, welche einer Geraden p so oft begegnet, als das quadratische System 3. Stufe, welches dem Gebüsche $[p]$ entspricht, mit dem Flächenbüschel Flächen gemein hat, also zwei. Trifft p wiederum l, so tritt an Stelle des quadratischen Systems ein lineares; d. h. die Regelfläche wird von einer beliebigen p zweimal, von einer l schneidenden, ausserhalb l, einmal getroffen.

Einem beliebigen Büschel in $\mathfrak{S}_1$ *entspricht in* $\mathfrak{G}$ *eine durch* l *gehende Regelschaar* (*l-Regelschaar*).

Da also jede dieser Regelschaaren durch l geht, so folgt, dass jeder Büschel in $\mathfrak{S}_1$ eine von den ∞^3 Flächen enthält, welche der Geraden l entsprechen.

Wir sprechen nun definitiv die zweite Ausnahme von unserer eindeutigen Verwandtschaft zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{S}_1$ aus:

Der Geraden l *allein entsprechen* ∞^3 *Flächen in* $\mathfrak{S}_1$, *welche ein Gebüsche* Λ_1 *bilden, das das quadratische System* (Π_1) *in sich enthält.*

Die Congruenz in $\mathfrak{G}$, welche einem beliebigen Netze von $\mathfrak{S}_1$ entspricht, sendet in jeden Bündel und jedes Feld von $\mathfrak{G}$ so viele Strahlen, als das Netz mit dem Netze, das dem Bündel, bezw. Felde entspricht, Flächen gemein hat, also je einen; demnach ist sie ein Strahlennetz.

Das Netz von $\mathfrak{S}_1$ enthält zwei Ebenenpaare Π_1, mithin enthält das Strahlennetz zwei l-Strahlenbüschel und mit ihnen ihren gemeinsamen Strahl l. Also:

Einem beliebigen Netze in $\mathfrak{S}_1$ *entspricht in* $\mathfrak{G}$ *ein durch* l *gehendes Strahlennetz.*

Der Complex in $\mathfrak{G}$ endlich, der einem Gebüsche in $\mathfrak{S}_1$ entspricht, schickt in einen Strahlenbüschel von $\mathfrak{G}$ so viele Strahlen, als der diesem entsprechende Büschel in $\mathfrak{S}_1$ mit dem Gebüsche Flächen gemein hat, also einen, und ist mithin ein Gewinde. Dasselbe geht durch l, weil die in ihm enthaltenen Regelschaaren und Netze, welche den Büscheln und Netzen des Gebüsches entsprechen, es thun.

Einem Gebüsche von $\mathfrak{S}_1$ *entspricht also in* $\mathfrak{G}$ *ein durch* l *gehendes Strahlengewinde.*

Die Mannigfaltigkeit der Büschel, Netze, Gebüsche von $\mathfrak{S}_1$, 6, 6, 4, ist ebenso gross als die der Regelschaaren, Strahlennetze und Strahlengewinde in $\mathfrak{G}$, welche durch l gehen.

Es erübrigt jetzt noch, die Bilder einer beliebigen Regelschaar, eines beliebigen Strahlennetzes oder Gewindes in $\mathfrak{G}$ aufzusuchen.

Eine Regelschaar hat mit dem Gewinde, welches einem Gebüsche von $\mathfrak{S}_1$ entspricht, 2 Strahlen gemein, also das ihr entsprechende System 1. Stufe in $\mathfrak{S}_1$ mit dem Gebüsche 2 Flächen. Die Regelschaar sendet in zwei von den l-Strahlenbüscheln einen Strahl.

Einer beliebigen Regelschaar von $\mathfrak{G}$ entspricht in $\mathfrak{S}_1$ ein System 1. Stufe 2. Ordnung, welches 2 Ebenenpaare Π_1 enthält.

Ein Strahlennetz in $\mathfrak{G}$ hat mit demjenigen, das einem Netze von $\mathfrak{S}_1$ entspricht, 2 Strahlen gemein und sendet in ∞^1 l-Strahlenbüschel einen Strahl, wobei sich die Scheitel und Ebenen derselben projectiv zuordnen. Die entsprechenden Ebenenpaare Π_1 bilden also zwei projective Ebenenbüschel um k_1^L und k_1^λ. Dies beweist, dass durch einen Punkt zwei von diesen Ebenenpaaren gehen.

Ein Strahlennetz von $\mathfrak{G}$ bildet sich in ein System 2. Stufe 2. Ordnung von $\mathfrak{S}_1$ ab, welches mit dem Systeme (Π_1) ein System 1. Stufe 2. Ordnung gemein hat.

Endlich einem Gewinde von $\mathfrak{G}$ entspricht in $\mathfrak{S}_1$ ein System 3. Stufe 2. Ordnung, welches das ganze System (Π_1) einfach enthält.

Denn jeder der l-Strahlenbüschel enthält einen Strahl des Gewindes.

217 Es sei π eine durch l gehende Ebene; jeden Punkt X derselben denken wir uns als Scheitel eines Bündels von $\mathfrak{G}$. Alle Netze in $\mathfrak{S}_1$, welche diesen Bündeln correspondiren, haben die Ebenenpaare Π_1 gemein, welche den in π gelegenen l-Strahlenbüscheln entsprechen, da jeder Bündel in jeden dieser Büschel einen Strahl sendet. Alle fraglichen Ebenenpaare bestehen aus einer festen Ebene durch k_1^L und einer beweglichen durch k_1^λ und bilden deshalb einen Büschel, der $\mathfrak{B}_1$ heisse, und die ∞^2 Netze durch ihn, welche den Bündeln X entsprechen, *einen Bündel* $(\mathfrak{B}_1)$ von Netzen. Die Gebüsche dieses Bündels erhält man, wenn man X eine Gerade in π durchlaufen lässt, wobei die Bündel ein Strahlengebüsche beschreiben, dessen Axe die l trifft.

So zeigt sich, dass *das Feld* (π) *und der Bündel* $(\mathfrak{B}_1)$ *sich collinear zugeordnet sind* und zwar die Punkte und Geraden von (π) den Netzen und Gebüschen von $(\mathfrak{B}_1)$.

Dreht man π um l, so erhält man ∞^1 solche Collineationen und der Grundbüschel $\mathfrak{B}_1$ der Bündel in $\mathfrak{S}_1$ durchwandert das System (Π_1).

Den Punkten X, in welchen ein Strahl x von $\mathfrak{G}$ die verschiedenen π durchbohrt, entsprechen in diesen Collineationen Netze von $\mathfrak{S}_1$, welche alle in die Fläche zusammenlaufen, die der x entspricht.

In allen diesen Collineationen entspricht der Geraden l, welche

allen π gemeinsam ist, das Gebüsche $\varDelta_1$, welches ihr in unserer Abbildung correspondirt und allen Bündeln ($\mathfrak{B}_1$) gemeinsam ist, da ja alle Basen $\mathfrak{B}_1$ sich in $\varDelta_1$ befinden.

Begnügen wir uns mit 2 Ebenen π und π' und ihren zugehörigen Bündeln ($\mathfrak{B}_1$) und ($\mathfrak{B}_1'$), so können wir unsere Abbildung des Strahlenraumes $\mathfrak{G}$ in das Flächensystem $\mathfrak{S}_1$ folgendermassen beschreiben:

Ein Strahl x von $\mathfrak{G}$ schneidet π und π' in X und X'; die diesen Punkten in den beiden Collineationen entsprechenden Netze in den Bündeln ($\mathfrak{B}_1$), ($\mathfrak{B}_1'$) haben die entsprechende Fläche gemein.

Da nun aber die Sätze über die Mannigfaltigkeiten und die ge- 218
meinsamen Flächen in Nr. 214 für *ein allgemeines Gebüsche* von Flächen 2. Grades genau ebenso lauten, wie für unser specielles, dessen sämmtliche Flächen durch dasselbe Geradenpaar gehen, überhaupt bei jedem linearen Systeme 4. Stufe richtig sind, so *kann man die eben gewonnene Herstellung verallgemeinern*, zu welcher allgemeineren Form wir ja auch gelangen, *wenn wir unser bisheriges specielles System 4. Stufe von Flächen 2. Grades durch ein zu ihm collineares allgemeines lineares System 4. Stufe, dessen Elemente auch Flächen oder Curven beliebiger Ordnung, Gewinde oder Strahlencomplexe beliebigen Grades sein können, überhaupt alle solche Elemente, aus denen man lineare Systeme aufbauen kann.*

Nennen wir, um alle diese Fälle zugleich zu umfassen, in der Ausdrucksweise der „*Geometrie von mehr Dimensionen*" ein solches Element einen *Punkt*, so haben wir *die Abbildung des Strahlenraumes $\mathfrak{G}$ in den linearen Punktraum von 4 Dimensionen.* Der Name „Punkt" zieht dann aber die weiteren Namen der Punktgeometrie nach sich. Was wir in der Geometrie des linearen Systems 4. Stufe von Flächen 2. Grades oder von Gewinden (Nr. 147 ff.) Büschel und Netze genannt haben, heisst dann *Gerade* und *Ebene*, das Gebüsche wird ein im Raume von 4 Dimensionen enthaltener *linearer Raum von 3 Dimensionen*, den wir *Raum* schlechthin nennen wollen.

Die Haupteigenschaften des *vierdimensionalen Raumes* P^4 lesen wir vom linearen Systeme 4. Stufe von Flächen 2. Grades oder Gewinden unmittelbar ab, halten es aber nicht für überflüssig, dieselben in dieser Fassung nochmals aufzuzählen.

P^4 *enthält ∞^4 Punkte, ∞^6 Gerade, ∞^6 Ebenen, ∞^4 Räume; eine Gerade enthält ∞^1 Punkte, eine Ebene ∞^2 Punkte und ∞^2 Gerade, ein Raum ∞^3 Punkte, ∞^4 Gerade, ∞^3 Ebenen.*

Durch einen Punkt gehen ∞^3 Gerade, ∞^4 Ebenen, ∞^3 Räume, welche die ∞^3 Punkte, ∞^4 Geraden, ∞^3 Ebenen eines nicht den Punkt enthaltenden Raums projiciren.

Durch eine Gerade gehen ∞^2 *Ebenen und* ∞^2 *Räume*, welche aus ihr die ∞^2 Punkte und ∞^2 Geraden einer nicht von ihr geschnittenen Ebene projiciren: *Bündel von Ebenen und Räumen.*

Durch eine Ebene gehen ∞^1 *Räume*, welche aus ihr die Punkte einer sie nicht schneidenden Geraden projiciren: *Büschel von Räumen.*

Wie die Punktreihe, das Feld, der Raum, welche sie projiciren, so sind auch der Büschel von Räumen, der Bündel von Ebenen und Räumen, der Inbegriff der durch einen Punkt gehenden Geraden, Ebenen und Räume (Dual-Raum) projectiv, bezw. collinear beziehbar.

Zwei Gerade befinden sich immer in demselben Raume und schneiden sich nur dann, wenn sie in derselben Ebene liegen; das Schneiden ist eine zweifache Bedingung, denn unter den ∞^6 Geraden treffen nur ∞^4 eine gegebene Gerade, in jedem ihrer Punkte ∞^3.

Eine Gerade und eine Ebene haben im allgemeinen keinen Punkt gemein, es sei denn, dass sie demselben Raume angehören. Von den Punkten einer Ebene gehen nur ∞^{2+3} Geraden, ebenso von den Punkten einer Geraden ∞^{1+4} Ebenen aus; also ist es einfache Bedingung, dass Gerade und Ebene sich schneiden.

Eine Gerade und ein Raum haben einen Punkt gemein; es sei denn, dass die Gerade im Raume liegt, was eine zweifache Bedingung ist, da von den ∞^6 Geraden nur ∞^4 in einem gegebenen Raume liegen oder von den ∞^4 Räumen ∞^2 durch eine gegebene Gerade gehen.

Zwei Ebenen haben im allgemeinen einen Punkt gemein, hingegen eine Gerade, wenn sie demselben Raume zugehören. Da durch jede Ebene ∞^1 Räume mit je ∞^3 Ebenen gehen, so ist es für 2 Ebenen eine (6—4)-fache Bedingung, demselben Raume anzugehören; oder jede Ebene enthält ∞^2 Geraden und durch jede von diesen gehen ∞^2 Ebenen; also ist es für zwei Ebenen eine zweifache Bedingung, dass sie sich in einer Geraden schneiden.

Eine Ebene und ein Raum haben eine Gerade gemein; es sei denn, dass jene diesem angehört, was eine dreifache Bedingung, da nur ∞^1 von den ∞^4 Räumen durch die Ebene gehen oder nur ∞^3 von den ∞^6 Ebenen sich im Raume befinden.

Zwei Räume haben eine Ebene gemein.

Dass ein Punkt auf eine gegebene Gerade oder Ebene oder in einen gegebenen Raum fällt, ist eine 3-, 2-, 1-fache Bedingung, und ebenso, dass eine Gerade, Ebene, ein Raum durch einen gegebenen Punkt geht.

U. s. w.

Ein Punktort 1. Stufe (Curve), 2. Stufe (Fläche), 3. Stufe heisst v^{ter} *Ordnung, wenn er mit einem Raume, einer Ebene, einer Geraden* v

Punkte gemein hat. Eine Curve hat mit einer Fläche im allgemeinen keinen Punkt gemein; es ist also eine besondere Eigenschaft, wenn dies der Fall ist.

Zwei Flächen haben im allgemeinen nur eine endliche Anzahl von Punkten gemeinsam, nicht eine Curve.

U. s. w.

Die Abbildung des Strahlenraums $\mathfrak{S}$ in den vierdimensionalen 219
Punktraum P_1^4 geschieht nun also in folgender Weise:

In $\mathfrak{S}$ sind zwei Ebenen π und π' gegeben, in P_1^4 zwei Bündel (von Ebenen und Räumen) mit den Axen u_1, u_1'. Wir beziehen u_1 auf π, u_1' auf π' (die Ebenen auf die Punkte, die Räume auf die Geraden) *so collinear, dass in beiden Collineationen die Schnittlinie l von π und π' dem Raume Δ_1 entspricht, in dem sich u_1 und u_1' befinden. Ein Strahl x von $\mathfrak{S}$ trifft π und π' in X und X', die Ebenen ξ_1, ξ_1' von u_1 und u_1', die in den Collineationen diesen Punkten X und X' entsprechen, haben den Bildpunkt X_1 von x gemein.*

Von den Bündeln u_1 und u_1' befindet sich je ein Ebenenbüschel $\bar{u}_1$, $\bar{u}_1'$ in Δ_1. Diese Büschel entsprechen in den beiden Collineationen der Punktreihe auf l, sind zu derselben und also unter einander projectiv mit solchen Ebenen als homologen, welche demselben Punkte von l entsprechen.

Da sie in demselben Raume Δ_1 liegen, so schneiden sich diese Ebenen je in einer Geraden und nicht blos in einem Punkte. *Diese Geraden s_1 erzeugen daher eine Regelschaar. Die Trägerfläche 2. Ordnung Φ_1^2* wird von einer Geraden des dreidimensionalen Raumes Δ_1, in dem sie sich befindet, in zwei Punkten getroffen; von einer ausserhalb dieses Raumes befindlichen aber im allgemeinen nicht, im besondern Falle auch einmal, wenn nämlich der Schnittpunkt der Geraden mit Δ_1 auf Φ_1^2 fällt.

Mit einer beliebigen, d. h. nicht in Δ_1 befindlichen Ebene hat Φ_1^2 zwei Punkte gemein, ihre Schnitte mit der Geraden, welche die Ebene mit Δ_1 gemeinsam hat; und so ist sie also auch 2. Ordnung in P_1^4.

Wenn die Gerade x der l begegnet, so werden π und π' in demselben Punkte getroffen und die entsprechenden Ebenen schneiden sich in einer Geraden s_1. Es scheint, als ob wir alle Punkte dieser Geraden s_1 dem Strahle x entsprechend nennen müssten und ebenso jedem Strahle von $\mathfrak{S}$, welcher l in demselben Punkte trifft. Es wird sich aber herausstellen, dass wir dem x nur einen bestimmten Punkt auf s_1 zuordnen dürfen.

Ein Punkt in Δ_1 giebt mit u_1, u_1' verbunden zwei zu Δ_1 ge-

hörige Ebenen, denen also zwei Punkte auf l entsprechen. *Jedem Punkte von A_1 entspricht die Gerade l.*

Wir legen in 𝔖 einen Strahlenbüschel; derselbe ruft auf π und π' zwei perspective Punktreihen hervor mit dem sich selbst entsprechenden Punkte auf l. Ihnen entsprechen zwei projective Ebenenbüschel in den Bündeln u_1, u_1'. Deren Erzeugniss ist eine Curve 2. Ordnung, denn mit einem beliebigen Raume hat sie 2 Punkte gemein; die beiden projectiven Strahlenbüschel nämlich, in denen dieser Raum von den Ebenenbüscheln geschnitten wird, haben zweimal 2 sich schneidende entsprechende Strahlen.

In unserm Falle haben wir aber zwei entsprechende Ebenen, welche sich in einer Geraden s_1 schneiden. Also zerfällt die Curve 2. Ordnung in diese Gerade und eine andere, den Ort der Schnittpunkte der übrigen homologen Ebenen der beiden Ebenenbüschel. Zu dieser letzteren Geraden gehört natürlich auch ein Punkt der ersteren Geraden, der sich im Continuum ergiebt.

Einem Strahlenbüschel in 𝔖 entspricht in P_1^4 eine Gerade, welche die Φ_1^2 einmal trifft.

Zwei sich schneidende Geraden in 𝔖 haben also zwei Punkte zu Bildern, deren Verbindungslinie die Φ_1^2 trifft.

Wir halten die Ebene des Büschels fest und lassen den Scheitel auf einem Strahle g entlang gleiten; so dass ein Strahlenfeld entsteht.

Die Bildgeraden treffen alle die nämliche Gerade s_1 von Φ_1^2 und gehen durch den Punkt, in welchen sich g abbildet.

Einem Strahlenfelde in 𝔖 entspricht in P_1^4 eine Ebene, welche durch eine bestimmte Gerade s_1 von Φ_1^2 geht.

Halten wir aber den Scheitel des Büschels fest und drehen die Ebene um g, so entsteht ein Bündel. Die Bildgeraden der erzeugenden Büschel gehen durch den nämlichen festen Punkt, treffen nun aber bezw. die verschiedenen Geraden s_1. Der Bündel macht die beiden Felder π und π' collinear, so, dass die Punkte auf l sich selbst entsprechen. Also werden auch die beiden Bündel u_1 und u_1' collinear und zwar so, dass die entsprechenden Ebenen der obigen projectiven Büschel $\bar{u}_1$ und $\bar{u}_1'$ auch in dieser Collineation homolog sind. Zwei collineare Bündel von Ebenen (in P_1^4) erzeugen aber eine cubische Fläche, denn in eine Ebene schneiden sie zwei collineare Punktfelder und deren 3 sich selbst entsprechende Punkte sind die Schnitte der Ebene mit der erzeugten Fläche. In unserm Falle aber gehört die ganze Fläche Φ_1^2 zum Erzeugnisse. Also bleibt als Bild des Bündels von 𝔖 eine Ebene, welche alle Geraden s_1 schneidet.

Da der Bündel ein beliebiger ist, so gehört diese Ebene nicht

zum Raume $\varDelta_1$, und mithin können die Schnitte mit den Geraden s_1 nicht auf einer Curve 2. Ordnung liegen; diese würde ja $\varDelta_1$ angehören und mit ihr die Ebene. Demnach sind die genannten Schnitte auf einer Geraden t_1 der andern Schaar von $\Phi_1{}^2$ gelegen.

Einem Strahlenbündel von 𝔖 *entspricht in* $\mathsf{P}_1{}^4$ *eine Ebene, welche durch eine Gerade* t_1 *der zweiten Schaar von* $\Phi_1{}^2$ *geht.*

Wie die Gerade s_1 der ersten Schaar von $\Phi_1{}^2$, durch welche die 220
Bildebene eines Feldes von 𝔖 hindurchgeht, dieselbe bleibt, wenn der Schnittpunkt der Trägerebene des Feldes mit l sich nicht ändert; so ändert sich diese Gerade t_1 aus der zweiten Schaar, durch welche die Bildebene eines Bündels von 𝔖 hindurchgeht, nicht, so lange der Bündelscheitel in derselben Ebene durch l sich bewegt.

In der That, wenn der Bündelscheitel eine beliebige Gerade p durchläuft, so geht die Bildebene nach und nach durch alle Geraden t_1 und macht diese Geradenschaar projectiv zur Punktreihe auf p und also zu dem damit perspectiven Ebenenbüschel um l; dabei entsprechen den Ebenen π und π' die zu den t_1 gehörigen Geraden u_1 und $u_1{}'$; denn wenn der Bündelscheitel in π liegt, so ist die Bildebene ersichtlich diejenige Ebene des Bündels u_1, welche, in der Collineation zwischen π und u_1, dem Scheitel homolog ist.

Es seien nun P und P' zwei Punkte in einer Ebene durch l, und durch sie seien zwei in Q einander schneidende Geraden p und p' gelegt; dadurch wird die Regelschaar der t_1 zu sich projectiv, indem sich 2 Geraden entsprechen, durch welche die Bildebenen von zwei Bündeln gehen, deren Scheitel die Schnitte derselben Ebene durch l mit p und p' sind. Wir haben aber 3 sich selbst entsprechende Geraden, nämlich u_1, $u_1{}'$, und diejenige in der Bildebene des Bündels Q. Also gehen auch die Bildebenen der Bündel P und P' durch dieselbe Gerade t_1.

So ist jedem Punkte von l *eine Gerade* s_1 *aus der einen Schaar von* $\Phi_1{}^2$, *jeder Ebene durch* l *eine Gerade* t_1 *aus der andern Schaar zugeordnet.*

Als Bild einer Geraden x *von* 𝔖, *welche* l *trifft, haben wir also den Punkt von* $\Phi_1{}^2$ *anzunehmen, in dem sich die Gerade* s_1 *und die Gerade* t_1 *durchschneiden, die dem Punkte* xl *und der Ebene* xl *so zugeordnet sind. Derselbe Punkt ist mithin das Bild sämmtlicher Strahlen des Strahlenbüschels* xl.

Ausnahmen von unserer eindeutigen Abbildung sind demnach:

Der Geraden l *entsprechen alle Punkte des Raumes* $\varDelta_1$.

Jedem Punkte der in $\varDelta_1$ *enthaltenen Fläche 2. Grades* $\Phi_1{}^2$ *ent-*

sprechen alle Strahlen eines Strahlenbüschels, welcher durch l geht; der Schaar s_1 entsprechen die Scheitel, der Schaar t_1 die Ebenen dieser Büschel projectiv.

Vergleichen wir mit dem Flächengebüsche $\mathfrak{S}_1$, so haben wir in Φ_1^2 das Analogon des quadratischen Systems der Ebenenpaare Π_1; jede Gerade s_1, bezw. t_1 ist analog zu einem Büschel von Ebenenpaaren Π_1, bei denen die Ebene durch k_1^λ, bezw. k_1^L fest ist. Die Ebenen in P_1^4, welche durch eine s_1, bezw. t_1 gehen, entsprechen den Flächennetzen in $\mathfrak{S}_1$, die eine auf k_1^λ, bezw. k_1^L sich stützende Grundgerade haben.

Indem wir in $\mathfrak{G}$ den Scheitel eines Bündels auf einer Geraden p sich bewegen lassen, erhalten wir das Gebüsche $[p]$. Die Bildebenen der verschiedenen Bündel verbinden den Bildpunkt P_1 von p mit den verschiedenen Geraden t_1. Wenn g_1 eine Gerade in P_1^4 ist, so hat die Ebene $P_1 g_1$ mit Φ_1^2 2 Punkte gemein; die Schnitte von g_1 mit den Geraden aus P_1 nach denselben sind die einzigen von den ∞^3 Punkten auf den genannten Bildebenen, welche auf g_1 fallen. Also bilden diese Punkte, die Bilder der Strahlen von $[p]$, einen (nicht linearen) Raum 2. Ordnung in P_1^4.

Ein Strahlengebüsche von $\mathfrak{G}$ bildet sich ab in einen Raum 2. Ordnung; er wird linear, infolge der Abzweigung von Λ_1, *wenn die Axe der l begegnet.*

Hinsichtlich der übrigen Sätze können wir uns des Beweises enthalten, weil er ähnlich zu führen ist wie bei $\mathfrak{S}_1$.

Während den ∞^5 Geraden von P_1^4, welche Φ_1^2 einmal schneiden, die ∞^5 Strahlenbüschel, den ∞^3 Ebenen, welche eine s_1, und den ∞^3 Ebenen, welche eine t_1 enthalten, die ∞^3 Felder und Bündel in $\mathfrak{G}$ entsprechen; *correspondiren den ∞^6 beliebigen Geraden und Ebenen von* P_1^4 *die ∞^6 Regelschaaren und Strahlennetze, welche durch l gehen, und den ∞^4 beliebigen Räumen die ∞^4 die l enthaltenden Gewinde von $\mathfrak{G}$.*

Hingegen eine beliebige Regelschaar, ein beliebiges Strahlennetz oder Gewinde in $\mathfrak{G}$ hat zum Bilde eine Curve 2. Ordnung, welche Φ_1^2 zweimal schneidet, eine Fläche 2. Ordnung, welche mit Φ_1^2 eine Curve 2. Ordnung gemein hat, einen Raum 2. Ordnung, welcher Φ_1^2 ganz enthält.

221 Drei interessante „lineare Punkträume“ von 4 Dimensionen möchte ich hervorheben: *den Inbegriff aller Kugeln, aller Parabeln (als Curven 2. Klasse), aller gleichseitigen Hyperbeln (als Curven 2. Ordnung) in fester Ebene.* Bei den Parabeln sind dann z. B. die Geraden und Ebenen die Parabel-Schaaren und Parabel-Schaarschaaren.

Ein „Ebenenbündel“ im vierdimensionalen „Punktraume“ der Kugeln ist der Inbegriff aller Kugelnetze, welche einen Kugelbüschel gemein

haben; man erhält ihn, wenn man einen Kugelbüschel mit allen Kugeln eines Kugelnetzes (das mit dem Büschel keine Kugel gemeinsam hat) verbindet.

Ingleichen erhält man einen „Ebenenbündel“ im Punktraum von 4 Dimensionen, dessen „Punkte“ die sämmtlichen Parabeln einer Ebene sind, wenn man eine Parabelschaar mit allen Parabeln einer Parabel-Schaarschaar (die mit der Schaar keine Parabel gemeinsam hat) verbindet.

Es erhellt, dass *es eine (reelle) eindeutige Abbildung der Strahlen des Raums in die Kugeln des Raums und in die Parabeln oder gleichseitigen Hyperbeln der Ebene giebt.* *)

Bei der Abbildung z. B. in die Kugeln entsprechen zwei sich schneidenden Geraden 2 Kugeln, deren verbindender Büschel mit dem ausgezeichneten Systeme Φ_1^2 2. Stufe 2. Ordnung eine Kugel gemein hat.

Abbildung des Strahlenraums in ein quadratisches Kegelschnitt-System vierter Stufe und aller Gewinde in die Kegelschnitte einer Ebene.

Auf eine interessante *Abbildung des Strahlenraums in ein ebenes quadratisches Kegelschnitt-System 4. Stufe* hat Cremona in einem Briefe an Beltrami aufmerksam gemacht. **) Ersetzen wir die Strahlen durch die Gebüsche, deren Axen sie sind, so lässt sich diese Abbildung erweitern zu der collinearen Abbildung der sämmtlichen ∞^5 Gewinde in die Kegelschnitte einer Ebene (Nr. 158 Anm.); die beiden Gebüsche eines Büschels von Gewinden haben dann zu Bildern die beiden Kegelschnitte des entsprechenden Büschels, welche dem quadratischen Systeme angehören. 222

Dieses System wird durch die Kegelschnitte gebildet, welche den Tangentendreiecken eines festen Kegelschnittes C_1^2 umgeschrieben sind.

An sich können jedem der ∞^3 Tangentendreiecke von C_1^2 ∞^2 Kegelschnitte umgeschrieben werden, aber jeder einem Tangentendreiecke umgeschriebene ist ∞^1 umgeschrieben (Nr. 25) und daher giebt es nur ∞^4 Kegelschnitte, die zu C_1^2 in dieser Beziehung stehen. Wir haben

*) Die in Nr. 209 besprochene Lie'sche imaginäre Abbildung des Strahlenraums in den Kugelraum war einzweideutig.

**) Giornale di Matematiche, Bd. 10 S. 47.

a. a. O. bewiesen, dass jeder Büschel von Kegelschnitten 2 solche Curven enthält, und deshalb ist das System quadratisch.

Die folgende Herstellung unserer Abbildung hat Aschieri *) gezeigt.

Eine cubische Raumcurve R^3 *ist gegeben und ein Feld* π_1; den Ebenenbündel, der aus einem Punkte O jener Curve ihre Sehnen-Congruenz (1. Ordnung, 3. Klasse) projicirt, beziehen wir reciprok auf das Punktfeld π_1. *Damit ist eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten von* π_1 *und den Sehnen von* R^3 *hergestellt,* welche keine Ausnahme hat; auch jede durch O gehende Sehne von R^3 hat eine bestimmte projicirende Ebene, ihre Verbindungsebene mit der Tangente von R^3 in O.**)

Einer Geraden in π_1 *entspricht eine Sehnen-Regelschaar von* R^3, diejenige nämlich, welche die Axe des entsprechenden Ebenenbüschels in O zur Leitlinie hat, und umgekehrt, jeder Sehnen-Regelschaar von R^3 entspricht eine Gerade von π_1, da jene aus O durch einen Ebenenbüschel projicirt sind.

Eine Sehnen-Regelschaar ruft auf der cubischen Raumcurve, zu der sie gehört, eine Involution hervor; folglich enthält sie zwei Tangenten derselben. Daraus folgt:

Den Tangenten von R^3 *entsprechen in* π_1 *die Punkte eines Kegelschnittes* C_1^2.

Wird eine Sehnen-Regelschaar conisch, so hat sie nur eine Tangente, welche in der Spitze des Kegels berührt.

Den conischen Sehnen-Regelschaaren entsprechen also die Tangenten von C_1^2, sodass je dem Berührungspunkt die Spitze des Kegels entspricht.

Drei Sehnen der R^3, *welche in einer Ebene liegen und deren Schnitte mit der Curve unter einander verbinden, correspondiren deshalb die 3 Ecken eines dem Kegelschnitte* C_1^2 *umgeschriebenen Dreiecks.*

223 *Ein Gewinde* Γ *in dem Raume* $\mathfrak{S}$, *der* R^3 *enthält, hat mit der Sehnen-Congruenz dieser Curve eine Regelfläche vom Grade* $1.(1+3)=4$ *gemein* (Nr. 41, 58), *für welche* R^3 *doppelte Leitcurve ist;* denn die Nullebene eines Punktes dieser Curve in Bezug auf Γ trifft sie noch

*) Rendiconti dell' Istituto Lombardo Ser. II Bd. 12 S. 265, 341; Memorie dell' Istituto Lombardo Ser. III Bd. 15 S. 75. Ich habe mir, da ich diese Schriften nicht zur Verfügung hatte, aus den Angaben des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik Bd. 11 S. 595 die Abbildung construirt. — Vergl. auch Segre, Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano. Atti dell' Academia di Torino Bd. 20.

**) Dass jeder der 3 Schnittpunkte von π_1 und R^3 der Sehne, welche die beiden andern verbindet, entspreche, wie es im Jahrbuche als erforderlich bezeichnet wird, ist nicht nothwendig.

zweimal. *Der Kegel der Ebenen, welche die Erzeugenden dieser Fläche aus O projiciren, ist deshalb 2. Klasse und in* π_1 *entspricht ihm daher ein Kegelschnitt. Denselben können wir auch dem Gewinde* Γ *entsprechen lassen.*

Bewegt sich Γ *durch einen Büschel, so thut es auch der entsprechende Kegelschnitt;* denn das Grund-Strahlennetz des ersteren Büschels hat mit der Sehnen-Congruenz 4 Strahlen gemein (Nr. 34) und die ihnen entsprechenden Punkte in π_1 sind die Grundpunkte des Kegelschnitt-Büschels.

Es sei $[x]$ *ein Gebüsche in* 𝔖; die Regelfläche 4. Grades enthält dann ∞^1 Tripel von Sehnen der R^3 in einer Ebene; *der Kegelschnitt, welcher dem Gebüsche entspricht, den wir aber kurz seiner Axe* x *correspondirend nennen können, ist demnach* ∞^1 *Tangentendreiecken von* C_1^2 *umgeschrieben.*

Den beiden Gebüschen eines Büschels von Gewinden entsprechen mithin die beiden Kegelschnitte im correspondirenden Kegelschnitt-Büschel, welche Tangentendreiecken von C_1^2 umgeschrieben sind.

Einem beliebigen Kegelschnitte in π_1 entspricht im Bündel O ein Kegel 2. Klasse; die Berührungsebenen desselben bewirken auf R^3 eine involutorische Correspondenz [2], in der sich je die beiden weiteren Schnitte der R^3 mit einer solchen Ebene entsprechen. Also erzeugen die Verbindungslinien entsprechender Punkte (Nr. 24) eine Regelfläche 4. Grades. Dieselbe befindet sich stets in einem Gewinde; denn das durch 5 ihrer Erzeugenden*) bestimmte Gewinde hat zum Bilde in π_1 einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen 5 Punkte gemein hat und identisch ist.

Also auch umgekehrt, jedem Kegelschnitt in π_1 *entspricht ein Gewinde in* 𝔖.

Wenn der Kegelschnitt einem Tangentendreiecke von C_1^2 *umgeschrieben ist,* so enthält die Regelfläche 4. Grades einmal 3 in eine Ebene fallende Sehnen der R^3, und die vierte Gerade, in welcher diese Ebene die Fläche schneidet, ist daher eine einfache Leitgerade der letzteren (Nr. 24); dieselbe enthält noch ∞^1 solche Tripel von 3 in eine Ebene fallenden Sehnen und dem Kegelschnitte sind noch ∞^1 Tangentendreiecke von C_1^2 eingeschrieben.**) *Das entsprechende Gewinde aber ist das Gebüsche, welches die genannte Leitgerade zur Axe hat.*

*) Da 5 Paare entsprechender Elemente eine involutorische Correspondenz [2] festlegen (Nr. 18), so ist die Regelfläche 4. Grades, ausser durch ihre doppelte cubische Raumcurve, durch 5 Sehnen derselben als Erzeugende eindeutig bestimmt.

**) So hat uns diese Abbildung einen neuen recht anschaulichen Beweis des Satzes von Nr. 25 geliefert.

224 *Wir fassen jetzt blos die den Gebüschen* $[x]$ *oder Geraden* x *von* 𝔖 *entsprechenden Kegelschnitte* x_1^2 *in* π_1 *und das von ihnen gebildete quadratische System 4. Stufe* (π_1) *ins Auge.*

Wenn x sich auf R^3 stützt, so zerfällt die Regelfläche 4. Grades in den Kegel, der aus dem Stützpunkte die R^3 projicirt, und die Sehnen-Regelschaar, welche x zur Leitgeraden hat. Der entsprechende Kegelschnitt zerfällt also in eine Tangente von C_1^2 und eine andere Gerade. Dass in jedem Geradenpaare von (π_1) die eine Gerade eine Tangente von C_1^2 ist, ist sofort klar.

Die Geradenpaare von (π_1) *correspondiren daher den Treffgeraden oder Secanten von* R^3 und diejenigen, welche den Doppelsecanten oder Sehnen entsprechen, bestehen aus 2 Tangenten der C_1^2.

Die zweite — C_1^2 nicht tangirende — Gerade eines Geradenpaares bleibt fest, wenn die Treffgerade die Leitschaar einer Sehnen-Regelschaar durchläuft.

Einem Strahlenbüschel in 𝔖 *entspricht ein Kegelschnittbüschel in* (π_1); *3 Grundpunkte desselben* entsprechen den 3 Sehnen von R^3 in der Ebene des Strahlenbüschels und *sind also die Ecken eines Tangentendreiecks von* C_1^2; der vierte Grundpunkt entspricht der Sehne von R^3, die vom Scheitel des Büschels kommt. Der Strahlenbüschel enthält 3 Treffgeraden von R^3, der Kegelschnittbüschel 3 Geradenpaare.

Das nicht lineare System (π_1) *von Kegelschnitten enthält daher* ∞^5 *Büschel.*

∞^6 sind nur beim *linearen* System 4. Stufe möglich; denn so viele erfordern, dass jeder Büschel, welcher irgend zwei Kegelschnitte des Systems verbindet, ganz zu demselben gehört.

In unserm Systeme kann jeder Kegelschnitt mit ∞^3 andern durch einen ganz zum Systeme gehörigen Büschel verbunden werden; denn zu einem Gebüsche in 𝔖 giebt es ∞^3 andere, deren Axen die seinige schneiden und mit ihm einen Büschel von lauter Gebüschen bilden, von denen die Axen dann einen Strahlenbüschel erzeugen.

So gelangen wir zu ∞^{4+3-2} Büscheln in (π_1).

Der einstufige Ort von Strahlen x in 𝔖, die den Kegelschnitten eines Büschels in (π_1) correspondiren, muss ja auch so beschaffen sein, dass jede Sehne von R^3 nur einen von seinen Strahlen trifft, also ein Strahlenbüschel.

Wenn zwei Gerade in 𝔖 sich schneiden, so sind ihre Kegelschnitte in (π_1) demselben Tangentendreiecke von C_1^2 umgeschrieben.

Einem Strahlenfelde in 𝔖 *entspricht in* (π_1) *das Netz von Kegelschnitten, welche einem und demselben Tangentendreiecke von* C_1^2 *umgeschrieben sind.*

Da wir ein Feld erhalten, wenn wir einen Strahl in ihm mit allen Strahlen eines ihm ebenfalls angehörigen Strahlenbüschels durch Strahlenbüschel verbinden, so muss sich das entsprechende Gebilde ebenso aus einem Kegelschnitte und einem Kegelschnittbüschel ergeben, also ein Kegelschnittnetz sein.

Aus demselben Grunde *muss aber auch das einem Strahlenbündel entsprechende Gebilde ein Kegelschnittnetz sein. Dasselbe hat einen gemeinsamen Punkt,* denjenigen, welcher der Sehne von R^3 aus dem Scheitel des Bündels entspricht.

Aber ein beliebiger Punkt in π_1 scheidet aus (π_1) nicht ein zwei-, sondern ein dreistufiges System aus, in welchem ∞^1 derartige Netze enthalten sind, deren correspondirende Bündel mit ihren Scheiteln die dem Punkte entsprechende Sehne von R^3 erfüllen und also ein Gebüsche bilden.

Das System (π_1) enthält daher zwei verschiedene Systeme von je ∞^3 Netzen, welche den Bündeln und Feldern von $\mathfrak{S}$ entsprechen.

Da allein Bündel und Felder die Eigenschaft haben, nur *einen* Strahl zu besitzen, welcher zwei beliebige Sehnen von R^3 trifft, so giebt es keine andern Netze in (π_1).

Einem Gebüsche [l] von $\mathfrak{S}$ entspricht ein quadratisches System 3. Stufe von Kegelschnitten in (π_1), d. h. ein System, von welchem 2 Kegelschnitte durch 3 beliebige Punkte von π_1 gehen; denn die Axe und die 3 Sehnen von R^3, welche diesen Punkten entsprechen, haben 2 Treffgeraden. Man beschreibe dem C_1^2 alle Tangentendreiecke um, welche dem der Axe l correspondirenden Kegelschnitte eingeschrieben sind. Die Kegelschnittnetze, welche diesen Dreiecken umgeschrieben sind und den Feldern in den Ebenen durch l entsprechen, erzeugen das System 3. Stufe.

Weil es in einer Regelschaar, einem Strahlennetze, einem Gewinde von $\mathfrak{S}$ 2 Gerade giebt, welche eine, bezw. 2, 3 Sehnen von R^3 treffen, so sind die entsprechenden Systeme 1., 2., 3. Stufe in (π_1) quadratisch.

Hierbei ist das Gewinde als Ort von Gebüsche-Axen aufgefasst.

Nehmen wir an, *die cubische Raumcurve R^3 zerfalle in einen Kegel-* 225
schnitt R^2 in der Ebene σ und eine ihn einmal, in S, treffende Gerade r. Von der Congruenz 1. Ordnung 3. Klasse sondert sich das Feld σ ab und es bleibt eine Congruenz 1. Ordnung 2. Klasse, welche durch die Strahlen gebildet wird, die R^2 und r treffen. Zu ihr gehört der ganze Strahlenbüschel (S, σ). Bezieht man nun wiederum mit Hilfe eines Ebenenbündels O, dessen Scheitel auf R^2 liegt, diese Congruenz auf ein Punktfeld, so entsprechen alle Strahlen dieses Büschels einem und

demselben Punkte U_1. Jedes Gewinde hat mit der Congruenz eine Regelfläche 3. Grades gemein, auf welcher R^2 einfach ist, so dass auch hier die Schaar der Erzeugenden aus O durch einen Kegel 2. Klasse projicirt wird und dem Gewinde in π_1 ein Kegelschnitt entspricht. Da aber jedes Gewinde in (S, σ) einen Strahl sendet, so gehen alle den ∞^5 Gewinden entsprechenden Kegelschnitte durch U_1; so dass wir nur ∞^4 erhalten. Es müssen demselben durch U_1 gehenden Kegelschnitte in π_1 je ∞^1 Gewinde entsprechen. In der That, der Kegel 2. Grades in O, der zu ihm reciprok ist, berührt die Ebene σ und die Sehnen zwischen R^2 und r, welche in seinen Tangentialebenen liegen und entsprechende Punkte einer Correspondenz [2, 1] (mit sich selbst homologem Punkte S) verbinden, erzeugen eine cubische Regelfläche, welche r zur doppelten Leitgeraden hat. Da sie noch eine einfache Leitgerade x hat, so liegt sie in dem Strahlennetze $[rx]$ und also in ∞^1 Gewinden, denen allen der Kegelschnitt in π_1 entspricht.

Zu einer Abbildung der Gewinde ist diese Construction also nicht geeignet, wohl aber wiederum zu der der Gebüsche $[x]$ *oder der Geraden* x, der einfachen Leitgeraden der Regelflächen. Zwischen diesen und den Kegelschnitten in π_1 durch U_1 besteht eindeutige Zuordnung.

Wir haben so die eindeutige Abbildung des Strahlenraums in das besondere, aber nun lineare vierstufige System der Kegelschnitte einer Ebene, welche durch einen festen Punkt gehen, oder, dual, welche eine feste Gerade berühren; wovon die in Nr. 221 erwähnte Abbildung der Strahlen des Raums in die Parabeln einer Ebene der interessanteste Specialfall ist. —

Zwei windschiefe Geraden r, r' *hingegen führen zu keiner Abbildung.* Das Strahlennetz $[rr']$ lässt sich zwar, wie wir wissen, eindeutig auf eine Ebene π_1 abbilden (Nr. 94); die Punkte, welche solchen Strahlen des Netzes correspondiren; die sich auf eine Gerade x stützen und deshalb eine Regelschaar bilden, erzeugen in π_1 einen — durch die beiden ausgezeichneten Punkte der Abbildung gehenden — Kegelschnitt; aber derselbe entspricht nicht blos der x, sondern allen Leitgeraden der Regelschaar.

226 *Für das quadratische System 3. Stufe von Kegelschnitten in* (π_1), *welche den Strahlen eines Gewindes* Γ *in* 𝔊 *entsprechen*, hat Cremona — analytisch — noch die gemeinsame Eigenschaft gefunden, dass *sie alle einem und demselben andern Kegelschnitte* K_1^2 *harmonisch umgeschrieben sind oder*, nach Reye's Ausdrucksweise,*) *denselben stützen;* d. h. sie sind je ∞^1 Polardreiecken von K_1^2 umgeschrieben.

*) Geometrie der Lage, Abth. I Anhang der 2. und 3. Auflage: Lineare Systeme und Gewebe von Kegelschnitten.

Die ∞^3 Kegelschnitte sind also dem linearen Systeme 4. Stufe der Kegelschnitte, welche dem K_1^2 harmonisch umgeschrieben sind,*) und unserm quadratischen Systeme 4. Stufe (π_1) gemeinsam. Synthetisch gelangt man zu dem Polarsysteme von K_1^2 in folgender Weise:

Nehmen wir an, dass Γ *eine Regelschaar* ϱ *besitzt, in deren Leitschaar* λ *sich 3 Sehnen* l, m, n *von* R^3 *befinden*, und nur diese 3 Sehnen. Alle Strahlen von ϱ treffen dann auch die Polare l' von l nach Γ. Die beiden Sehnen m, n von R^3 bestimmen eine Sehnen-Regelschaar λ_0 dieser Curve, deren verbundene Schaar ϱ_0 aus Treffgeraden der R^3 besteht. Weil λ und λ_0 die beiden Geraden m, n gemeinsam haben, so haben auch ϱ und ϱ_0 zwei Gerade r, r^* gemein: es sind dies Treffgerade von R^3, welche durch die Begegnungspunkte von l mit der Curve gehen, weil sie, als Leitgerade von λ_0, sonst l in diese Regelschaar bringen würden; zu der sie nicht gehört, weil λ keine Sehnen-Regelschaar ist. Als Gerade von ϱ treffen r, r^* die l'. Ist nun m_1 eine weitere Gerade von λ_0, welche also auch von r, r^* getroffen wird, so gehören r, r^* zur Leitschaar von $\lambda_1 \equiv (l l' m_1)$ und sind derselben mit ϱ_0 gemein; folglich haben auch λ_1 selbst und λ_0 zwei Gerade, mithin, ausser m_1, noch n_1. Daher ist auch λ_1 eine Dreisehnen-Leitschaar, deren Regelschaar ϱ_1, weil sie sich auf l und l' stützt, zu Γ gehört. Und so führt jede Gerade von λ_0 zu einer derartigen Dreisehnen-Leitschaar; die eine l der Sehnen ist fest, die beiden andern m und n, die sich eindeutig und gegenseitig gleichartig bestimmen, durchlaufen involutorisch die Sehnen-Regelschaar λ_0.

Es fragt sich nur, ob es zu einer gegebenen Sehne l von R^3 eine solche Sehnen-Regelschaar giebt: es hängt dies offenbar davon ab, ob es in den beiden Büscheln der Strahlen, welche aus den Schnitten L, L^* der l mit R^3 nach l' gehen, 2 Strahlen r, r^* giebt, welche Leitgerade der nämlichen Sehnen-Regelschaar sind; denn jede Regelschaar, welche l und l' mit irgend einer Geraden dieser Schaar verbindet, hat mit derselben noch eine zweite Gerade gemein.

Die Sehnen-Regelschaaren, welche die verschiedenen Strahlen des ersteren Büschels (aus L) zu Leitgeraden haben, haben die Sehne s gemeinsam, welche die beiden weiteren Schnitte der R^3 und der Ebene Ll' verbindet. Die von L^* kommenden Leitgeraden dieser Schaaren treffen also alle diese Sehne, bilden einen Büschel, und eine r^* von ihnen trifft l'. Sei r die Leitgerade aus L, die zur selben Regelschaar

*) Diese Namen und die ersten Untersuchungen über Kegelschnitte in dieser Beziehung rühren von H. J. S. Smith her: Proceed. Math. Soc. Bd. 2 S. 85; bei Rosanes (Math. Annalen Bd. 6 S. 264) heissen sie conjugirt.

gehört; so haben wir damit ein einziges solches Paar r, r^* und eine einzige Sehnen-Regelschaar λ_0 der gewünschten Art, wenn l gegeben ist.

Sie ist durch die beiden Sehnen s, s^* bestimmt, welche in den Ebenen Ll', L^*l' liegen, aber nicht durch L, bezw. L^* gehen.

Jede Sehne l von R^3 gehört also mit ∞^1 Paaren Sehnen m, n zur Leitschaar einer Regelschaar, die sich in Γ befindet.

Die m, n bilden eine involutorische Regelschaar.

Der Sehne l entspricht in π_1 ein Punkt L_1, der involutorischen Regelschaar m, n eine gerade Punktinvolution M_1, N_1.

Jeder Punkt L_1 von π_1 ist also Ecke von ∞^1 Dreiecken $L_1 M_1 N_1$, deren beide andere Ecken die Paare einer geraden Involution bilden.

Ihm wird demnach eindeutig diese Gerade zugeordnet.

Auch umgekehrt, jede Sehnen-Regelschaar λ_0 hat in ihrer Leitschaar 2 Gerade r, r^*, die zu Γ gehören; die Verbindungslinie der beiden Punkte, in denen sie sich auf R^3 stützen, ist die zugehörige Sehne l.

Da nun die 3 Sehnen l, m, n in ihrer Regelschaar gleichartig sich verhalten, so gehören ebenso zu M_1, N_1 die Geraden $N_1 L_1$, bezw. $L_1 M_1$.

Aus allem diesem folgt, dass *die ∞^3 Dreiecke, die man so in π_1 erhält, die Polardreiecke eines Polarsystems sind.**)

Den Geraden der zu Γ gehörigen Regelschaar ϱ, deren Leitschaar die 3 Sehnen l, m, n enthält, entsprechen Kegelschnitte, welche dem Dreiecke $L_1 M_1 N_1$ umgeschrieben sind und deshalb den Basis-Kegelschnitt K_1^2 des Polarsystems stützen, und zwar sind sie diejenigen ∞^1 unter den $L_1 M_1 N_1$ umgeschriebenen, welche zum Systeme (π_1) gehören.

Wir fanden, alle Geraden der Regelschaar $\varrho \equiv [l, l', m]$ treffen auch die m gepaarte Gerade n in der Involution auf λ_0; wir können auch sagen, alle Geraden des Gewindes Γ, welche l und m treffen; denn diese bilden die Regelschaar ϱ.

Wenn also eine Gerade g von Γ die Geraden l und m trifft, so begegnet sie auch n.

Sämmtliche Sehnen der R^3, welche sich auf den Strahl g von Γ stützen, erzeugen eine Regelfläche 4. Grades; l sei eine von ihnen, die ihr zugehörige Sehnen-Regelschaar λ_0 trifft g mit zweien ihrer Erzeugenden m, n, welche zur Regelfläche gehören und in der Involution auf λ_0 gepaart sind.

*) Steiner-Schröter's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Vierter Abschnitt.

Jeder Strahl g von Γ gehört also zu ∞^1 Regelschaaren des Gewindes, deren Leitschaaren 3 Sehnen von R^3 enthalten.

Der Bildkegelschnitt in (π_1) ist demnach ∞^1 Polardreiecken des Polarsystems von K_1^2 umgeschrieben.

Wenn L_1 auf K_1^2 liegt, so liegt er auch auf der Polare; also gehört l zur Regelschaar λ_0. Daraus folgt aber nicht, dass l ein Strahl von Γ ist. Vielmehr, wenn l eine Sehne von R^3 ist, welche zum Gewinde Γ gehört, so vereinigt sich l' mit l und die Ebenen Ll', L^*l' sind die Nullebenen von L und L^* in Bezug auf Γ und gehen durch l; also enthält die Sehne s den Punkt L^*, die s^* aber den L. Mithin kann die durch diese Sehnen s und s^* bestimmte der l zugehörige Sehnen-Regelschaar λ_0 nicht die l enthalten. 227

Demnach ist der Kegelschnitt K_1^2 von π_1, der in der jetzigen Betrachtung dem Gewinde Γ zugeordnet wird, verschieden von demjenigen, der ihm in Nr. 223 zugeordnet wurde und durch die Punkte gebildet wird, welche, in der Abbildung der Sehnen von R^3 in die Punkte von π_1, die Bilder der zu Γ gehörigen Sehnen von R^3 sind.

Wir haben auf diese Weise eine zweite Abbildung der ∞^5 Gewinde in die ∞^5 Kegelschnitte einer Ebene erhalten.

Es seien nun Γ', Γ'' zwei Gewinde in $\mathfrak{G}$, $K_1'^2$, $K_1''^2$ die ihnen zugeordneten Kegelschnitte in π_1; dann sind den ∞^2 Strahlen des Strahlennetzes $\Gamma'\Gamma''$ die ∞^2 Kegelschnitte entsprechend, welche zu (π_1) gehören und sowohl $K_1'^2$, als $K_1''^2$ harmonisch umgeschrieben sind. Sie bilden das quadratische System 2. Stufe, von dem am Ende von Nr. 224 gesprochen wurde. Sie sind auch den Kegelschnitten K_1^2 harmonisch umgeschrieben, welche den übrigen Gewinden Γ des Büschels $\Gamma'\Gamma''$ zugeordnet sind. Aus dem quadratischen Systeme 2. Stufe können wir offenbar 4 Kegelschnitte herausnehmen, die nicht demselben Netze angehören. Sie sind allen K_1^2 harmonisch umgeschrieben; folglich müssen diese eine Schaar bilden.

Während also bei der früheren Abbildung (Nr. 223) *den Gewinden eines Büschels die Kegelschnitte eines Büschels entsprechen, sind jetzt ihnen die Kegelschnitte einer Schaar zugeordnet.*

Oder kurz, die Bild-Kegelschnitte sind dort Curven *2. Ordnung*, jetzt Curven *2. Klasse;* so dass wir auf diesem Wege zu *den beiden dualen collinearen Abbildungen des Gewinde-Raums in den ebenen Kegelschnitte-Raum* gelangt sind.

Wiederholen wir deshalb in Kürze nochmals diese Abbildungen:

Die Sehnen-Congruenz einer cubischen Raumcurve R^3 ist collinear in ein Punktfeld abgebildet.

Den Sehnen von R^3, welche auch zu einem gegebenen Gewinde Γ gehören, entsprechen die Punkte eines Kegelschnitts, der das Bild von Γ in der ersten Abbildung ist.

Auch einer Geraden x entspricht ein Kegelschnitt, nämlich der, welcher dem Gebüsche $[x]$ entspricht.

Durchläuft x nun das Gewinde Γ, so sind die ∞^3 entsprechenden Kegelschnitte alle demselben Kegelschnitte harmonisch umgeschrieben: dieser Kegelschnitt ist das Bild von Γ in der zweiten Abbildung.

Das System sechster Stufe der Regelschaaren in einem Strahlengewinde.

228 Ein Gewinde Γ enthält ∞^6 Regelschaaren (Nr. 58). Wir fanden ferner (Nr. 64), dass seine ∞^3 Strahlen in ∞^2 *Dreh-Regelschaaren* (d. h. solchen, welche von Rotations-Hyperboloiden getragen werden) vertheilt sind, die alle mit dem Gewinde die Axe gemein haben. Aber die Bedingung, Rotationsfläche zu sein, ist nur eine doppelte und *es müssen deshalb ∞^4 von den Regelschaaren des Gewindes auf Rotations-Hyperboloiden liegen.* Es ergab sich ja (Nr. 121, 195), dass von den ∞^3 Regelschaaren in einem Strahlennetze ∞^1 auf einem Rotations-Hyperboloide liegen; nun enthält das Gewinde ∞^4 Netze, jede Regelschaar des Gewindes befindet sich aber in ∞^1 Netzen desselben: so gelangen wir auch zur Mannigfaltigkeit $4 + 1 - 1$ der Dreh-Regelschaaren im Gewinde. Es führt dies zu der Vermuthung, dass jede Gerade des Raumes Axe für mindestens eine Dreh-Regelschaar des Gewindes ist. Es giebt, wie wir wissen (Nr. 125), ∞^1 Gewinde, welche eine gegebene Gerade g zur Axe haben; sie bilden einen Büschel, für dessen Grund-Strahlennetz die Gerade g und die gemeinsame Gerade g_∞ der zu ihr normalen Ebenen Leitgerade sind; dadurch erhalten wir ∞^3 Dreh-Regelschaaren um die gegebene Gerade als Axe. Dieses dreifach unendliche System hat mit dem sechsfach unendlichen der Regelschaaren von Γ eine endliche Zahl gemein.

Wenn aber zwei Regelschaaren von Γ dieselben 2 Geraden zu Polaren haben, so werden diese von 2 Geraden der einen und 2 der andern, also von 4 Strahlen des Γ zugleich getroffen und sind demnach auch Polaren in Bezug auf Γ. Für 2 Dreh-Regelschaaren mit gemeinsamer Axe g sind diese und g_∞ polar; gehören sie also zu Γ, so kann dann g nur die Axe von Γ sein.

Jede von der Axe des Gewindes verschiedene Gerade ist nur für eine Dreh-Regelschaar desselben Axe.

Wir wollen unser sechsstufiges System von Regelschaaren aber 229
mehr nach projectiven Eigenschaften untersuchen.

Nach Nr. 89, 90 ist es für ein Strahlennetz eine doppelte Bedingung, durch einen gegebenen Strahl zu gehen, eine einfache, in einen gegebenen Strahlenbüschel einen Strahl zu senden. Jede Regelschaar kann man mit einem Strahle durch ein Strahlennetz verbinden, welches dann durch den Strahl und 3 Strahlen der Regelschaar bestimmt ist. Folglich werden in das Gewinde Γ seine ∞^6 Regelschaaren durch die ∞^6 Strahlennetze eingeschnitten, die durch irgend einen festen dem Γ selbst nicht angehörigen Strahl g_0 gelegt sind; *und es ist daher für eine zu Γ gehörige Regelschaar eine doppelte Bedingung, einen gegebenen Strahl von Γ zu enthalten, eine einfache, in einem gegebenen Büschel von Γ einen Strahl zu haben.**)

Wir können diese beiden Bedingungen *die Grundbedingungen für eine Regelschaar von Γ* nennen und wollen sie mit g, bezw. s bezeichnen.

Indem wir also $\beta = \alpha - 1$ von den α gegebenen Strahlen und sämmtliche gegebenen Büschel in Γ liegend annehmen, erhalten wir nach Nr. 90:

Die Zahl der Regelschaaren von Γ, welche durch β gegebene Strahlen von Γ gehen und in $6 - 2\beta$ gegebene Strahlenbüschel von Γ Strahlen senden, beträgt 1, 1, 2, 5, *wenn* $\beta = 3, 2, 1, 0$ *ist.*

Die beiden mittleren Zahlen lassen sich auch folgendermassen gewinnen.

Alle Regelschaaren, welche durch zwei gegebene Strahlen g_1, g_2 von Γ und einen Strahl eines Büschels (C_1, γ_1) von Γ gehen, gehören zu Γ; ihre Trägerflächen bilden einen Büschel, dessen Basis aus g_1, g_2 und den beiden g_1, g_2 treffenden Geraden durch C_1, bezw. in γ_1 besteht. Eine Fläche dieses Büschels geht also durch den Scheitel eines zweiten Büschels von Γ und ihre zu Γ gehörige Regelschaar führt diesem einen Strahl zu.

Wenn weiter von Γ nur ein Strahl g_1, aber 4 Strahlenbüschel $(C_1, \gamma_1), \ldots, (C_4, \gamma_4)$ gegeben sind, so entsteht in (C_1, γ_1) eine Projectivität mit zwei solchen Strahlen als entsprechenden, die von den beiden Geraden aus C_3, bezw. C_4 getroffen werden, welche g_1 und je

*) Für ein Strahlennetz von Γ hingegen ist ersteres nur einfache Bedingung und in jeden Strahlenbüschel von Γ sendet jedes zu Γ gehörige Netz von selbst einen Strahl.

den nämlichen Strahl von (C_2, γ_2) schneiden; die beiden zu sich selbst homologen Strahlen führen zu den beiden Regelschaaren von Γ, welche g_1 enthalten und in jeden der 4 Büschel einen Strahl liefern; denn jede Regelschaar von Γ, deren Trägerfläche durch den Scheitel eines Büschels von Γ geht (oder seine Ebene berührt), enthält einen Strahl dieses Büschels.

230 Interessanter aber dürfte es sein, wenn wir zu den 3 letzten Zahlen *mit Hilfe der eindeutigen Abbildung des Gewindes in den Punktraum* zu gelangen suchen, die im vorletzten Kapitel besprochen wurde.

Die Strahlen, Strahlenbüschel und Regelschaaren von Γ bilden sich, wie dort gefunden wurde, ab in Punkte, in Gerade, welche sich auf den Haupt-Kegelschnitt k_1^2 stützen, in Kegelschnitte, die ihn zweimal treffen. Also haben wir zu untersuchen, *wie viele Kegelschnitte es giebt, welche zweimal einen festen Kegelschnitt k^2*) schneiden, durch 2, 1, 0 gegebene Punkte gehen und 2, 4, 6 gegebene Geraden treffen, die sich auf k^2 stützen.*

Wenn zwei Punkte P_1, P_2 und zwei Gerade g_1, g_2 gegeben sind, so giebt es nur einen Kegelschnitt: er ist derjenige, in dem sich die beiden Flächen 2. Grades noch durchschneiden, welche durch k^2, P_1, P_2 und bezw. g_1, g_2 gelegt sind.

In den beiden andern Fällen wollen wir durch geeignete Wahl der Hauptgeraden u in Γ eine Vereinfachung herbeiführen: wir lassen sie einem der gegebenen Strahlenbüschel angehören; dann bilden sich alle Strahlen desselben in einen und denselben Punkt von k^2 ab, durch den also der gesuchte Kegelschnitt gehen muss.

Daher handelt es sich darum, *die Anzahl der Kegelschnitte zu ermitteln, welche durch einen festen Punkt P_0 von k^2 und 1, 0 andere gegebene Punkte gehen, k^2 nochmals treffen und ausserdem 3, 5 Geraden begegnen, die sich auf k^2 stützen.*

Sind ein Punkt P_1 und 3 Gerade g_1, g_2, g_3 gegeben, so erzeugen die durch P_0 und P_1 gehenden Kegelschnitte, welche g_1, g_2, g_3 treffen, eine Fläche 4. Ordnung; denn in jeder Ebene durch P_0P_1 liegt ein erzeugender Kegelschnitt, P_0P_1 selbst aber wird durch jede der beiden Treffgeraden von g_1, g_2, g_3, P_0P_1 zu einem Geradenpaare ergänzt, das zu den erzeugenden Curven gehört, und ist also doppelt auf der Fläche. Die Geraden g_1, g_2, g_3 gehören derselben einfach an, die Punkte P_0 und P_1 aber dreifach, denn jede Gerade durch einen von ihnen schneidet sie nur noch einmal. Folglich hat k^2 mit dieser Fläche, ausserhalb

*) Der Zeiger 1 ist der Einfachheit halber hier weggelassen.

g_1, g_2, g_3 und P_0, noch 2 Schnitte gemein; die erzeugenden Kegelschnitte, welche durch dieselben gehen, sind die gesuchten.

Die Ordnung der benutzten Fläche beweist, dass es durch 2 Punkte 4 Kegelschnitte giebt, welche 4 gegebene Geraden treffen.

Es sei nun blos P_0 auf k^2 gegeben, hingegen 5 Gerade $g_1, \ldots, g_5$, welche diese Curve treffen. Wir betrachten das Erzeugniss der Kegelschnitte, welche durch P_0 gehen, k^2 nochmals treffen und g_1, g_2, g_3, g_4 begegnen. Auf dieser Fläche ist k^2 dreifach, denn von den 4 Kegelschnitten, welche durch P_0 und einen bestimmten Punkt von k^2 gehen und die 4 Geraden schneiden, ist k^2 selbst einer. Jeder erzeugende Kegelschnitt, der mit der Ebene von k^2 einen Punkt ausserhalb k^2 gemein hat, muss sich zerspalten und mit seinem einen Bestandtheile in diese Ebene hineinfallen. Diese Geraden, welche den Schnitt der Ebene von k^2 vervollständigen, sind die Geraden aus P_0 nach den Spuren der beiden Geraden, welche $g_1, \ldots, g_4$ treffen. Die Fläche ist also 8. Ordnung und durch die 5 Punkte, in denen sie von g_5, ausser auf k^2, getroffen wird, gehen die gesuchten Kegelschnitte.

Unter den ∞^6 Regelschaaren von Γ befinden sich ∞^5 Paare von 231
Strahlenbüscheln, die dann (Nr. 10) einen Strahl gemeinsam haben. Sie werden durch solche Strahlennetze in Γ eingeschnitten, bei denen eine und infolge jede der beiden Leitgeraden u, v die Polare v', u' der andern nach dem Gewinde trifft; die beiden Strahlenbüschel sind dann (vu', uv'), (uv', vu') (vergl. Anm. auf S. 273). Dazu gehören auch diejenigen Strahlennetze, deren beide Leitgeraden sich in einen Strahl g_1 von Γ vereinigt haben: jede Ebene durch g_1 enthält einen Strahlenbüschel von Γ und einen vom Netze $[g_1, g_1]$; die Scheitel beschreiben auf g_1 projective Punktreihen und die sich selbst entsprechenden Punkte gehören zu gemeinsamen Büscheln.

Jeden Strahlenbüschel von Γ kann man mit jedem der ∞^2, die mit ihm einen Strahl gemeinschaftlich haben, paaren, also auch mit sich selbst; *daher enthält das ∞^6-System von Regelschaaren ∞^3 Doppelbüschel.*

In einem beliebigen Systeme 1. Stufe S_1 von Regelschaaren, die zu Γ gehören, befindet sich folglich kein Doppelbüschel. Es enthält aber eine endliche Zahl π von Strahlenbüschel-Paaren und eine endliche Anzahl von Regelschaaren, die in einen gegebenen Strahlenbüschel von Γ einen Strahl senden, oder die Bedingung s erfüllen; wir bezeichnen, wie es in der abzählenden Geometrie üblich ist, auch diese Zahl mit s.

Für das ∞^1-System der Trägerflächen — unter denen sich kein

Kegel oder Kegelschnitt befindet, da, beim allgemeinen Gewinde, keine Regelschaar in die Kantenreihe eines Kegels 2. Grades oder den Tangentenbüschel eines Kegelschnitts ausartet — ist s mit den zwei dualen Charakteristiken μ und ϱ gleich, nämlich sowohl mit der Zahl der Flächen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, den Scheitel des Strahlenbüschels der Bedingung s, als auch mit der Zahl der Flächen, die eine gegebene Ebene berühren, die dieses Büschels. Nennen wir, wie in Nr. 20, die dritte Charakteristik, d. i. die Zahl der Flächen des Systems, die eine gegebene Gerade berühren, ν, so geben die Formeln 3) der genannten Nr., welche für Systeme *ohne weitere Ausartungen* gelten und in denen also $\mu = \varrho = s$, $\varphi = \chi = 0$, $\psi = \pi$ zu setzen ist:

$$\pi = \nu = 2s.$$

In einem ∞^1-Systeme von Regelschaaren von Γ, das keinen Doppelbüschel enthält, ist sowohl die Zahl der in zwei Strahlenbüschel zerfallenden Regelschaaren, als auch die Zahl derjenigen, deren Trägerfläche eine gegebene Gerade berührt, doppelt so gross als die Anzahl der Regelschaaren, die einem gegebenen Büschel des Gewindes einen Strahl zusenden.

Die Zahl π ist leicht zu ermitteln.

Wir bestimmen nun S_1 dadurch, dass seine Regelschaaren 2, 1, 0 Gerade von Γ gemein haben und in 1, 3, 5 Strahlenbüschel von Γ Strahlen senden, oder, nach der symbolischen Bezeichnung der abzählenden Geometrie, durch die Bedingungen:

$$g^2 s, \quad g s^3, \quad s^5.$$

In keinem dieser Systeme ist ein Doppelbüschel vorhanden; da die gegebenen Geraden und Büschelscheitel nicht in dieselbe Ebene fallen.

Bei $g^2 s$, wo g_1, g_2, (C_1, γ_1) gegeben sind, haben wir zwei Strahlenbüschel-Paare: wir verbinden C_1 mit g_1 oder g_2 durch eine Ebene und den Nullpunkt dieser Ebene (in Bezug auf Γ) mit g_2 oder g_1; diese beiden Ebenen sind die Ebenen zweier ein Paar zusammensetzender Strahlenbüschel von Γ.

Bei $g s^3$, wo g_1, (C_1, γ_1), (C_2, γ_2), (C_3, γ_3) gegeben sind, giebt es 4 Paare, die auf zweierlei Weise zu stande kommen: wir verbinden g_1 mit einem der Scheitel und den Nullpunkt der Verbindungsebene mit den beiden andern Scheiteln; oder wir verbinden die 3 Scheitel und den Nullpunkt ihrer Ebene mit g_1.

Bei s^5 endlich verbinden wir 3 von den Scheiteln der 5 gegebenen Strahlenbüschel und den Nullpunkt der verbindenden Ebene mit den übrigen Scheiteln; dies führt zu 10 Strahlenbüschel-Paaren.

Demnach werden die Bedingungen $g^2 s^2$, $g s^4$, s^6 durch $\frac{1}{2} . 2 = 1$, $\frac{1}{2} . 4 = 2$, $\frac{1}{2} . 10 = 5$ Regelschaaren unseres Systems erfüllt.

So lange in einem Regelschaar-System kein Doppelbüschel vor- 232
handen, ist, wie wir eben fanden, die Zahl der Trägerflächen, welche die Bedingung ν erfüllen, (eine gegebene Gerade zu berühren) doppelt so gross als die derjenigen, die der s genügen. Solche Systeme sind noch s^5, $s^4 \nu$; dagegen in $s^3 \nu^2$, $s \nu^4$, ν^5 sind Doppelbüschel möglich. Wir fanden $s^6 = s^5\, s = 5$, also ist $s^5\, \nu = 10$; daraus folgt wiederum $s^4\, \nu^2 = 20$.

Weil, wegen $\mu = \varrho = s$, je die $i + k + 1$ Fälle $\mu^i \varrho^k \nu^{6-(i+k)}$, in denen $i + k$ denselben Werth hat, sich nicht unterscheiden, so *reduciren sich die 28 Charakteristiken* μ^6, $\mu^5 \varrho$, ... ϱ^6; $\mu^5 \nu$, $\mu^4 \varrho \nu$, ... *unseres in sich dualen Systems 6. Stufe der Trägerflächen der Regelschaaren von* Γ, *das* $\mathfrak{R}$ *heissen möge, auf die 7 folgenden:* s^6, $s^5 \nu$, $s^4 \nu^2$, $s^3 \nu^3$, $s^2 \nu^4$, $s \nu^5$, ν^6. Von ihnen haben wir die 3 ersten, welche $7 + 6 + 5 = 18$ Charakteristiken des allgemeinen Falles repräsentiren. Dieselben sind mehr als hinreichend, das System zu charakterisiren; denn Schubert hat dargethan,*) dass zwischen den 28 Charakteristiken stets 18 Beziehungen bestehen. Dieselben vermindern sich im vorliegenden Falle, eben wegen $\mu = \varrho = s$, auf folgende vier:

$$s^2 \nu^4 - 5 s^3 \nu^3 + 120 = 0, \; s \nu^5 - 5 s^2 \nu^4 + 10\, s^3 \nu^3 - 160 = 0,$$

$$\nu^6 - 5 s \nu^5 + 10 s^2 \nu^4 - 10 s^3 \nu^3 + 80 = 0, \; \nu^6 = s \nu^5;$$

wobei schon die Werthe für s^6, $s^5 \nu$, $s^4 \nu^2$ eingesetzt sind. *Sie ergeben:*

$$s^3 \nu^3 = 32, \; s^2 \nu^4 = s \nu^5 = \nu^6 = 40,$$

wozu wir der Vollständigkeit halber die 3 obigen fügen:

$$s^6 = 5, \; s^5 \nu = 10, \; s^4 \nu^2 = 20.$$

Eine interessante *Bestätigung* ergiebt sich dadurch, dass man die Zahl der Flächen von $\mathfrak{R}$, welche durch zwei beliebig gegebene Geraden gehen, unmittelbar kennt, nämlich 1, da die beiden Geraden und ihre beiden Polaren nach Γ (Nr. 58) die Leitschaar eindeutig bestimmen.

Nun hat Hurwitz den Modul x für die einer Fläche 2. Grades auferlegte Bedingung, durch eine gegebene Gerade zu gehen, d. h. ihren Ausdruck in den dreifachen Charakteristiken μ^3, ... gegeben.**) Bei unserem Systeme erhält er die einfachere Gestalt:

$$x = \tfrac{1}{2}(\nu^3 - 3 s \nu^2 + 4 s^2 \nu - 2 s^3).$$

*) Math. Annalen Bd. 10 S. 318 § 15.

**) Schubert, a. eben a. O. S. 345, 355; Kalkül der abzählenden Geometrie S. 65 und 77 Formel VII.

Wir erheben ihn symbolisch ins Quadrat, weil die Bedingung zweimal erfüllt werden soll, und erhalten:

$$x^2 = \tfrac{1}{4}(\nu^6 - 6s\nu^5 + 17s^2\nu^4 - 28s^3\nu^3 + 28s^4\nu^2 - 16s^5\nu + 4s^6);$$

die Einsetzung der obigen Werthe von $\nu^6, \ldots$ giebt in der That 1. Aber noch einfacher, eine Gerade scheidet aus Γ ein Strahlennetz aus und die Trägerflächen der Regelschaaren desselben bilden ein in sich duales lineares System 3. Stufe (Nr. 195), dessen 10 Charakteristiken $\mu^3, \ldots, \nu^3$ sich auf die vier: s^3, $s^2\nu$, $s\nu^2$, ν^3 reduciren mit den Werthen: $s^3 = 1$, $s^2\nu = 2$, $s\nu^2 = 4$, $s^3\nu^3 = 8$. Die Multiplication des Moduls x mit diesen Charakteristiken führt zu

$$\tfrac{1}{2}(s^3\nu^3 - 3s^4\nu^2 + 4s^5\nu - 2s^6), \quad \tfrac{1}{2}(s^2\nu^4 - 3s^3\nu^3 + 4s^4\nu^2 - 2s^5\nu), \ldots$$

welche, nach Substitution der Werthe der Charakteristiken unseres Systems $\mathfrak{R}$, gleich 1, 2, 4, 8 werden.

Durch zwei beliebige sich schneidende Geraden kann keine Fläche von $\mathfrak{R}$ gehen, da die Geraden der einen Schaar zu Γ gehören. Schubert hat auch für diese fünffache Bedingung den Modul z angegeben;*) er vereinfacht sich bei unserem Systeme auf:

$$z = \tfrac{1}{8}(\nu^5 - s\nu^4 + 2s^4\nu - 4s^5);$$

mit welcher sechsten Bedingung auch diese Bedingung multiplicirt wird, es muss sich 0 ergeben. Wir bestätigen es sofort für die beiden einfachen Bedingungen s und ν, welche, mit z symbolisch multiplicirt:

$$\tfrac{1}{8}(s\nu^5 - s^2\nu^4 + 2s^5\nu - 4s^6), \text{ bezw. } \tfrac{1}{8}(\nu^6 - s\nu^5 + 2s^4\nu^2 - 4s^5\nu)$$

geben; beide sind in der That 0; jede andere einfache Bedingung aber für eine Fläche von $\mathfrak{R}$ lässt sich linear durch s und ν darstellen.

233 *Das Hindurchgehen durch eine beliebige Gerade ist eine dreifache, das durch einen Strahl von Γ aber nur eine doppelte Bedingung für eine Fläche von* $\mathfrak{R}$; durch jene gehen ∞^3, durch diesen ∞^4 Flächen des Systems.

In ähnlicher Weise ist die Bedingung, dass zwei beliebige Geraden für eine Fläche des Systems Polaren seien, eine vierfache; sind die beiden Geraden l und l' aber polar nach dem Gewinde, so ist es nur eine zweifache, und es giebt in $\mathfrak{R}$ ∞^4, *welche sie erfüllen.*

Die 4 Geraden der Fläche, je zwei aus jeder Schaar, welche die eine von den beiden Geraden treffen, müssen auch die andere schneiden. Sind nun l und l' polar in Bezug auf Γ, so thun es bei einer Fläche von $\mathfrak{R}$ die beiden Geraden aus der zu Γ gehörigen Schaar von selbst.

*) im „Kalkül“ a. zuletzt a. O. Formel X.

Jede zwei Strahlen g, g' des zu Γ gehörigen Strahlennetzes $[l, l']$ führen zu einer Fläche; es seien d, d' die Diagonalen des von l, l', g, g' gebildeten windschiefen Vierseits, so haben das Gewinde Γ und das Netz $[d, d']$ eine Regelschaar gemeinsam, deren Trägerfläche zu $\mathfrak{R}$ gehört. Auf ihr liegt das Vierseit aus g, g', d, d'; also sind l, l', welche Diagonalen desselben sind, polar in Bezug auf die Fläche.

Es wird also auch noch möglich sein, den beiden doppelten Bedingungen zu genügen, dass die Fläche durch zwei gegebene Strahlen g_1, g_2 von Γ hindurch geht. Es giebt in der That eine Fläche in unserm ∞^6-Systeme, die dies thut und in Bezug auf welche l und l', die nach Γ polar sind, auch Polaren sind. Denn die Netze $[l, l']$ und $[g_1, g_2]$ haben 2 Gerade d, d' gemein. Wenn g, g' die Diagonalen des Vierseits der l, l', d, d' sind, welche also Strahlen von Γ sind, so gehören g, g', g_1, g_2 zu einer Regelschaar, nämlich derjenigen, in der Γ und $[d, d']$ sich durchschneiden. Die Trägerfläche enthält das Vierseit aus d, d', g, g'; also sind dessen Diagonalen l, l' polar in Bezug auf sie.

So ist insbesondere die Axe des Gewindes auch Axe für ∞^4 Flächen von $\mathfrak{R}$, von denen ∞^2 Rotationsflächen sind.

Collineationen und Correlationen, welche ein Gewinde in sich selbst überführen.*)

Eine beliebige *Collineation* zweier Räume transformirt offenbar die 234
6 Strahlengebüsche in sich selbst, für welche die Kanten ihres sich selbst entsprechenden oder *Haupttetraeders* die Axen sind, sowie die 15 Strahlennetze, welche je zwei dieser Kanten zu Leitgeraden haben; von welchen jedoch nur 3 allgemein sind.

Bei einer *Correlation* (Reciprocität) zweier Räume hat man ein *Hauptvierseit* (den Schnitt der beiden Kernflächen), dessen 4 Seiten die einzigen sich selbst entsprechenden Geraden sind: jede Ecke dieses Vierseits hat die Ebene der beiden von ihr ausgehenden Seiten zur entsprechenden Ebene und zwar in beiderlei Sinne, d. h. zu welchem der beiden Räume man auch die Ecke rechne; infolge dessen ent-

*) Man vergl.: Segre, Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale (Memorie dell' Accademia delle Scienze di Torino Ser. II Bd. 37, 1885), Caporali-del Pezzo a. a. O., Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie Bd. II (Leipzig 1891) S. 389, 401.

sprechen auch die beiden Diagonalen des Vierseits sich gegenseitig in beiderlei Sinne.*)

Demnach gehen die 4 Gebüsche, welche die Seiten des Hauptvierseits zu Axen, und die 3 allgemeinen Strahlennetze, welche zwei gegenüberliegende Seiten oder die Diagonalen zu Leitgeraden haben, durch die Correlation in sich selbst über.

Wenn ein allgemeines Gewinde Γ durch eine Collineation oder Correlation in sich selbst transformirt wird, so entsteht in ihm eine eindeutige Correspondenz der Strahlen x und x_1, bei welcher einem Büschel von Strahlen x oder x_1 ein Büschel von Strahlen x_1 oder x entspricht. Demnach haben alle 4 Zahlen, welche beim Correspondenz-Princip im Gewinde (Nr. 206) auftreten, den Werth 1; und es ergeben sich 4 sich selbst entsprechende Strahlen.

Bei der Collineation müssen dies 4 solche Kanten des Haupttetraeders $\mathfrak{H}$ sein, welche ein windschiefes Vierseit bilden; da andere Gruppirungen von 4 Kanten eines Tetraeders nicht in einem Gewinde möglich sind. Die beiden übrigen Kanten sind daher, weil gemeinsam von jenen getroffen, polar in Bezug auf Γ.

Ein allgemeines Strahlengewinde, das durch eine Collineation in sich selbst transformirt wird, geht durch eins der 3 Kantenvierseite des Haupttetraeders der Collineation und hat die beiden übrigen Kanten zu Polaren.

Ein allgemeines Gewinde, das durch eine Correlation in sich selbst übergeht, enthält das Hauptvierseit derselben.

Jede der linearen Transformationen der einen Art giebt, mit dem Nullsystem des Gewindes verbunden, eine Transformation der andern Art, die ebenfalls das Gewinde in sich selbst überführt, wenn die erstere es thut.

235 Legt man bei einer beliebigen *Collineation* durch eins der Kantenvierseite des Haupttetraeders $\mathfrak{H}$ ein Gewinde, so geht das entsprechende im andern Raume durch das nämliche Vierseit. Alle Gewinde durch das Vierseit bilden einen Büschel, für dessen Grund-Netz die beiden übrigen Kanten Leitgeraden sind; in demselben entsteht also durch die entsprechenden Gewinde eine Projectivität; die beiden sich selbst entsprechenden Elemente sind, im allgemeinen, die Strahlengebüsche.

Eine beliebige Collineation transformirt kein allgemeines Gewinde in sich selbst.

Hat aber eine Collineation die Eigenschaft, dies zu thun, dann

*) Schröter, Journal für Mathematik Bd. 77 S. 105 Abschnitt B.

hat die Projectivität in dem Büschel von Gewinden durch dasjenige Kantenvierseit von $\mathfrak{H}$, durch welches das in sich selbst transformirte Gewinde geht, drei sich selbst entsprechende Elemente.

*Wenn mithin eine Collineation ein allgemeines Gewinde in sich selbst überführt oder unverändert lässt,**) wie es auch erlaubt sein mag zu sagen, *so thut sie es mit allen Gewinden, die durch das nämliche Kantenvierseit ihres Haupttetraeders gehen wie jenes.* —

Die Gewinde, welche durch das Hauptvierseit $\mathfrak{h}$ einer *Correlation* gehen, haben das Strahlennetz mit den Diagonalen desselben als Leitgeraden gemein, also gehen die beiden Gebüsche nicht in sich selbst, sondern jedes in das andere, mithin involutorisch in einander über. Die Projectivität, die ersichtlich auch hier sich ergiebt, ist eine Involution, und die Doppelelemente sind allgemeine Gewinde.

Jede Correlation lässt zwei allgemeine Gewinde Γ' und Γ'' unverändert. Dieselben haben das Strahlennetz gemein, das die Diagonalen des Hauptvierseits zu Leitgeraden hat.

Die übrigen Gewinde durch dieses Netz entsprechen sich zu je zweien involutorisch; die beiden Gebüsche bilden ein Paar dieser Involution $\mathfrak{J}$.

Verbindet man jede der ∞^{15} Correlationen mit dem Nullsysteme des einen oder andern Gewindes, das sie in sich überführt, so erhält man alle Collineationen, welche Gewinde in sich selbst transformiren und zwar jede, da sie ∞^1 Gewinde unverändert lässt, ∞^1-mal, also nur ∞^{14} Collineationen.

Demnach ist es eine einfache Bedingung für eine Collineation, ein Gewinde in sich selbst zu transformiren.

Umgekehrt, verbindet man jede dieser ∞^{14} Collineationen mit jedem der Nullsysteme der Gewinde, die sie unverändert lassen, so erhält man alle ∞^{15} Correlationen.

Diese Ergebnisse erinnern durch ihre Gleichartigkeit an die Sätze *über Collineationen und Correlationen, welche Flächen 2. Grades in sich selbst transformiren.***) 236

Eine beliebige *Collineation* führt keine allgemeine Fläche 2. Grades in sich selbst so über, dass jede der beiden Geradenschaaren in sich selbst übergeht.

Wenn aber eine allgemeine Fläche 2. Grades durch eine Collineation in dieser Weise in sich transformirt wird, dass jede der beiden

*) natürlich nicht Strahl für Strahl.

**) Mathem. Annalen Bd. 26 S. 465 Erster Theil II und V. Man vergl. auch Voss, ebenda Bd. 13 S. 320 und Zeuthen Bd. 18 S. 33, Bd. 26 S. 247.

Schaaren in sich selbst übergeht, — man nennt die Collineation in diesem Falle eine eigentliche Hermite'sche Transformation —, dann geht die Fläche durch ein Kantenvierseit des Haupttetraeders, und alle Flächen 2. Grades, welche dies Vierseit enthalten, werden ebenfalls in sich transformirt.

Jede beliebige *Correlation* führt zwei allgemeine Flächen 2. Grades so in sich selbst über, dass jede der beiden Geradenschaaren in sich selbst übergeht; dieselben schneiden sich im Hauptvierseite, und die übrigen Flächen 2. Grades, welche durch dies Vierseit gehen, entsprechen sich in der Correlation involutorisch zu je zweien, darunter auch die beiden Ebenenpaare.

Der Zusammenhang der einen Sätze mit den andern ist leicht zu erkennen.

Es seien A, B, C, D die Ecken des Haupttetraeders einer *Collineation*, welche ein allgemeines Gewinde Γ in sich selbst transformirt, und $ABCD$ sei das Kantenvierseit, durch welches Γ geht. Γ enthält also das Strahlennetz $[AC, BD]$. Mit den beiden andern Strahlennetzen $[AB, CD]$, $[AD, BC]$, welche sich, wie wir wissen, selbst entsprechen, hat es je eine Regelschaar gemein; diese beiden Regelschaaren, von denen die eine sich auf die Gegenseiten AB, CD des Vierseits stützt und durch die andern AD, BC geht, die andere sich umgekehrt verhält, entsprechen sich selbst. Sie gehören; da Γ allgemein ist, nach Nr. 58 zu zwei verschiedenen Flächen 2. Grades, die im Vierseit $ABCD$ sich schneiden und durch die Collineation in sich selbst übergeführt werden.

Die übrigen Gewinde, welche durch die Seiten von $ABCD$ gehen und, wie wir gefunden haben, auch durch die Collineation in sich übergeführt werden, liefern nach und nach den ganzen Büschel von Flächen durch $ABCD$, und zwar jedes zwei.

Umgekehrt, wenn eine Collineation eine Fläche 2. Grades auf die mehrfach erwähnte Weise in sich selbst transformirt, also eine eigentliche Hermite'sche Collineation und $ABCD$ das auf der Fläche gelegene Kantenvierseit von $\mathfrak{H}$ ist, so sei g eine Gerade der einen ihrer beiden Regelschaaren, etwa derjenigen, die sich auf AB, CD stützt. Sie bestimmt mit dem Netze $[AC, BD]$, zu welchem AD, BC gehören, ein Gewinde Γ, das folglich die ganze Regelschaar (g, AD, BC) unserer Fläche enthält; weil dieselbe nach der Voraussetzung in sich selbst übergeht, so befindet sich auch die der g durch die Collineation entsprechende Gerade g_1 in ihr und in Γ; folglich ist das dem Γ entsprechende Gewinde mit Γ identisch, da beide das sich selbst entsprechende Netz $[AC, BD]$ und diese g_1 gemeinsam haben. Die

andere Schaar der Fläche führt zu einem zweiten Gewinde, das in sich übergeht und diese Schaar enthält.

Die übrigen Flächen 2. Grades durch $ABCD$ geben die weiteren Gewinde, welche von der Collineation unverändert gelassen werden, und zwar jede zwei.

Jede Collineation, welche ein und infolge dessen ∞^1 *Gewinde unverändert lässt, lässt auch* ∞^1 *Flächen 2. Grades unverändert, und zwar so, dass jede der beiden Schaaren in sich selbst übergeht, ist also eine eigentliche Hermite'sche Collineation; und umgekehrt. Die* ∞^1 *Flächen 2. Grades bilden einen Büschel (oder eine Schaar)* $\mathfrak{B}(F)$, *der durch ein Kantenvierseit des Haupttetraeders der Collineation geht. Die Gewinde bilden ebenfalls einen Büschel* $\mathfrak{B}(\Gamma)$, *dessen Grundnetz durch die Seiten dieses Vierseits bestimmt wird und seine Diagonalen zu Leitgeraden hat.*

Zwischen den beiden Büscheln besteht eine Correspondenz [2, 2] *von der Art, dass jedes Gewinde von* $\mathfrak{B}(\Gamma)$ *die einen Regelschaaren von 2 Flächen von* $\mathfrak{B}(F)$ *enthält, jede Fläche aber von* $\mathfrak{B}(F)$ *ihre beiden Regelschaaren in zwei Gewinden von* $\mathfrak{B}(\Gamma)$ *hat.*

Die beiden einem Gewinde entsprechenden und in ihm enthaltenen Regelschaaren haben, weil sich die eine auf AB, CD, die andere auf AD, BC stützt und ihren Trägerflächen das Vierseit $ABCD$ gemeinsam ist, keine Geraden gemein; dies gilt also auch für die je mit ihnen verbundenen.

Dieselben gehen natürlich auch durch die Collineation in sich selbst über; ferner, da jene demselben Gewinde angehören, so thun es, nach Nr. 98, auch diese, und da sie keine Gerade gemein haben, so bestimmen sie dies Gewinde und dasselbe entspricht sich auch selbst und gehört zu $\mathfrak{B}(\Gamma)$. Die Correspondenz ist daher so beschaffen, dass dieselben Flächen von $\mathfrak{B}(F)$, die einem Gewinde von $\mathfrak{B}(\Gamma)$ wegen ihrer einen Regelschaaren entsprechen, einem andern Gewinde von $\mathfrak{B}(\Gamma)$ wegen ihrer andern Regelschaaren correspondiren.

Die Correspondenz [2, 2] *ist daher eine Projectivität zweier bezw. in* $\mathfrak{B}(F)$ *und* $\mathfrak{B}(\Gamma)$ *befindlichen Involutionen* (Nr. 17).

Wenn wir die Ebenen DAB, ABC, ... mit α, β, γ, δ bezeichnen, so enthält $\mathfrak{B}(F)$ die Ebenen-Punkte-Paare (α, γ; B, D) und (β, δ; A, C). Die Regelschaaren des ersteren sind die Strahlenbüschel-Paare: (B, α), (D, γ); (B, γ), (D, α). Beide Büschel-Paare befinden sich im Gebüsche [BD] von $\mathfrak{B}(\Gamma)$; ebenso die der andern ausgearteten Fläche von $\mathfrak{B}(F)$ in [AC]. Die beiden Elemente jedes der beiden Büschel, welche einem der ausgearteten Elemente des andern entsprechen, haben sich in einem der ausgearteten Elemente des ersteren vereinigt. Folglich sind die ausgearteten Elemente der beiden Büschel die Doppel-

elemente der projectiven Involutionen und die einen entsprechen den andern in der Projectivität. —

Aehnlich findet man, dass die einen Regelschaaren ϱ_1, ϱ_2, der beiden Flächen F_1, F_2, welche eine beliebige *Correlation* unverändert lässt, in dem einen Γ' von den beiden Gewinden, welche durch sie in sich selbst transformirt werden, die andern λ_1, λ_2 in dem andern Γ'' sich befinden; ϱ_1 und λ_2 sind in dem einen der beiden Strahlennetze $[AB, CD]$ und $[AD, BC]$, welche die Gegenseiten des Hauptvierseits zu Leitgeraden haben, ϱ_2 und λ_1 im andern enthalten.

Verbindet man das Nullsystem von Γ' mit der Correlation, so erhält man eine Collineation, welche Γ' und ϱ_1, ϱ_2 unverändert lässt, also auch λ_1, λ_2 und demnach auch Γ''; die beiden Gewinde Γ', Γ'' sind daher in der Involution $\mathfrak{J}$ (Nr. 235) im Büschel gepaart. Folglich muss das Nullsystem von Γ' das andere Gewinde Γ'' in sich selbst überführen; *die beiden Gewinde Γ' und Γ'' stützen sich also auf einander;* was aber schon daraus folgt, dass sie zu den Gebüschen des Büschels, als die Doppelelemente der Involution, harmonisch sind.

237 Jede der ∞^{15} Correlationen führt, im allgemeinen, eine endliche Zahl von Gewinden in sich über; es giebt ∞^{14} Collineationen, welche Gewinde in sich transformiren und zwar je ∞^1. Andererseits giebt es ∞^5 Gewinde. *Also muss jedes Gewinde durch ∞^{10} Collineationen oder Correlationen in sich selbst übergeführt werden.* Dies lässt sich leicht direct erkennen.

Ein besonders einfacher und interessanter Fall der Bestimmung eines Gewindes durch 5 Strahlen ist der, in welchem dieselben ein windschiefes Fünfeck bilden (Nr. 47, 58). Jede Collineation oder Correlation, welche ein Gewinde unverändert lässt, führt irgend ein Fünfseit desselben in ein anderes über. Sie ist durch das Entsprechen der Ecken der beiden Fünfseite, bezw. der Ecken des einen und der Ebenen des andern festgelegt. Nun besitzt jedes Gewinde ∞^{10} solche Fünfseite (Nr. 51). Lässt man also einem festen Fünfseite des gegebenen Gewindes nach und nach die übrigen entsprechen, so erhält man die sämmtlichen Collineationen oder Correlationen, welche das Gewinde in sich selbst transformiren.

Fällt das bewegliche Fünfseit mit dem festen zusammen, so ergiebt sich die Identität, bezw. das Nullsystem des Gewindes. —

Unter den Γ in sich selbst transformirenden Collineationen befinden sich auch die ∞^2, welche durch *eine Schraubenbewegung um die Axe* entstehen. Von dem Kantenvierseit der sich selbst entsprechenden Strahlen des Gewindes sind dann zwei Gegenecken im unendlich

fernen Punkte der Axe vereinigt, die andern liegen in den absoluten Punkten der zur Axe normalen Ebenen.

Die ∞^{10} Collineationen oder Correlationen, welche ein Gewinde oder Nullsystem in sich transformiren, transformiren auch jede der ∞^7 cubischen Raumcurven, zu denen, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, das Nullsystem gehört, in sich selbst; also wird jede durch ∞^3 in sich selbst transformirt.*)

Wenn ein Gewinde, das durch eine *Collineation* in sich selbst 238
übergeht, wie oben das Kantenvierseit $ABCD$ des Haupttetraeders enthält, so gehen nur 5 ihm zugehörige Strahlennetze in sich selbst über: die 4, welche die 4 Seiten des Vierseits je zur (einzigen) Leitgeraden haben, und das Netz $[AC, BD]$; auch bei letzterem entspricht jede der beiden Leitgeraden sich selbst. Es giebt kein Strahlennetz im Gewinde, das zwei getrennte Leitgeraden besitzt und welches dadurch in sich selbst durch die Collineation übergeführt wird, dass die Leitgeraden sich gegenseitig in beiderlei Sinne entsprechen; denn da sie polar sind in Bezug auf das Gewinde und sein Nullsystem, so würde jede von ihnen in der Correlation, welche durch Combination der Collineation mit diesem Nullsysteme entsteht, sich selbst entsprechen, also da diese auch das Gewinde in sich transformirt, als Seite des Hauptvierseits dem Gewinde angehören.

Ebenso sind in jedem der beiden Gewinde Γ', Γ'', die bei einer *Correlation* in sich selbst übergehen, nur die vier Strahlennetze, welche die Seiten des Hauptvierseits je zur einzigen Leitgeraden haben, und das zu Γ' und Γ'' gehörige Strahlennetz $[AC, BD]$ zu sich selbst homolog, letzteres hier deshalb, weil die Leitgeraden sich gegenseitig in beiderlei Sinne entsprechen.

Wenn eine Collineation oder Correlation ein Gewinde unver- 239
ändert lässt, so transformirt sie auch das Nullsystem desselben in sich, d. h. zwei entsprechende Elemente desselben in ebensolche.

Folglich ist nach Nr. 175 bei der Combination jener Transformation mit dem Nullsysteme erstens die Reihenfolge, in der sie auf einander folgen, gleichgiltig. Zweitens aber wird nach dem nämlichen Satze auch umgekehrt die Transformation durch das Nullsystem in sich übergeführt.

Wenn daher ein Polarsystem $\mathfrak{P}$ das Gewinde Γ in sich selbst überführt, so muss das Nullsystem von Γ auch $\mathfrak{P}$ und seine Basisfläche

*) Dies ist direct bewiesen: Math. Annalen Bd. 26 S. 489.

in sich selbst überführen. Wenn aber ein Nullsystem eine Fläche 2. Grades in sich selbst transformirt, so besteht die eine Regelschaar derselben aus lauter Leitstrahlen des Nullsystems oder, was dasselbe ist, aus Strahlen des Gewindes.

In der That, weil die Fläche in sich selbst übergeht, so wird sie von der Nullebene jedes ihrer Punkte berührt, und da diese durch den Punkt geht, so muss sie eine der Geraden der Fläche enthalten, die in ihm sich schneiden. Also ist diese Gerade ein Strahl von Γ. Nehmen wir 5 beliebige Punkte der Fläche, so müssen mindestens 3 von den ihnen so zugehörigen Strahlen von Γ der nämlichen Schaar angehören; woraus dann folgt, dass diese Schaar ganz zu Γ gehört.

Umgekehrt, wenn ϱ eine zu Γ gehörige Regelschaar ist, so transformirt das Polarsystem ihrer Trägerfläche oder, wie wir kürzer sagen wollen, ihr Polarsystem $\mathfrak{P}$ das Gewinde Γ in sich selbst. Denn in $\mathfrak{P}$ entsprechen alle Strahlen der ϱ selbst, so wie ihrer Leitschaar λ sich selber; λ enthält aber auch zwei Strahlen des Gewindes (Nr. 58). Durch ϱ und diese zwei Geraden ist aber Γ bestimmt.

Die Polarsysteme der ∞^6 Regelschaaren eines Gewindes transformiren es in sich selbst, und nur diese Polarsysteme.

Wir sagten von zwei Gewinden, dass sie in Involution sind oder sich stützen, wenn das Nullsystem des einen und, wie sich dann ergab, jedes der beiden Nullsysteme das andere Gewinde in sich selbst überführt (Nr. 106).

Jedes Polarsystem transformirt also ∞^2 Gewinde in sich selbst, welche 2 Netze bilden, deren Grund-Regelschaaren von der Basisfläche des Polarsystems getragen werden.

Jede dieser beiden Regelschaaren und irgend 2 Polaren des Polarsystems treffen dieselben 2 Geraden der andern Regelschaar und gehören also zu ∞^1 von diesen Gewinden, die einen Büschel bilden.

Die Nullsysteme, welche ein Gewinde Γ in sich selbst überführen, sind — abgesehen vom eigenen — *diejenigen der ∞^4 Gewinde, die sich auf Γ stützen.*

Umgekehrt, jedes Nullsystem transformirt — ausser dem eigenen Gewinde Γ — *die ∞^4 Gewinde in sich, die das auf Γ sich stützende Gewebe bilden.*

In jedem der ∞^4 Büschel von Gewinden, die von Γ ausgehen, befindet sich ein solches Gewinde Γ'. Die windschiefe Involution, welche die Leitgeraden des Grund-Strahlennetzes des Büschels zu Axen hat, ist das Product der beiden Nullsysteme von Γ und Γ' (Nr. 176).

Verbindet man demnach die ∞^4 Nullsysteme, welche Γ in sich selbst

transformiren, mit dem von Γ, so ergeben sich die ∞^4 windschiefen Involutionen, welche den in Γ enthaltenen Strahlennetzen zugehören und also zwei in Bezug auf Γ polare Geraden zu Axen haben. Diese Involutionen führen Γ in sich selbst über.

Direct erkennt man dies daraus, dass zwei Strahlen von Γ, welche sich mit zwei polaren Geraden l, l' in einer Regelschaar befinden, sie harmonisch trennen (Nr. 57) und sich deshalb in der windschiefen Involution entsprechen, die l und l' zu Axen hat. Also wird durch dieselbe jeder Strahl von Γ in einen andern transformirt.

Verbindet man zwei Gewinde Γ' und ihre Nullsysteme, so muss sich ebenfalls eine windschiefe Involution ergeben, welche Γ in sich transformirt. Die Axen dieser Involution, als Axen der zwei Gebüsche in einem Büschel, der sich auf Γ stützt, befinden sich in Γ.

Es handelt sich daher um die ∞^6 windschiefen Involutionen, für welche irgend zwei Strahlen von Γ Axen sind.

Wir stellen die allgemeine Frage nach den Collineationen mit 240
Axen (Nr. 81), welche ein gegebenes Gewinde Γ in sich selbst transformiren. Eine solche Collineation muss dann auch durch das Nullsystem von Γ in sich selbst übergeführt werden, also entweder jede der beiden Axen in sich selbst, oder jede in die andere. Im ersteren Falle gehören die beiden Axen zu Γ, im zweiten sind sie polar in Bezug auf Γ.

Wenn demnach eine Collineation mit Axen ein Gewinde in sich selbst transformirt, so gehören entweder beide Axen zum Gewinde oder sind zu einander polar nach ihm.

Alle Collineationen mit Axen, welche beide zu Γ gehören, thun es.

Denn sind g', g'' die Axen und g ein beliebiger Strahl von Γ, so gehört der ihm in der Collineation entsprechende zur Regelschaar $(g'g''g)$ und damit zu Γ.

Zu zwei Axen gehören ∞^1 Collineationen; *also giebt es ∞^7 Collineationen dieser Art, unter ihnen die obigen ∞^6 windschiefen Involutionen.*

Aber nicht alle ∞^5 Collineationen mit Axen, welche in Bezug auf Γ polar sind, transformiren Γ in sich selbst, sondern nur die ∞^4 windschiefen Involutionen unter ihnen.

Sind nämlich l und l' polar in Bezug auf Γ, so gehört von den Strahlen, die einem Strahle g von Γ in den verschiedenen Collineationen entsprechen, die l und l' zu Axen haben, — welche Strahlen die Regelschaar $(ll'g)$ erfüllen — nur der in Bezug auf l und l' harmonische Strahl, d. i. der, welcher dem g in der windschiefen Involution (l, l') entspricht, ebenfalls zu Γ (Nr. 57).

Wenn Γ_1', Γ_2' zwei Gewinde sind, welche einander und Γ stützen, so wissen wir aus Nr. 178, dass die windschiefe Involution der ersteren Art, die zu ihrem Büschel und den in Γ befindlichen Leitgeraden seines Grund-Strahlennetzes gehört, das Nullsystem von Γ und das Polarsystem der Regelschaar, welche Γ mit diesem Strahlennetze gemeinsam hat, so mit einander verbunden sind, dass jede von diesen 3 Transformationen das Product der beiden andern ist. Da es nun zu jeder Regelschaar von Γ in dem Netze von Gewinden, dessen Basis sie ist, einen Büschel giebt, der sich auf Γ stützt (Nr. 131), so *stehen die ∞^6 Polarsysteme, welche Γ in sich selbst überführen, und die ∞^6 windschiefen Involutionen mit in Γ liegenden Axen, für welche dasselbe gilt, in einer eindeutigen Beziehung von der Beschaffenheit, dass von zwei entsprechenden Transformationen jede durch Multiplication mit dem Nullsysteme von Γ aus der andern sich ergiebt.*

Auch hier haben wir eine interessante Analogie zu den Sätzen über Flächen 2. Grades, welche in sich selbst transformirt werden.*) Eine gegebene Fläche 2. Grades wird sowohl durch jede Collineation mit Axen, die auf ihr liegen, als auch durch jede windschiefe Involution, deren Axen in Bezug auf sie polar sind, in sich selbst übergeführt.

Hingegen bezüglich der Polarsysteme haben wir im vorliegenden Falle ein anderes Ergebniss als bei den Flächen 2. Grades.

Bei einem Gewinde oder Nullsysteme giebt es nur eine einzige — sechsfach unendliche — Mannigfaltigkeit von Polarsystemen, welche das Gewinde in sich transformiren oder von denen jedes durch das Nullsystem in sich transformirt wird.

Liegt aber eine Fläche 2. Grades oder ein Polarsystem vor, so giebt es zwei verschiedene Mannigfaltigkeiten, eine vierfach und eine dreifach unendliche, von Polarsystemen, die das gegebene in sich selbst überführen, oder von denen jede durch das gegebene in sich selbst übergeführt wird.**)

Jede Collineation mit Axen transformirt ∞^3 Gewinde in sich selbst, die ein Gebüsche bilden mit den beiden Axen als Grundgeraden.

Dasselbe gilt also auch für eine windschiefe Involution; dieselbe transformirt aber auch noch ∞^1 andere Gewinde, die einen Büschel bilden, dessen Grund-Netz die Axen zu Leitgeraden hat.

241 Noch allgemeiner, als die Collineationen mit Axen, sind *diejenigen*

*) Math. Annalen Bd. 26 S. 475.

**) a. a. O. S. 480; del Pezzo, Sulle quadriche polari reciproche di se stesse rispetto ad un' altra. Rendiconti dell' Accademia di Napoli Juni 1885.

speciellen Collineationen, welche eine gerade Punktreihe u von lauter sich selbst entsprechenden Punkten und zwei weitere sich selbst entsprechende Punkte, A, B besitzen und infolge dessen einen Ebenenbüschel von lauter sich selbst entsprechenden Ebenen um $v \equiv AB$ *und zwei einzelne sich selbst entsprechende Ebenen* $uA \equiv \beta$, $uB \equiv \alpha$.

Eine solche Collineation besitzt ∞^2 Haupttetraeder, welche alle die Ecken A, B, die Ebenen α, β und die Gegenkanten u, v gemein haben, während eine Collineation mit Axen deren ∞^4 hat.

Wenn das Gewinde Γ durch eine derartige Collineation in sich selbst transformirt wird, so muss also ein Kantenvierseit eines der Haupttetraeder ihm angehören.

Es seien erstens die gemeinsamen Gegenkanten u, v aller Haupttetraeder zwei Gegenseiten dieses Vierseits, und g ein u treffender Strahl von Γ; der ihm entsprechende Strahl g_1 trifft u in demselben Punkte wie g; also befindet er sich, weil er auch zu Γ gehört, in dem Complex-Strahlenbüschel aus dem Punkte ug in der Ebene ug; folglich entspricht diese Ebene sich selbst, und so jede Ebene durch u und also auch jeder Punkt auf v. Folglich ist die Collineation eine solche mit Axen.

Nehmen wir nun an, dass in einem dem Gewinde Γ angehörigen Vierseite $ABCD$ u und v die Diagonalen CD, AB und also polar in Bezug auf Γ sind; dann giebt es unter den ∞^3 Collineationen, für welche A, B, C, D sich selbst entsprechende Punkte sind, ∞^2, welche noch einen dritten und damit ∞^1 sich selbst entsprechende Punkte auf u haben: es wird der Collineation nur die einfache Bedingung auferlegt, dass der Punkt, der einem dritten gegebenen Punkte von u entspricht, in einer durch diesen Punkt gehenden gegebenen Ebene liegt. Unter diesen ∞^2 Collineationen giebt es ∞^1, welche die Regelschaar von Γ, die sich auf zwei Gegenseiten von $ABCD$ stützt, in sich selbst transformirt, d. h. einen gegebenen Punkt der Trägerfläche in einen beliebigen andern. Diese Collineationen führen also Γ (und alle durch $ABCD$ gehenden Gewinde) in sich selbst über, weil das Vierseit und diese Regelschaar.

In ihnen sind nun alle Geraden aus A oder B, welche u treffen, sich selbst entsprechend; dieselben gehören aber auch dem Γ an, so dass das Gewinde ∞^2 solche sich selbst entsprechende Vierseite enthält.

Da wir nun ∞^4 Paare in Bezug auf Γ polarer Geraden u, v haben, bei jedem Paare auf ∞^2 Weisen 2 Punkte A, B auf der einen, v, wählen können und dann noch je ∞^1 Collineationen möglich sind, so *giebt es* ∞^7 *das Gewinde* Γ *in sich selbst transformirende Collineationen*

dieser besondern Art mit einer sich selbst entsprechenden Punktreihe und einem sich selbst entsprechenden Ebenenbüschel, welche von Geraden getragen werden, die nach Γ polar sind.

Unter ihnen befinden sich die ∞^4 windschiefen Involutionen; und diese allein sind Collineationen mit Axen.

Ferner aber *gehören zu ihnen auch die ∞^1 Rotationen des Gewindes um seine Axe* (mit beliebiger Grösse des Drehwinkels);*) u und v sind in diesem Falle die Axe und die unendlich ferne Gerade der zu ihr senkrechten Ebenen, A, B die beiden absoluten Punkte auf dieser Geraden, welche, so wie die nach ihnen gehenden und die Axe senkrecht schneidenden, zum Gewinde gehörigen Geraden von der Drehung nicht beeinflusst werden.

Hingegen alle das Gewinde Γ in sich transformirenden Collineationen dieser besondern Art, bei denen der Träger u der sich selbst entsprechenden Punktreihe und die Axe v des sich selbst entsprechenden Ebenenbüschels dem Gewinde angehören, sind Collineationen mit Axen; d. h. auch v trägt eine sich selbst entsprechende Reihe und u einen sich selbst entsprechenden Büschel. Ihre Mannigfaltigkeit ist die nämliche, ∞^7.

242 Es erübrigt noch zu untersuchen, ob und wie ein Gewinde durch eine Homologie (perspective Collineation), d. h. eine Collineation mit einem Bündel und einem Felde von lauter sich selbst entsprechenden Elementen**) in sich selbst transformirt werden kann.

Geschieht dies, dann muss, weil jede Ebene durch das Centrum O der Homologie — den Scheitel des genannten Bündels — sich selbst entspricht, auch ihr Nullpunkt sich selbst correspondiren, und weil doch nur eine von diesen Ebenen ihn im Centrum haben kann, so müssen diese Nullpunkte die Ebene ω der Homologie — die Trägerebene des genannten Feldes — erfüllen; folglich ist die Ebene ω die Nullebene des Centrums und geht durch dasselbe.

Eine beliebige Homologie, deren Centrum O und Ebene ω nicht incidiren, kann ein allgemeines Gewinde nicht in sich selbst transformiren.

Umgekehrt aber, *jede specielle Homologie, bei welcher Centrum O und Ebene ω incident und in irgend einen Punkt des Raumes und seine Nullebene in Bezug auf ein gegebenes Gewinde gelegt sind, lässt dasselbe unverändert.*

Denn der Punkt, in dem ein beliebiger Strahl g des Gewindes die Ebene ω trifft, ist der Nullpunkt der Ebene, welche g mit O ver-

*) del Re, Giornale di Matematiche Bd. 28 S. 267.

**) Reye, Geometrie der Lage II S. 27.

bindet; folglich gehört der ganze Strahlenbüschel, den beide bestimmen, zum Gewinde; weil aber der dem g in der Homologie entsprechende Strahl g_1 durch den Punkt $g\omega$ gehen und in der Ebene gO liegen muss, da diese sich selbst entsprechen, so muss er auch in jenem Büschel und daher auch im Gewinde sich befinden.

Sind aber von einer Homologie Centrum und Ebene gegeben, so ist sie erst festgelegt, wenn noch zu einem Punkte der entsprechende gegeben ist und zwar auf dem Strahle, der jenen mit dem Centrum verbindet, also sind noch ∞^1 Homologien möglich mit gegebenem Centrum und gegebener Ebene.

Ein gegebenes Gewinde wird daher von ∞^4 Homologien der speciellen Art, bei denen Centrum und Ebene incidiren, in sich selbst transformirt.

Unter diesen Homologien befinden sich auch die ∞^1 Translationen parallel der Axe; sie sind mit denen identisch, bei welchen die unendlich ferne Ebene und ihr Nullpunkt, der unendlich ferne Punkt der Axe, Ebene und Centrum sind.

Jede Homologie von dieser speciellen Art transformirt ∞^3 Gewinde in sich, da so viele durch einen gegebenen Strahlenbüschel oder zwei sich schneidende Geraden geben.

Das zu einer cubischen Raumcurve gehörige Strahlengewinde.

Die Osculationspunkte der 3 Schmiegungsebenen, welche von einem 243
Punkte X an eine cubische Raumcurve kommen, liegen bekanntlich in einer Ebene $\mathfrak{x}$, welche durch X geht.

Umgekehrt und dual: Die Schmiegungsebenen einer cubischen Raumcurve in ihren Schnitten mit einer Ebene $\mathfrak{x}$ laufen in einen Punkt X zusammen, der in $\mathfrak{x}$ liegt.

In Bezug auf die Curve nennt man $\mathfrak{x}$ die *Polarebene* von X und X den *Pol* von $\mathfrak{x}$.

Durchläuft X eine Gerade, so dreht sich $\mathfrak{x}$ ebenfalls um eine Gerade, und umgekehrt.*)

Demnach liegt ein Nullsystem vor, und *mit jeder cubischen Raumcurve R^3 ist ein Strahlengewinde Γ verbunden*, zu dem alle Strahlenbüschel $(X, \mathfrak{x})$ gehören.

Fällt X auf die Curve, so ist die Polar- oder Nullebene die Schmiegungsebene. *Und zum Gewinde gehört die Congruenz 3. Grades*

*) Schröter, Oberflächen 2. Ordnung und Raumcurven 3. Ordnung § 34—36.

der Schmiegungsstrahlen der R^3, d. h. derjenigen Strahlen, welche durch die Punkte der Curve je in den zugehörigen Schmiegungsebenen gehen; *diese Congruenz enthält die abwickelbare Fläche der Tangenten von* R^3, von welcher je 4 Erzeugende eine Gerade treffen.

Sind daher a, b, c drei Tangenten von R^3, so gehört die Regelschaar (abc) ganz zum Gewinde Γ; die andere Schaar $[abc]$ enthält eine Involution J, deren gepaarte Geraden in Bezug auf Γ polar sind; die Doppelstrahlen gehören zu Γ.

Jede weitere Tangente t von R^3 trifft, als Strahl von Γ, zwei gepaarte Geraden l, l' der J, und diese sind also die Treffgeraden der 4 Tangenten a, b, c, t. Trifft t einen der Doppelstrahlen, so haben sich die beiden Treffgeraden vereinigt.

Wenn 4 Tangenten von R^3 *nur eine Treffgerade haben, so ist diese ein Strahl von* Γ, *und für solche Tangenten von* R^3, *welchen ein Strahl von* Γ *begegnet, ist derselbe die einzige Treffgerade.*

Zwischen der Punktreihe von R^3 und der Involution J besteht eine Projectivität, in der jedem Punkte von R^3 das Paar von J entspricht, das von der Tangente des Punktes getroffen wird.

Die Berührungspunkte von a, b, c seien A, B, C und die Schmiegungsebenen α, β, γ.

Fällt die bewegliche Tangente mit einer der festen Tangenten, etwa mit a, zusammen, so sind die beiden Treffgeraden a', a'' die Geraden durch A, bezw. in α, welche b und c treffen; b', b''; c', c'' mögen in derselben Weise zu b, c gehören. Folglich sind dies 3 Paare von J, entsprechend in der eben erwähnten Projectivität den Punkten A, B, C.

244 Wir projiciren unsere Figur aus dem Nullpunkte O der Ebene $\omega \equiv ABC$ auf eine beliebige Ebene ε.

R^3 geht über in eine ebene Curve 3. Ordnung $\mathfrak{R}^3$ mit Doppelpunkt $\mathfrak{D}$, in welchen sich die Schnitte D', D'' der Curve mit ihrer aus O kommenden Doppelsecante projiciren; die beiden Doppelpunkts-Tangenten sind die Projectionen der Tangenten d', d'' in D', D'' an die Raumcurve.

Die Punkte A, B, C projiciren sich in die Wendepunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, welche auf der Wendepunkts-Linie $\mathfrak{w} \equiv \omega\varepsilon$ liegen; Wendetangenten sind die Spuren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Schmiegungsebenen α, β, γ. Aber in α liegt nicht blos a, sondern auch a'', also haben beide die $\mathfrak{a}$ zur Projection und ebenso b und b'' die $\mathfrak{b}$, c und c'' die $\mathfrak{c}$.

Die Projectionen der Geraden von (abc) und von $[abc]$ umhüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{H}^2$, der also die 3 Wendetangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ berührt

und zwar jede im vierten harmonischen Punkte, der dem Wendepunkte zugeordnet ist in Bezug auf die Schnitte mit den beiden andern Wendetangenten. Denn z. B. der Berührungspunkt von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{H}^2$ ist die Projection des Schnittes der beiden Geraden a und a'' aus den beiden Regelschaaren (abc) und $[abc]$, welche in α liegen. Diese Ebene α schneidet aber die Tangentenfläche von R^3 (ausser in zwei unendlich nahen Erzeugenden) in einem Kegelschnitte, der in A von a und in den Spuren der Tangenten b und c von denen von β und γ berührt wird; folglich ist der Punkt $\alpha\beta\gamma \equiv O$, in dem die letzteren sich schneiden, der Pol, in Bezug auf diesen Kegelschnitt, der Verbindungslinie der beiden ersteren Spuren, d. h. der Geraden a'', also der Punkt aa'' der Pol der Geraden OA, und demnach sind auch die Punkte aa'' und A harmonisch zu den Schnitten von a mit $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ oder einfacher mit β, γ. Diese 4 Punkte projiciren sich aber in die 4 oben genannten Punkte von $\mathfrak{a}$.

Bezeichnen wir noch, bei der Figur in der Projectionsebene ε, die Berührungspunkte der Wendetangenten von $\mathfrak{R}^3$ mit $\mathfrak{H}^2$ durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ und die Ecken des Tangentendreiecks $\mathfrak{abc}$ durch $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$.

Die beiden harmonischen Würfe $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2$ sind perspectiv, also geht $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ durch den Schnitt $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{c}$, ebenso $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1$ durch $\mathfrak{B}$; und die Wendepunkts-Linie $\mathfrak{w}$ ist demnach die Gerade, auf welcher die 3 Schnittpunkte der Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{H}^2$ je mit der Gegenseite des Dreiecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ der Berührungspunkte liegen, oder die harmonische Polare, welche in Bezug auf das umgeschriebene Dreieck $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$ dem Punkte zugehört, in den die 3 Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten zusammenlaufen.

Weil die Strahlen von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_1$ nach $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_1$ die Gerade $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, bezw. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ treffen, so sind die Schnitte $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ des Kegelschnitts $\mathfrak{H}^2$ mit $\mathfrak{w}$ die sich selbst entsprechenden Punkte der cyklischen Projectivität:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \barwedge \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A},$$

oder, mit kürzerer Bezeichnung, der cyklischen Projectivität $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$.

In Bezug auf eine solche Projectivität gelten bekanntlich folgende Sätze.*)

„Wenn $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ die bezw. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zugeordneten vierten harmonischen Punkte je in Bezug auf $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind, so befinden sich $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^*$ in Involution und die Doppelpunkte

*) Vergl. Steiner-Schröter, Vorlesungen über synthetische Geometrie 2. Auflage § 17 und Schröter, Mathem. Annalen Bd. 10 S. 420.

dieser Involution sind zugleich die beiden sich selbst entsprechenden Punkte $\mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ der cyklischen Projectivität.

Die beiden Punktwürfe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$ sind äqui-anharmonisch, d. h. ihre Doppelverhältnisse sind die beiden imaginären cubischen Wurzeln der negativen Einheit.

Die Involution $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''$ hat $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$, die ja zu beiden Paaren harmonisch sind, zu Doppelpunkten.

Je nachdem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ reell sind oder nur einer von ihnen reell und die beiden andern conjugirt imaginär, sind $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ conjugirt imaginär, bezw. reell."

Wir wollen gleich noch eine andere Eigenschaft unserer Figur ableiten, die uns später erforderlich ist.

Die Tangenten an $\mathfrak{H}^2$ in seinen Schnitten $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ mit $\mathfrak{w}$ seien $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$. Wir betrachten den Wurf, der auf $\mathfrak{d}'$ durch die Schnitte mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und den Berührungspunkt $\mathfrak{D}'$ gebildet wird:

$$\mathfrak{d}'(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}') \barwedge \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}' \barwedge \mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}') \barwedge \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}';$$

wegen der Involution $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''$ ist aber $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}' \barwedge \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$. Also:

$$\mathfrak{d}'(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}') \barwedge \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$$

und

$$\mathfrak{d}''(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}'') \barwedge \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'.$$

245 Die Involution J in der Regelschaar $[abc]$, die wir oben betrachteten und in der a', a''; b', b''; c', c'' gepaart sind, während die beiden zu Γ gehörigen Strahlen dieser Schaar die Doppelstrahlen sind, projicirt sich aus O in eine Involution $\mathfrak{J}$ in dem Tangentenbüschel um $\mathfrak{H}^2$. Die a'', b'', c'' projicirten sich in die Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die a', b', c' gehen durch A, B, C, also projiciren sie sich in die zweiten Tangenten aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ an $\mathfrak{H}^2$, und folglich ist $\mathfrak{w}$ die Gerade, welche die Schnittpunkte aller Paare dieser Involution $\mathfrak{J}$ enthält, und die beiden Tangenten $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ sind die Doppelstrahlen derselben; also sind sie die Projectionen der beiden zum Gewinde Γ gehörigen Strahlen von $[abc]$.

Die projective Beziehung zwischen der Involution J in $[abc]$ und der Punktreihe auf der cubischen Raumcurve geht durch die Projection aus O über in eine projective Beziehung zwischen der Punktreihe auf $\mathfrak{R}^3$ und der Involution $\mathfrak{J}$ um $\mathfrak{H}^2$, in der also den 3 Wendepunkten die 3 Tangentenpaare entsprechen, welche von ihnen an $\mathfrak{H}^2$ kommen. Diese Projectivität hat eine andere zur Folge zwischen dem Strahlenbüschel aus dem Doppelpunkte $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{R}^3$ und der Punktreihe auf $\mathfrak{w}$, in der ein Strahl und ein Punkt sich entsprechen, wenn der Schnitt

von jenem mit $\mathfrak{R}^3$ und das Tangentenpaar aus diesem an $\mathfrak{H}^2$ in der vorangehenden Projectivität einander correspondiren.

Bei dieser neuen Projectivität incidiren aber dreimal entsprechende Elemente, nämlich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$; folglich geschieht dies durchweg.

Wenn also X ein beliebiger Punkt der cubischen Raumcurve ist, so schneiden wir die Ebene, die aus der von O kommenden Doppelsecante $h \equiv OD'D''$ nach X geht, mit $\mathfrak{w}$; die beiden Tangenten, welche dieser Schnittpunkt an $\mathfrak{H}^2$ sendet, sind die Projectionen der beiden Geraden von $[a\,b\,c]$, die von der Tangente von X getroffen werden.

Schneiden wir insbesondere die Ebenen von h nach $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ zum dritten Male mit der Curve R^3, so erhalten wir die Berührungspunkte derjenigen beiden Tangenten, welche von den zu Γ gehörigen Strahlen der Regelschaar $[abc]$ getroffen werden, also derjenigen Tangenten, welche allein mit a, b, c Tangentenquadrupel bilden, die nur eine Treffgerade haben.

Wir wollen nun nachweisen, dass das die Tangenten d', d'' in 246
den Punkten D', D'' auf der Doppelsecante h sind, oder dass die beiden Doppelpunkts-Tangenten von $\mathfrak{R}^3$ gerade durch $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ gehen.

Dazu betrachten wir die 3 Kegel (A), (B), (C), welche die cubische Raumcurve aus A, B, C projiciren.*)

Der Kegel (A) wird längs der 3 Kanten a, AB, AC von den Ebenen α, Ab, Ac berührt; folglich liegen die Schnittstrahlen dieser Berührungsebenen je mit der Verbindungsebene der beiden andern Kanten in einer Ebene ω_1; diese 3 Verbindungsebenen sind ω, Ca, Ba. Die 3 in ω_1 befindlichen Strahlen sind also:

$$s_1 \equiv (\alpha, \omega), \quad s_1' \equiv (Ab, Ca), \quad s_1'' \equiv (Ac, Ba).$$

Die Ebene ω_1 steht zu dem Kegel (A) und dem ihm umgeschriebenen Tangenten-Dreiflach, welches der ω_1 in s_1, s_1', s_1'' begegnet, in derselben Beziehung, wie die Gerade $\mathfrak{w}$ zu dem Kegelschnitte $\mathfrak{H}^2$ und dem umgeschriebenen Tangentendreiseite $\mathfrak{abc}$, welches die $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ schneidet; folglich sind die Schnitte von ω_1 mit (A) die sich selbst entsprechenden Strahlen der cyklischen Projectivität $s_1 s_1' s_1''$.

Die Kegel (B), (C) liefern zwei weitere Ebenen ω_2, ω_3 mit den Strahlentripeln:

*) Grösstentheils nach Schröter, Oberflächen 2. Ordnung und Raumcurven 3. Ordnung § 35.

$$s_2 \equiv (\beta, \omega), \quad s_2' \equiv (Bc, Ab), \quad s_2'' \equiv (Ba, Cb);$$

$$s_3 \equiv (\gamma, \omega), \quad s_3' \equiv (Ca, Bc), \quad s_3'' \equiv (Cb, Ac).$$

Die 3 Strahlen s_1', s_2', s_3' gehen ersichtlich durch den Punkt $P' \equiv (Ab, Bc, Ca)$ und die 3 Strahlen s_1'', s_2'', s_3'' durch den Punkt $P'' \equiv (Ac, Ba, Cb)$. Folglich gehen alle 3 Ebenen ω_1, ω_2, ω_3 durch die Gerade $P'P''$. Die 3 Strahlen, welche sie in ω einschneiden, sind die s_1, s_2, s_3, also gehen diese durch den Punkt $(\omega, P'P'')$; und da durch sie bezüglich die 3 Schmiegungsebenen α, β, γ gehen, so ist dieser Punkt der Nullpunkt oder Pol O von ω.

Alle 3 cyklischen Projectivitäten bewirken auf $OP'P''$ dieselbe cyklische Projectivität, nämlich $OP'P''$; die 3 Paare der Kanten von (A), (B), (C) bezw. in ω_1, ω_2, ω_3 gehen also durch die sich selbst entsprechenden Punkte dieser cyklischen Projectivität, welche daher den 3 Kegeln gemeinsam sind und infolge dessen auf der cubischen Raumcurve R^3 liegen. Somit ist $OP'P''$ die von O kommende Doppelsecante h dieser Curve.

Die cyklische Projectivität $AB(O, P', P'')$, welche aus AB diejenige auf der Doppelsecante projicirt, sendet also ihre sich selbst entsprechenden Ebenen nach D', D''; folglich sind die beiden Ebenenwürfe aus AB nach $P''P'OD'$ und $P''P'OD''$ äqui-anharmonisch. Die Ebene ABP'' enthält s_1'', welche durch A geht; also ist sie Bs_1'' oder Ba; ebenso ist ABP', welche s_2' enthält, Ab; sie enthalten demnach die Tangenten a, b; ABO ist ω und enthält C; folglich gehen die 4 Ebenen des ersten Wurfs von der Sehne AB der cubischen Raumcurve nach den 4 Punkten A, B, C, D' und die des andern nach A, B, C, D''. Mithin sind auch diese beiden Punktwürfe auf der cubischen Raumcurve äqui-anharmonisch.

Wenn also A, B, C drei Punkte einer cubischen Raumcurve und D', D'' die Punkte sind, in denen sie von der Doppelsecante getroffen wird, welche vom Nullpunkte oder Pole der Ebene ABC kommt, so sind die beiden Punktwürfe $ABCD'$, $ABCD''$ auf der Curve äqui-anharmonisch.

Folglich sind die Ebenen durch die genannte Doppelsecante, welche die beiden Tangenten d', d'' von D', D'' enthalten, die sich selbst entsprechenden Ebenen der cyklischen Projectivität $h\ (A, B, C)$, und in der Projection die Doppelpunkts-Tangenten die sich selbst entsprechenden Strahlen der cyklischen Projectivität $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Demnach gehen sie, wie behauptet, durch die beiden Punkte $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ auf $\mathfrak{w}$.

Mithin sind d', d'' die beiden Tangenten, welche von den zu Γ gehörigen Strahlen der Regelschaar $[abc]$ getroffen werden.

Wenn a, b, c drei beliebige Tangenten der R^3 sind, so berühren diejenigen beiden Tangenten, welche mit jenen Tangenten-Quadrupel bilden, die je nur eine einzige Treffgerade haben, die dann zum Gewinde Γ gehört, in den Schnittpunkten der Doppelsecante, die vom Pol der Verbindungsebene der Berührungspunkte der 3 gegebenen Tangenten kommt.

Und ferner:

Die Berührungspunkte von 4 Tangenten der Curve R^3, welche von einem Strahle des zugehörigen Gewindes Γ getroffen werden und dann nur von diesem Strahle, bilden einen äqui-anharmonischen Wurf.

Sei g' der Strahl von Γ, welcher $abcd'$ trifft. Nehmen wir an, 247
dass diejenige Doppelpunkts-Tangente von $\mathfrak{R}^3$, in die sich d' projicirt, durch $\mathfrak{D}'$ geht; dann ist die Tangente $\mathfrak{d}'$ in $\mathfrak{D}'$ an $\mathfrak{H}^2$ die Projection der Treffgeraden g' und der Punkt $d'g'$ hat $\mathfrak{D}'$ zur Projection.

Der Punktwurf $g'(abcd')$ ist projectiv zu $\mathfrak{d}'(\mathfrak{abcd}')$, also projectiv zu $\mathfrak{ABCD}''$ oder $h(\mathfrak{ABCD}'')$ oder $h(ABCd'')$ oder zum Punktwurfe $ABCD''$ auf R^3, und ebenso ist, wenn g'' die Treffgerade von $abcd''$ ist, $g''(abcd'') \barwedge ABCD'$.

Der Punktwurf, welchen jene 4 Tangenten auf ihrer einzigen Treffgeraden hervorrufen, ist ebenfalls äqui-anharmonisch, aber nicht zu dem der Berührungspunkte der 4 Tangenten projectiv. Vielmehr, wenn zwei so zusammengehörige Tangentenquadrupel, welche die 3 ersten Tangenten gemeinsam haben, betrachtet werden, so ist je der Punktwurf auf der Treffgeraden des einen Quadrupels zu dem Wurfe der Berührungspunkte des andern projectiv.

Da a, b, c, d' nur eine Treffgerade haben, so berührt d' die Trägerfläche (abc), und folglich sind die Ebenen $g'(a, b, c, d')$ die Berührungsebenen dieser Fläche in den Punkten $g'(a, b, c, d')$ und der Ebenenwurf und der Punktwurf sind projectiv.

*Auf jedem Strahle von Γ entsteht durch die Tangenten der cubischen Raumcurve, die er trifft, ein äqui-anharmonischer Punktwurf und um ihn ein zu demselben projectiver, also ebenfalls äqui-anharmonischer Ebenenwurf.**)

Ist daher der Strahl reell, so müssen zwei von den 4 Tangenten reell, die beiden übrigen conjugirt imaginär sein; denn sowohl bei 4 reellen, als bei zweimal zwei conjugirt imaginären Elementen ist bekanntlich das Doppelverhältniss reell.

*) Vergl. hierzu Voss, Mathem. Annalen Bd. 13 S. 232 und Sturm, Journal für Mathematik Bd. 86 S. 116.

248 *Die ∞^4 Gruppen von 4 Punkten der Raumcurve R^3 führen in interessanter Weise zu den ∞^4 Gewinden, welche sich auf das zur Curve gehörige stützen.*

Nennen wir dieses Gewinde nun wiederum Γ_0.

Es sei $ABCD$ ein Punkt-Quadrupel auf R^3 und a, b, c, d seien die zugehörigen Tangenten. Wenn dann noch A', B', C' drei beliebige weitere Punkte der Curve sind mit den Tangenten a', b', c', so haben wir in der Regelschaar $[a'b'c']$ eine Involution, deren gepaarte Geraden in Bezug auf Γ_0 polar sind. Die Gewinde ferner, welche durch a, b, c, d gehen und das Netz gemein haben, dessen Leitgerade die beiden Treffgeraden r, s dieser 4 Geraden sind, schneiden ebenfalls in $[a'\ b'\ c']$ eine Involution. Es sei r', s' das gemeinsame Paar dieser beiden Involutionen und Γ das Gewinde durch $(abcd) \equiv [rs]$, von welchem dieses Paar eingeschnitten wird, so ist dasselbe, weil r' und s' nach Γ_0 polar sind, in Involution zu Γ_0; r' und s', ebenfalls weil sie polar sind nach Γ_0, treffen die nämliche vierte Tangente d' von R^3 mit dem Berührungspunkte D'.

So ist, wenn A, B, C, D auf R^3 gegeben sind, dem Tripel $A'B'C'$ auf R^3 eindeutig ein vierter Punkt D' der Curve zugeordnet und dasselbe gilt bei jedem der ∞^3 Tripel auf R^3. Allen diesen Quadrupeln gehört dasselbe Gewinde Γ zu, weil es durch das Strahlennetz $[rs]$ von Γ_0 nur ein Gewinde giebt, das sich auf Γ_0 stützt.

Folglich wird dieses Gewinde Γ durch die Paare der Treffgeraden der Tangenten aller dieser Quadrupel $A'B'C'D'$ erzeugt; dem Quadrupel $ABCD$ nennen wir das Gewinde sowohl, wie die ∞^3 Quadrupel zugeordnet.

Die Beziehung zwischen den Quadrupeln $ABCD$ und $A'B'C'D'$ ist gegenseitig; d. h. die Treffgeraden r, s von a, b, c, d liegen auf einem Gewinde durch $(a'b'c'd') \equiv [r's']$.

In der That, die Geradenpaare ll', mm', rs der Regelschaar $[abc]$, welche von r', s', d getroffen werden, sind in Involution, weil a, b, c, d, r', s' zum Gewinde Γ gehören und also die Geraden aller 3 Paare nach Γ polar sind. Diese Involution ist mit derjenigen identisch, welche von den Gewinden, die durch $[r's']$ gehen, eingeschnitten wird, da l, l'; m, m' zu den Gebüschen $[r']$, $[s']$ gehören; also geht auch ein Gewinde dieses Büschels durch r, s.

Dieses Gewinde ist zu Γ in Involution, weil jedes von ihnen durch ein Paar Polaren r, s, bezw. r', s' des andern geht.

249 Jedes Punktquadrupel auf R^3 gehört zu einem Paare von Polaren in Bezug auf Γ_0, den Treffgeraden der 4 zugehörigen Tangenten; und

umgekehrt, jedes Polaren-Paar von Γ_0 wird von 4 Tangenten der R^3 getroffen und gehört ihm also das Quadrupel der Berührungspunkte zu.

Zwei Punktquadrupel $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$ bestimmen ein lineares System 1. Stufe S_1 von Punktquadrupeln, die Tangenten-Treffgeraden $r's'$, $r''s''$ gehören zur nämlichen Regelschaar und legen eine Involution in ihr fest; die Quadrupel, die den übrigen Paaren zugehören, erfüllen das System S_1.

Drei Punktquadrupel $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A'''B'''C'''D'''$ bestimmen ein lineares System 2. Stufe S_2 von Punktquadrupeln, denn die 3 Paare $r's'$, $r''s''$, $r'''s'''$ gehören, als 3 Paare Polaren in Bezug auf Γ_0, zu dem nämlichen Strahlennetze (Nr. 98); die Polare zu jeder weiteren Geraden dieses Netzes gehört ihm auch an, da alle durch dasselbe gehenden Gewinde sich auf Γ_0 stützen; die zu diesen übrigen Paaren von Polaren gehörigen Punktquadrupel erzeugen S_2.

Endlich, vier Punktquadrupel bestimmen ein lineares System 3. Stufe S_3 von Punktquadrupeln auf R^3. Die 4 Paare der Tangenten-Treffgeraden gehören zu demselben Gewinde, das sich auf Γ_0 stützt und von ∞^3 Paaren Polaren des Γ_0 erfüllt wird; durch die zugehörigen Punktquadrupel wird S_3 erzeugt.

Sind die 4 Punktquadrupel dem $ABCD$ in der obigen Weise zugeordnet, so ist das Gewinde das zu $ABCD$ zugehörige Γ und die Quadrupel von S_3 sind die sämmtlichen dem $ABCD$ zugeordneten.

Gehören, in den vorangehenden Fällen, die beiden oder die drei gegebenen Quadrupel zu denen, welche dem Quadrupel $ABCD$ zugeordnet sind, so hat die Regelschaar $(r's'r''s'')$ oder das Strahlennetz $(r's'r''s''r'''s''')$ mit Γ 4, bezw. 6 Strahlen gemein und befindet sich in Γ, also alle Quadrupel des linearen Systems 1. oder 2. Stufe sind dann $ABCD$ zugeordnet.

Zwei Quadrupeln $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ sind gemeinsam ∞^2 Quadrupel zugeordnet, welche den Polaren-Paaren (von Γ_0) in dem Strahlennetze zugehören, in dem sich die beiden Gewinde Γ und Γ_1 durchschneiden, die den gegebenen Quadrupeln zugehören; *sie bilden also ein lineares System 2. Stufe* und sind natürlich allen Quadrupeln des linearen Systems 1. Stufe zugeordnet, das durch $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ constituirt wird, und ähnliches gilt in den folgenden Fällen.

Ebenso sind drei Quadrupeln gemeinsam zugeordnet die Quadrupel eines linearen Systems 1. Stufe, und vier Quadrupeln ein einziges Quadrupel, das dem Polaren-Paar (von Γ_0) zugehört, in dem sich die 4 Gewinde durchschneiden.

Da die Beziehung zwischen 2 zugeordneten Quadrupeln gegenseitig ist, so *erhält man das Quadrupel, das 4 Quadrupeln und dem*

durch sie constituirten linearen Systeme 3. Stufe zugeordnet ist, auch folgendermassen:

Man schneide das Gewinde Γ, das durch die Treffgeraden der Tangenten der Quadrupel dieses Systems erzeugt wird, oder, was dasselbe ist, das Strahlennetz $\Gamma_0 \Gamma$ mit der Tangentenfläche von R^3; die Berührungspunkte der 4 Tangenten, welche gemeinsam sind (von den beiden Leitgeraden des $\Gamma_0 \Gamma$ gleichzeitig getroffen werden), berühren in den Punkten $ABCD$ des gesuchten Quadrupels.

Liegt ein System von nur 2. oder 1. Stufe oder ein einziges Quadrupel vor, so erhält man entsprechend ein Strahlennetz oder eine Regelschaar von Polaren-Paaren oder ein einziges Polaren-Paar von Γ_0, und die — auf Γ_0 sich stützenden — ∞^1, ∞^2, ∞^3 Gewinde durch dieses Netz, diese Schaar oder dieses Paar haben mit der Tangentenfläche von R^3 die ∞^1, ∞^2, ∞^3 Gruppen von 4 Tangenten gemein, deren Berührungspunkte die Systeme 1., 2., 3. Stufe von Punktquadrupeln bilden, welche dem gegebenen Systeme 2. oder 1. Stufe oder einzelnen Quadrupel zugeordnet sind.

*Wir haben es also hier mit einer eindeutigen Correspondenz zwischen den ∞^4 Punktquadrupeln auf R^3 und den ∞^4 Gewinden zu thun, welche sich auf das der R^3 zugehörige Gewinde Γ_0 stützen. Einem linearen Systeme der einen Art entspricht ein gleichstufiges lineares System der andern Art.**)

Zwei einander zugeordneten Punktquadrupeln $ABCD$ und $A'B'C'D'$ entsprechen 2 Gewinde Γ und Γ', die bezw. durch die Tangenten des Quadrupels, dem sie entsprechen, und die Tangenten-Treffgeraden des andern Quadrupels gehen und gegenseitig in Involution sind (Nr. 248). Man könnte deshalb die beiden Quadrupel auch als „in Involution befindlich" oder „sich gegenseitig stützend" oder, nach einer auch für diese Beziehung üblichen Benennung, als „apolar" bezeichnen.

250 *Ein lineares System 1. Stufe von Punktquadrupeln ist ersichtlich eine Involution 4. Grades;* es ist durch 2 Quadrupel bestimmt und jeder weitere Punkt von R^3 gehört nur zu einem Quadrupel.

Ein solches System oder eine solche Involution J_4 auf R^3 liefert uns ein einfach unendliches System von Tetraedern, welche alle der R^3 eingeschrieben sind und deren Ecken je in den 4 Punkten einer Gruppe von J_4 liegen. Die Ebenen dieser Tetraeder sind Schmiegungsebenen einer andern cubischen Raumcurve, der also alle diese Tetraeder umgeschrieben sind.

Wir haben zu zeigen, dass durch jeden Punkt O 3 Ebenen gehen,

*) Vergl. Journal f. Mathematik Bd. 86 S. 116.

welche 3 Punkte aus derselben Gruppe von J_4 verbinden. Die R^3, auf die ja — durch Projection aus einer Sehne — die Sätze über Correspondenzen auf einer Geraden übertragen werden können, trägt eine Correspondenz [3, 6] folgender Art. Jeder Punkt X der Curve R^3 gehört zu einer Gruppe von J_4; die 3 Paare der übrigen Punkte derselben geben mit O verbunden Ebenen, deren dritte Schnitte mit R^3 die 3 dem X entsprechenden Punkte X_1 sind. Gehen wir umgekehrt von einem X_1 auf R^3 aus, so bilden die beiden weiteren Schnitte der Ebenen durch OX_1 mit R^3 eine Involution (2. Grades); in dieser giebt es 3 Paare, deren beide Punkte zu der nämlichen Gruppe von J_4 gehören; weil die beiden Involutionen, als involutorische Correspondenzen [3] und [1] auf demselben Träger, 3 Paare entsprechender Punkte gemein haben (Nr. 21, 23). Die 2.3 Punkte, welche diese Paare zu Gruppen von J_4 vervollständigen, sind die dem X_1 entsprechenden Punkte X. Jede Coincidenz von [3, 6] liefert eine durch O gehende Ebene, welche 3 Punkte einer Gruppe von J_4 verbindet; jeder dieser 3 Punkte ist dann aber eine Coincidenz. Also gehen $\frac{1}{3}(3+6)=3$ von den Ebenen unserer Tetraeder durch O.

Durch einen Punkt von R^3 gehen nur die 3 Ebenen, welche ihn mit je zwei von den andern Punkten seiner Gruppe verbinden; da eben jede von unsern Ebenen der R^3 nur in den Punkten begegnet, die sie verbindet. Wegen des Princips von der Erhaltung der Anzahl könnten wir uns mit diesem einfacheren Beweise begnügen.

Weil die Involution durch 2 Gruppen bestimmt ist, so haben wir den Satz von Hurwitz:*)

Wenn zwei Tetraeder einer cubischen Raumcurve eingeschrieben sind, so osculiren ihre 8 Ebenen eine andere cubische Raumcurve, und es giebt ∞^1 Tetraeder, welcher der ersten ein-, der zweiten umgeschrieben sind. Jeder Punkt jener ist Ecke, jede Schmiegungsebene dieser ist Ebene eines und nur eines von diesen Tetraedern.

Die Involution J_4 hat, als involutorische Correspondenz [3], 6 sich selbst entsprechende Punkte, also 6 Gruppen mit 2 zusammengefallenen Punkten; von dem einer solchen Gruppe zugehörigen Tetraeder berührt daher eine Kante die R^3, die gegenüberliegende Kante, als Schnitt zweier unendlich naher Schmiegungsebenen, wird Tangente der zweiten Raumcurve, also gehört sie zu deren Gewinde; sie gehört aber, als Sehne der R^3 mit getrennten Schnitten, nicht zu dem Ge-

*) Mathem. Annalen Bd. 20 S. 135, wo Hurwitz diesen Satz mit Hilfe der Erzeugung der cubischen Raumcurve durch collineare Bündel oder Felder bewiesen hat.

winde der R^3, denn zu ihr ist nach diesem Gewinde die von ihr verschiedene Schnittlinie der Schmiegungsebenen von R^3 in den beiden Schnitten polar.

Mithin gehört zu den beiden Raumcurven nicht das nämliche Gewinde.

251 Wir haben im Raume ∞^5 Gewinde, ∞^{12} cubische Raumcurven, denn 6 Punkte bestimmen eine cubische Raumcurve,*) das Hindurchgehen durch einen gegebenen Punkt ist aber für eine Raumcurve eine doppelte Bedingung. Zu jeder cubischen Raumcurve gehört nur ein Gewinde. *Folglich ist jedes Gewinde für ∞^7 cubische Raumcurven das zugehörige.* Machen wir uns dies Ergebniss noch direct klar. Durch 3 Punkte und ihre Nullebenen in Bezug auf das gegebene Gewinde ist dieses und sein Nullsystem eindeutig bestimmt (Nr. 51, 58); jede cubische Raumcurve, die in den 3 Punkten je die zugehörige Nullebene osculirt, hat sie also auch zu Polar- oder Nullebenen dieser Punkte. Folglich ist ihr Gewinde mit dem gegebenen identisch. Wir können ∞^1 solche cubischen Raumcurven construiren, indem wir in einem der 3 Strahlenbüschel, die durch Punkt und Nullebene bestimmt sind, noch einen beliebigen Strahl als Tangente für die Curve geben können. Den Beweis führen wir nach dem Vorgange Staudt's**) und schicken mit ihm folgenden Hilfssatz voraus:

Wenn A, B, C 3 Punkte einer cubischen Raumcurve R^3 und a, b, c ihre Tangenten sind, so werden die Schmiegungsebene α in A und die Ebene α_1, welche in A das Hyperboloid (abc) berührt, durch B und C harmonisch getrennt.

In α_1 liegt die von A kommende Gerade p der Regelschaar $[abc]$, die Schnittlinie der Ebenen Ab, Ac. Der Kegel 2. Grades, welcher R^3 aus A projicirt, berührt die Ebenen α, Ab, Ac längs a, AB, AC, also ist die Ebene ABC Polarebene von p nach ihm und demnach $\alpha_1 \equiv pa$ die Polarebene der Geraden (ABC, α); mithin sind die beiden Kanten AB und AC harmonisch zu (ABC, α) und α_1 oder zu α und α_1, was zu beweisen war.

Sind nun A, B, C 3 beliebige Punkte und α, β, γ ihre Nullebenen in Bezug auf ein gegebenes Gewinde Γ (oder Nullsystem), endlich a ein beliebiger Strahl des Büschels (A, α); so sei O der Schnittpunkt $\alpha\beta\gamma$, also der Nullpunkt der Ebene $\omega \equiv ABC$. Wir

*) Vergl. z. B. Schröter, Oberflächen 2. Ordnung und Raumcurven 3. Ordnung S. 239.

**) Beiträge zur Geometrie der Lage Nr. 481, 486. — Staudt nennt die einem Nullsysteme (oder Gewinde) zugehörigen cubischen Raumcurven seine Ordnungscurven (Nr. 485).

construiren auf CO den O zugeordneten vierten harmonischen Punkt F in Bezug auf C und $H \equiv (CO, AB)$ und weiter den C zugeordneten, vierten harmonischen Punkt C' in Bezug auf F und H, verbinden C' mit $a\gamma$ durch r_1 und B mit $r_1\beta$ durch b, welche also zum Büschel (B, β) gehört.

Dann giebt es eine (und nur eine) cubische Raumcurve R^3, *welche durch* A, B, C *geht, in* A *und* B *die Strahlen* a, b *berührt und den Ebenen* α, β *sich anschmiegt;* sie ist der Schnitt, welchen, ausser AB, die beiden Kegel 2. Grades aus A und B haben, welche beide durch C gehen und von denen der eine die Ebenen α und Ab längs a und AB, der andere die Ebenen β und Ba längs b und BA tangirt.

Diese Curve hat γ *zur Schmiegungsebene von* C; dazu haben wir nur noch zu zeigen, dass ihre Tangente c in C in die Ebene γ fällt; denn da die Schmiegungsebene von C durch $O \equiv (ABC, \alpha, \beta)$ gehen muss, so ist sie dann mit Oc oder γ identisch.

Wenn p, q, r die Geraden der Schaar $[abc]$ sind, welche durch A, B, C gehen, so sind $\alpha_1 \equiv ap$, $\beta_1 \equiv bq$, $\gamma_1 \equiv cr$ die Berührungsebenen der Fläche (abc) in den Punkten A, B, C. Nun sind, nach obigem Hilfssatze, α und α_1 harmonisch durch B und C oder durch AB und C getrennt; da nun α durch O geht, so muss α_1 durch AF gehen und ebenso β_1 durch BF; folglich berührt der Kegelschnitt K, den die Fläche (abc) aus ω ausschneidet und der durch A, B, C geht, in A und B die Geraden AF und BF; also sind F und H conjugirt in Bezug auf ihn und C' liegt auf ihm. Daher ist der Strahl r_1, der von C' ausgeht und a und b trifft, ein Strahl von $[abc]$. Die Ebene γ, welche durch CO und also durch C' geht, nimmt r_1 in sich auf, von der sie noch den zweiten Punkt $a\gamma$ enthält, also auch die Tangente c, da dieselbe durch C geht und r_1 schneidet.

Demnach hat R^3 *die Nullebenen* α, β, γ *von* A, B, C *zu ihren Schmiegungsebenen in diesen Punkten und infolge dessen das gegebene Gewinde zum zugehörigen* oder ist — nach Staudt's Ausdrucke — eine Ordnungscurve desselben; für ihre übrigen Punkte sind also auch deren Nullebenen in Bezug auf dies Gewinde die Schmiegungsebenen. Folglich genügt es, um alle Ordnungscurven zu erhalten, sich mit den 3 Punkten durch eine feste Ebene zu bewegen. Diese liefert aber $\infty^{3.2}$ solche Tripel. In jedem Falle kann man dann noch der Tangente a ∞^1 Lagen geben; so ergiebt sich *die 7fache Unendlichkeit der cubischen Raumcurven, denen ein gegebenes Gewinde zugehört.*

Für eine cubische Raumcurve ist es also eine fünffache Bedingung, einem gegebenen Gewinde zuzugehören, und ebenso für ein Gewinde eine fünffache Bedingung, zu einer gegebenen cubischen Raumcurve zu ge-

*hören.**) In der That, für die Polarebenen von zwei Punkten A, B sind es zwei Bedingungen, in die Nullebenen α, β dieser Punkte in Bezug auf das Gewinde zu fallen; werden sie erfüllt, so ist es für die Polarebene eines beliebigen dritten Punktes C nur noch eine einfache Bedingung, da die Polarebene wie die Nullebene von C durch den Punkt (ABC, α, β) geht.

*) Ebenso ist es für zwei cubische Raumcurven eine fünffache Bedingung, zu demselben Gewinde zu gehören: 3 beliebige Punkte müssen in Bezug auf beide die nämlichen Polarebenen haben.

Der tetraedrale oder Reye'sche Complex.

I.

Unter den Complexen 2. Grades giebt es einen besonders einfachen, den wir jetzt schon besprechen, weil wir die Bekanntschaft mit ihm bei der Behandlung der Congruenzen 2. Ordnung voraussetzen müssen: den *tetraedralen Complex*, welcher zuerst von Reye untersucht worden ist.*) 252

In Nr. 49 bewiesen wir den Satz von Staudt, dass, wenn A, B, C, D die Ecken und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die gegenüberliegenden Ebenen *eines Tetraeders* T sind, g aber eine beliebige Gerade, der Ebenenwurf $g(A, B, C, D)$ und der Punktwurf $g(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ projectiv sind.

Daher ist der Ort der Strahlen, welche nach den Ecken von T einen Ebenenwurf von gegebenem Doppelverhältnisse λ senden, identisch mit dem Orte der Strahlen, welche durch die Ebenen von T in einem Punktwurfe dieses Doppelverhältnisses geschnitten werden.

In beiden Fällen wird den Strahlen damit eine einfache Bedingung auferlegt; also *erzeugen sie einen in sich dualen Complex.*

Der Complexkegel aus einem beliebigen Punkte X ist derjenige Kegel 2. Grades durch die 4 Geraden von X nach A, B, C, D, von dessen Kanten nach diesen 4 Kanten ein Ebenenwurf vom Doppelverhältnisse λ geht.

Die Complexcurve in einer beliebigen Ebene ξ ist derjenige Kegelschnitt, welcher die 4 Geraden $\xi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ berührt und auf dessen Tangenten dieselben einen Punktwurf vom Doppelverhältnisse λ einschneiden.

Der Complex ist also 2. Grades.

Wir nennen ihn T. *Alle seine Complexkegel gehen durch die Ecken des Tetraeders, alle seine Complexcurven berühren die Ebenen desselben.*

Die Strahlenbündel aus den Ecken des Tetraeders, die Strahlenfelder in seinen Ebenen gehören also vollständig zum Complexe.

In der That, für einen Strahl in einem dieser Bündel oder Felder wird die eine verbindende Ebene, bezw. der eine Schnittpunkt un-

*) Geometrie der Lage Abth. II erste Auflage (1868) 15. Vortrag.

bestimmt und kann also so gewählt werden, dass das Doppelverhältniss λ zu Stande kommt. Demnach *zerfällt der Complexkegel eines Punktes* X *in einer Ebene von* T, *etwa in* α, *in den Strahlenbüschel* (X, α) *und einen zweiten, dessen Ebene durch* A *geht,* da die des ersteren durch B, C, D geht; *ebenso zerfällt die Complexcurve einer Ebene* ξ, *welche* A *enthält, in den Strahlenbüschel* (A, ξ) *und einen zweiten, dessen Scheitel auf* α *liegt.*

Nennt man nun mit Plücker bei einem Complexe 2. Grades *solche Punkte und Ebenen singulär, deren Complexkegel, bezw. Complexcurve zerfällt,* so hat man:

Alle Punkte in den 4 Ebenen des Tetraeders, alle Ebenen durch die Ecken desselben sind für den tetraedralen Complex singulär.

Man nennt das Tetraeder deshalb auch das *singuläre Tetraeder* des Complexes, bezeichnet es aber auch als sein *Grund-* oder *Fundamental-Tetraeder.*

Dass *der tetraedrale Complex, ausser durch sein Tetraeder, durch einen ihm zugehörigen Strahl, der durch keine Ecke des Tetraeders geht und in keine von seinen Ebenen fällt, eindeutig bestimmt ist,* ist sofort klar.

253 Wenn g ein Strahl von T ist, der die Ebene α in X trifft, so geht die Ebene gB durch den Punkt $B' \equiv (CD, BX)$, $g(C, D)$ gehen durch C, D; also wird gA durch denjenigen Punkt A' auf CD gehen, für welchen $(A'B'CD) \equiv \lambda$ ist; so dass g den Strahl AA' schneidet und auf ihm die Ebene β.

Da nun B' und A' sich projectiv auf CD bewegen, so sind auch die Strahlenbüschel (B, α) und (A, β) projectiv mit BB' und AA' als entsprechenden Strahlen.

Folglich macht der Complex zwei solche Strahlenbüschel, wie (A, α) *und* (B, β), *deren Scheitel in zwei Ecken des Tetraeders fallen und deren Ebenen sich in der Verbindungskante der beiden andern Ecken schneiden, projectiv und zwar so, dass alle Strahlen des Complexes, die einen Strahl des einen Büschels schneiden, auch den homologen im andern treffen.*

Wir erhalten auf diese Weise 6 *einfach unendliche Systeme von Strahlennetzen, die im Complexe enthalten sind.*

Die Netze eines Systems haben die beiden betreffenden Gegenkanten des Tetraeders gemeinsam.

254 Um zwei beliebige Strahlen g', g'' von T und auf ihnen führen die beiden projectiven Ebenen-, bezw. Punktwürfe, die mit den Ecken und Ebenen von T incidiren, zu zwei projectiven Ebenenbüscheln und zwei projectiven Punktreihen. In beiden Fällen erhalten wir eine Regelschaar: von der einen gehen 4 Gerade durch die Ecken, von der andern fallen 4 Gerade in die Ebenen des T.

Die beiden Leitschaaren, welche wir P_1 und P_2 nennen wollen, enthalten g', g''; jede Gerade der ersteren sendet nach den Ecken von T Ebenenwürfe, die zu den von g' und g'' kommenden projectiv sind und also auch das Doppelverhältniss λ haben. Mithin gehört P_1 und ebenso P_2 ganz zu T. Wie die verbundenen Schaaren, so senden auch P_1 und P_2 4 Gerade durch die Ecken, bezw. in die Ebenen von T.

Zwei Strahlen g', g'' des tetraedralen Complexes gehören zu zwei verschiedenen vollständig zum Complexe gehörigen Regelschaaren P_1, P_2, *deren Trägerfläche dem Tetraeder um-, bezw. einbeschrieben ist.*

Da wir die Strahlen von T auf ∞^6, die einer Regelschaar auf ∞^2 Weisen paaren können, so folgt:

Die Regelschaaren P_1, P_2 *und ihre Trägerflächen bilden je ein System 4. Stufe.*

Im allgemeinen haben zwei Regelschaaren derselben Art keine Gerade gemein; aber zu jeder Regelschaar P_1 oder P_2 giebt es ∞^3 gleicher Art, welche mit ihr eine Gerade gemein haben.

Drei Strahlen g', g'', g''' von T tragen erstens drei projective Ebenenbüschel und führen also zu einer cubischen Raumcurve r_1, welche durch die Ecken des T geht, die drei Geraden je zweimal trifft und deren ganze Sehnen-Congruenz $[r_1]$, 1. Ordnung 3. Klasse,*) zum Complexe gehört.

Zweitens tragen die 3 Strahlen auch drei projective Punktreihen und führen zu einer abwickelbaren Fläche 3. Klasse r_2, dem Inbegriffe der Schmiegungsebenen einer cubischen Raumcurve, welche die Ebenen von T osculirt, die 3 Geraden zu Schnittlinien von Schmiegungsebenen oder zu *Axen* hat, wie diese Linien jetzt meistens genannt werden, und deren ganze Axen-Congruenz $[r_2]$, 3. Ordnung 1. Klasse, zum Complexe gehört.

Die Strahlen von T lassen sich auf ∞^9, die einer Sehnen- oder Axen-Congruenz auf ∞^6 Weisen zu je dreien zusammenstellen.

Der tetraedrale Complex enthält ∞^3 Sehnen- und ∞^3 Axen-Congruenzen von cubischen Raumcurven, von denen jede durch drei Strahlen des Complexes bestimmt ist.

Schneidet man die Trägerflächen von zwei Regelschaaren P_1 des T, welche eine Gerade gemein haben, so erhält man eine cubische Raumcurve r_1, deren Sehnen-Congruenz zu T gehört.

Alle ∞^2 Regelschaaren einer Sehnen-Congruenz $[r_1]$ sind P_1.

*) Eingehender wird über diese bekannte Sehnen-Congruenz einer cubischen Raumcurve (Reye, Geometrie der Lage, II, 12. Vortrag) in Nr. 309 gesprochen werden.

Jede P_1 gehört zu ∞^1 Sehnen-Congruenzen $[r_1]$; die Sehnen-Regelschaaren derselben sind diejenigen, die mit P_1 eine Gerade gemein haben.

Da jede r_1 auf $\infty^{2.2}$ Weisen Schnitt von zwei P_1-Trägerflächen ist, so liefern die ∞^4 Regelschaaren P_1 $\infty^{4+3-2.2}$ Congruenzen $[r_1]$, die ∞^3 Congruenzen $[r_1]$ aber ∞^{3+2-1} Regelschaaren P_1.

Analog ist der Zusammenhang zwischen den P_2 und $[r_2]$.

Zu den P_1 gehören die ∞^3 Complexkegel, zu den P_2 die ∞^3 Complexcurven. Jene, wie diese ergeben sich, wenn g' und g'' sich schneiden.

255 Nimmt man aus dem ∞^4-Systeme etwa der P_1 alle diejenigen ∞^2 heraus, welche einen bestimmten Strahl g_0 des T enthalten, so bilden die Trägerflächen, weil sie durch g_0 und die Ecken von T gehen, ein Netz und die g_0 enthaltenden Regelschaaren aller Flächen dieses Netzes gehören zu unserm Systeme, denn ihre Geraden sind Träger von projectiven Ebenenbüscheln, in denen allen die nach den Ecken von T gehenden Ebenen homolog sind.

Das vierfach unendliche System der Trägerflächen der Regelschaaren P_1 *von* T, *welches selbst nicht linear ist, enthält* ∞^3 *lineare Systeme 2. Stufe oder Netze. Jeder Strahl von* T *legt ein solches Netz fest.*

Zwei verschiedene von diesen Netzen haben eine Fläche gemein, welche diejenige P_1 trägt, die durch die beiden die Netze festlegenden Geraden g_0 bestimmt ist.

Dies führt zu folgender Erzeugung des tetraedralen Complexes:

Wenn die 3 Constituenten eines Netzes von Flächen 2. Grades eine Gerade g_0 *gemein haben, so durchschneiden sie sich bekanntlich noch in 4 Punkten,* den gemeinsamen Punkten der beiden cubischen Raumcurven, in denen eine der drei Flächen von den beiden andern geschnitten wird und welche beide diejenige Regelschaar der ersten Fläche, zu der g_0 gehört, zweimal treffen.

Nennen wir diese 4 Punkte A, B, C, D die *Grundpunkte* und g_0 die *Grundgerade* des Netzes.

Die beiden Regelschaaren sind auf jeder Fläche des Netzes geschieden: die eine enthält g_0, *die andere nicht. Folglich muss der Complex 3. Grades, welcher,* nach Nr. 6, *im allgemeinen durch die Geraden eines Flächennetzes 2. Ordnung gebildet wird, zerfallen. Die letzteren Regelschaaren erzeugen das Strahlengebüsche* $[g_0]$, *die ersteren hingegen den tetraedralen Complex mit dem Grundtetraeder* $ABCD$, *zu dem* g_0 *gehört.*

Die ∞^2 cubischen Raumcurven r_1 durch A, B, C, D, welche g_0 zweimal treffen, sind die beweglichen Bestandtheile der Grundcurven

der Büschel des Netzes. Jede Gerade g des Complexes ist Sehne für ∞^1 von diesen Curven, welche alle auf der g enthaltenden Fläche des Netzes liegen und in sie durch einen Büschel desselben eingeschnitten werden, zu dem die Fläche nicht gehört. Folglich bilden die Paare der Schnittpunkte der g mit diesen Curven eine Involution und für zwei ist sie eine Tangente.

Unser Complex ist also auch Ort der Sehnen und Tangenten aller cubischen Raumcurven durch A, B, C, D, welche g_0 zweimal treffen, und zwar ist jeder von seinen Strahlen Sehne für ∞^1, Tangente für 2 von diesen Curven.

Wenn g_0 den Complex durchläuft, so ändert sich das Flächennetz und der Raumcurven-Bündel; aber der zugehörige Complex der g_0 enthaltenden Regelschaaren der Flächen, der Sehnen der Raumcurven bleibt derselbe.

Wir wissen, dass eine cubische Raumcurve 12 Bedingungen erfüllen kann (Nr. 251). Bestehen diese aber aus den 6 Doppelbedingungen, dass die Curve durch 4 gegebene Punkte geht und 2 beliebig gegebene Geraden zu Sehnen hat, so giebt es keine cubische Raumcurve, die ihnen genügt. Vielmehr muss die zweite Gerade g'' dem durch die 4 Punkte und die erste Gerade g' bestimmten tetraedralen Complexe angehören, wenn es möglich sein soll. Dann aber genügen sofort ∞^1 cubische Raumcurven, welche die Fläche 2. Grades erfüllen, die in diesem Falle durch die 4 Punkte und die beiden Geraden gelegt werden kann; unter ihnen giebt es eine, welche noch eine beliebige dritte Gerade g''' des Complexes zur Sehne hat: die Schnittcurve der Flächen 2. Grades aus dem Netze mit der Grundgeraden g', welche durch g'', bezw. g''' gehen.*)

Diese Erzeugung führt auch zu tetraedralen Complexen, in denen das Tetraeder nicht vollständig reell ist.

Im tetraedralen Complexe haben wir *3 Arten von ∞^2 Strahlen-* 256
büscheln gefunden, welche je in 4 Systeme zerfallen (Nr. 252):

1) die Strahlenbüschel in den Ebenen des Tetraeders, 2) diejenigen aus seinen Ecken, 3) *diejenigen, welche ihren Scheitel in einer Ebene des Tetraeders haben und ihre Ebene durch die Gegenecke senden:* die zweiten Büschel der zerfallenden Complexkegel sowohl wie der zerfallenden Complexcurven.

Jedes der 4 Systeme von Strahlenbüscheln der dritten Art er-

*) Vergl. Journal für Mathematik Bd. 79 S. 109.

füllt den ganzen Complex; jeder Strahl desselben gehört zu einem dieser Strahlenbüschel.

Die Scheitel und Ebenen der Büschel eines Systems 3), z. B. desjenigen, das zu α und A gehört, machen das Feld in α und den Bündel aus A quadratisch verwandt, mit der besondern Eigenschaft, dass durchweg entsprechende Elemente incidiren.

In der That, wenn X wieder ein Punkt von α ist und A', B' auf CD dieselbe Bedeutung haben als in Nr. 253, so treffen die Strahlen des Büschels 3) aus X die Ebene β auf AA', also ist $\xi \equiv XAA'$ die Ebene des Büschels. Wenn X in α eine Gerade durchläuft, so bewegt sich B' perspectiv zu X und A' projectiv zu B' und zu X, also umhüllt ξ einen Kegel 2. Grades. Dieser Kegel berührt die 3 Tetraeder-Ebenen β, γ, δ; denn wenn X auf CD zu liegen kommt, fällt der zweite Büschel in β.

Beschreibt also die Ebene ξ im Bündel A einen Büschel, so durchläuft der zugehörige Punkt X in α einen Kegelschnitt, der dem Dreiecke BCD umgeschrieben ist; denn der zweite Büschel in einer durch AB gehenden Ebene des Bündels A hat seinen Scheitel in B.

Die 3 Punkte B, C, D in α und die 3 Ebenen β, γ, δ von A sind also die Hauptelemente dieser quadratischen Verwandtschaft, d. h. diejenigen, denen ∞^1 entsprechen: dem Punkte B alle Ebenen durch AB, der Ebene β alle Punkte auf $\alpha\beta \equiv CD$.

Schneidet man die Ebene α mit dem Bündel A, so *hat man in α ein quadratisches ebenes Nullsystem* (Nr. 51), *in dem jedem Punkte X von α die Doppellinie des Strahlenbüschel-Paares zugeordnet ist, in das sein Complexkegel zerfällt.*

Und perspectiv dazu ist das Nullsystem 2. Grades im Bündel A, in welchem jeder Ebene dieses Bündels die Doppellinie des Strahlenbüschel-Paares correspondirt, welches ihre Complexcurve bildet.

Wir erhalten ∞^3 Strahlenbüschel-Paare unter den Regelschaaren P_1 oder P_2, wenn wir einen Strahlenbüschel 3) mit einem 1) oder 2) zusammenstellen, mit dem er einen Strahl gemein hat.

Hingegen zwei Strahlenbüschel 3) aus verschiedenen Systemen, welche einen gemeinsamen Strahl haben, bilden keine Ausartung von P_1 oder P_2.

257 Die Projectivität zweier Strahlenbüschel, wie (A, β) und (B, α), welche durch einen zum Tetraeder T gehörigen Reye'schen Complex bewirkt wird, führt zu einer sehr einfachen, in sich dualen Erzeugung dieses Complexes, welche *die Erweiterung der Sylvester'schen Erzeugung des linearen Complexes* ist, aber, wenn man nur reelle Con-

structionen zulässt, nur zu solchen tetraedralen Complexen führt, bei denen mindestens 2 Ecken (A, B) des Tetraeders, so wie ihre Gegenebenen reell sind:

Alle Strahlen, welche zwei homologe Strahlen von zwei projectiven Strahlenbüscheln zugleich treffen, erzeugen einen tetraedralen Complex.

Es seien (A, β), (B, α) die beiden Strahlenbüschel und C, D die beiden sich selbst entsprechenden Punkte der conjectiven Punktreihen, die sie auf $\alpha\beta$ hervorrufen. Wenn dann x, y irgend zwei Strahlen des erzeugten Complexes, x_1, x_2; y_1, y_2 die von ihnen getroffenen homologen Strahlen der beiden Büschel und X_1, X_2; Y_1, Y_2 deren Schnittpunkte mit $\alpha\beta$ sind, so hat man:

$$x(A, B, C, D) = (X_1, X_2, C, D), \; y(A, B, C, D) = (Y_1, Y_2, C, D);$$

nun ist aber:

$$(X_1, Y_1, C, D) = (X_2, Y_2, C, D),$$

also auch

$$(X_1, X_2, C, D) = (Y_1, Y_2, C, D)$$

und:

$$x(A, B, C, D) = y(A, B, C, D);$$

folglich senden zwei beliebige Strahlen des Erzeugnisses projective Ebenenwürfe nach A, B, C, D.*)

Haben die beiden Büschel aber einen gemeinsamen Strahl, der sich in der projectiven Beziehung überdies selbst entspricht, dann zerfällt der tetraedrale Complex in das Strahlengebüsche, das jenen Strahl zur Axe hat, und ein Gewinde; womit wir also eine Ausartung unseres Complexes kennen lernen.

Eine zweite Erzeugung des tetraedralen Complexes, bei welcher 258
man die nämliche Voraussetzung hinsichtlich der Realität über die Elemente des Tetraeders zu machen hat, ist folgende, zu der es dann noch eine duale giebt:

Ein Punktfeld und ein Strahlenbündel seien collinear auf einander bezogen. Von jedem Punkte des Feldes ziehe man die Strahlen, welche den entsprechenden Strahl des Bündels schneiden. Alle diese Strahlenbüschel erzeugen einen tetraedralen Complex.

Es sei A der Scheitel des Bündels, α die Ebene des Feldes;

*) Direct ist diese einfache Erzeugung zuerst von Hirst ausgesprochen: On the complexes generated by two correlative planes, Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini und Proc. London Math. Soc. Bd. 10 (die projectiven Büschel bilden eine Ausartung correlativer Räume); indirect aber ist sie schon in dem von Reye (Geometrie der Lage 1. Aufl. Abth. II, S. 121) gefundenen Satze über die Projectivität der Büschel (A, β), (B, α) enthalten.

ferner seien B, C, D in α die Punkte, durch welche die entsprechenden Strahlen von A gehen, oder, da der Bündel in α ein zweites zum gegebenen collineares Feld α' hervorruft, die 3 sich selbst entsprechenden Punkte von α und α'. *Für zwei collineare Felder der nämlichen Ebene* besteht aber folgender Satz:

Sämmtliche Strahlenwürfe, die von den verschiedenen Punkten X des einen Feldes α nach den 3 sich selbst entsprechenden Punkten B, C, D und je nach dem entsprechenden Punkte X' gehen, sind unter einander projectiv.

Wenn nämlich X, X'; Y, Y' zwei Paare entsprechender Punkte sind, so sei E der vierte Schnitt der beiden homologen Kegelschnitte $BCDXY$, $BCDX'Y'$ und O, O' zwei weitere entsprechende Punkte dieser Curven; dann hat man:

$$E(B, C, D, X, Y) \barwedge O(B, C, D, X, Y)$$
$$\barwedge O'(B, C, D, X', Y') \barwedge E(B, C, D, X', Y');$$

also liegen sowohl X und X', als auch Y und Y' mit E in gerader Linie. Folglich ist:

$$X(B, C, D, E) \barwedge Y(B, C, D, E)$$

identisch mit:

$$X(B, C, D, X') \barwedge Y(B, C, D, Y').$$

Sind nun x, y zwei Strahlen unseres Complexes, welche bezw. mit den entsprechenden Elementen X, AX'; Y, AY' von Feld und Bündel incidiren, so geht die Ebene xA durch X', yA durch Y' und es ist:

$$x(A, B, C, D) \barwedge y(A, B, C, D).$$

Damit ist der Complex als tetraedraler erkannt, und *die 4 Punkte A, B, C, D bilden sein Tetraeder.*

Es seien X und x' im Punktfeld und Strahlenbündel entsprechend, so gehört, wenn $\xi' \equiv Xx'$ ist, der Strahlenbüschel (X, ξ') zum erzeugten Complexe. Der Ebene ξ' als einer durch x' gehenden Ebene des Bündels entspricht im Felde eine durch X gehende Gerade; also ist (X, ξ') zugleich der Strahlenbüschel in einer Ebene des Bündels um den Spurpunkt der entsprechenden Geraden des Feldes.

Mit unserer Erzeugung ist die zu ihr duale so verbunden, dass die bei beiden erzeugten Strahlenbüschel die nämlichen sind.

259 Weil die Zahl der Tetraeder ∞^{12} ist und jedem ∞^1 Werthe des constanten Doppelverhältnisses zugeordnet werden können, so erhellt, dass *es ∞^{13} tetraedrale Complexe giebt.*

Jeder tetraedrale Complex kann nur auf 6 Weisen vermittelst zweier projectiver Strahlenbüschel erzeugt werden, also muss diese Erzeugung auch zur Mannigfaltigkeit 13 führen. In der That, man kann die ∞^5 Strahlenbüschel des Raums auf ∞^{10} Weisen zu zweien zusammenstellen; und bei jedem Paare sind dann noch ∞^3 projective Beziehungen möglich.

Wir haben ∞^3 Felder und ∞^3 Bündel, die man also auf ∞^6 Weisen combiniren kann; und jedesmal sind dann noch ∞^8 Collineationen möglich; wir gelangen so zur Mannigfaltigkeit 14. Dieselbe lehrt, dass *jeder tetraedrale Complex auf ∞^1 Weisen durch ein Feld und einen Bündel erzeugt werden kann, die collinear sind.*

In der That, wenn (X_0, ξ_0) irgend ein Strahlenbüschel des Complexes aus dem dritten Systeme, der seinen Scheitel in der Tetraeder-Ebene α hat und dessen Ebene also durch A geht, und x_0 ein beliebiger Strahl des Büschels (A, ξ_0) ist, so beziehen wir das Feld α und den Bündel A so collinear, dass den Punkten B, C, D, X_0 die Strahlen $A(B, C, D), x_0$ entsprechen; der erzeugte Complex hat mit dem gegebenen das Tetraeder und den Büschel (X_0, ξ_0) gemein, ist also mit ihm identisch. Lassen wir x_0 den Büschel (A, ξ_0) durchlaufen, so erhalten wir ∞^1 Collineationen. Sie haben 3 Paare entsprechende Elemente gemeinsam: $B, C, D; A(B, C, D)$; ausserdem ist dem Punkte X_0 eine feste Ebene ξ_0 zugeordnet, in der alle entsprechenden Strahlen x_0 liegen.

Das gilt für jeden Punkt X von α, und diese zugeordneten Ebenen ξ stehen zu den X in der oben erwähnten reciproken Verwandtschaft 2. Grades, welche demnach diejenige ist, die man, nach Reye,*) aus zwei beliebigen von den Collineationen ableiten kann.

Wenn x_0 bei seiner Bewegung in (A, ξ_0) in eine der drei durch A gehenden Tetraeder-Ebenen, etwa in β, kommt, dann entsprechen den drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten C, D, X_0 drei Strahlen AC, AD, x_0, welche in eine Ebene fallen. Unter solchen Umständen artet, wie wir binnen kurzem in einer ausführlichen Betrachtung über ausartende Collineationen darthun werden, die Collineation derartig aus, dass die beiden Büschel (A, β), (B, α) projectiv werden und einem beliebigen Punkte X von α derjenige Strahl von (A, β) im Bündel A correspondirt, dessen in dieser Projectivität entsprechender Strahl von (B, α) den X enthält. Also trifft jeder Strahl des Complexes dann zwei entsprechende Strahlen von (A, β) und (B, α), und die Erzeugung des tetraedralen Complexes durch zwei

*) Geometrie der Lage, II. 16. Vortrag.

projective Strahlenbüschel zeigt sich so als besonderen Fall derjenigen durch Feld und Bündel, welche collinear sind.

II.

260 *Eine noch allgemeinere wiederum in sich duale Erzeugung, bei welcher alle 4 Ecken des Tetraeders imaginär sein können, ist die Reye'sche*) vermittelst zweier collinearer Räume Σ und Σ'.*

Bei derselben entsteht der Complex auf dreierlei Weise: er ist erstens der Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte, zweitens der Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen, drittens der Ort der Geraden des einen oder andern Raums, welche ihre entsprechenden schneiden.

Wir haben zunächst die *Identität dieser Oerter* zu beweisen. Wenn X, X' zwei entsprechende Punkte sind, so wird die Gerade XX' als y oder z' von Σ, bezw. Σ' von ihrer entsprechenden y' oder z im Punkte X', bezw. X getroffen und der Ebene yz entspricht $y'z'$, so dass XX' auch Schnittlinie der zwei entsprechenden Ebenen ist, welche sie mit ihren beiden entsprechenden Geraden verbinden.

Dual erkennt man, dass eine solche Schnittlinie von ihren beiden entsprechenden Geraden getroffen wird und zwei entsprechende Punkte verbindet, die in sie durch diese Geraden eingeschnitten werden.

Sind endlich x und x' zwei sich schneidende homologe Geraden, so entspricht dem Punkt $Y' \equiv xx'$ ein auf x gelegener Punkt Y, also verbindet x die Punkte Y und Y'; der Ebene $\xi' \equiv xx'$ entspricht eine durch x gehende Ebene ξ und x ist somit Schnitt dieser beiden homologen Ebenen. Ist u' die mit $x \equiv YY'$ identische Gerade von Σ', so muss u durch Y gehen und demnach $u' \equiv x$ treffen. Wenn also eine Gerade, zu dem einen Raume gehörig, ihre entsprechende schneidet, so thut sie es auch als Gerade des andern Raums.

Durch jeden Punkt $Y \equiv Z'$ des Raumes gehen die beiden entsprechenden Geraden YZ, $Y'Z'$ und *der Kegel unseres Complexes* aus ihm ist der, welcher durch die beiden projectiven entsprechenden Ebenenbüschel um sie erzeugt wird. Ebenso liegen in jeder Ebene zwei homologe Geraden und die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf ihnen umhüllen *die Complexcurve* der Ebene. Folglich ist der Complex *vom 2. Grade.*

Alle jene Kegel gehen ersichtlich durch *die 4 sich selbst entsprechenden Punkte A, B, C, D der Collineation* und die Bündel um

*) Geometrie der Lage 2. Abtheilung 15. Vortrag in der 1., 18. Vortrag in der 2. Auflage.

diese Punkte gehören, da jeder von ihren Strahlen zwei vereinigte homologe Punkte verbindet, ganz zum Complexe. Ebenso berühren die 4 sich selbst entsprechenden Ebenen α, β, γ, δ alle Kegelschnitte des Complexes und ihre Strahlenfelder gehören vollständig zu ihm.

Wenn $\xi\xi' \equiv x$ und $\eta\eta' \equiv y$ zwei Strahlen des Complexes sind, so sind die Geraden $\xi\eta$ und $\xi'\eta'$ in der Collineation entsprechend; und die projectiven Ebenenbüschel um sie erzeugen eine im Complexe befindliche Regelschaar, zu welcher x und y gehören und deren Trägerfläche durch A, B, C, D geht, weil, wenn die eine von zwei homologen Ebenen durch A geht, auch die andere es thut. Also werden diese 4 Punkte (oder die durch sie gehenden Geraden der Leitschaar) aus x und y durch projective Ebenenwürfe projicirt.

Damit ist der Complex als *ein tetraedraler* erkannt.

Zur Leitschaar gehören die Axen $\xi\eta$ und $\xi'\eta'$ der beiden er- 261
zeugenden Ebenenbüschel; mithin sind auch die beiden Ebenenwürfe (ξ, ξ', xA, xB) und (η, η', yA, yB), durch welche diese Geraden und die beiden durch A, B gehenden Geraden der Leitschaar aus x und y projicirt werden, projectiv.

Folglich haben die 6 Ebenenwürfe, welche aus einem Strahle des Complexes T *kommen und aus den beiden in ihm sich schneidenden homologen Ebenen und den Ebenen nach zwei Ecken des Haupttetraeders der Collineation oder des Grundtetraeders von* T *bestehen, constantes Doppelverhältniss.*

Bezeichnen wir das invariante Doppelverhältniss (ξ, ξ', xA, xB) mit λ_{AB} und ähnlich in den andern Fällen, so ist ersichtlich z. B.:

$$\lambda_{CD} = \lambda_{AD} : \lambda_{AC} = \lambda_{AD} \cdot \lambda_{CA},$$

so dass durch 3, etwa λ_{AB}, λ_{AC}, λ_{AD}, die übrigen sich ausdrücken lassen.

Dual haben wir *6 invariante Punkt-Doppelverhältnisse* auf jedem Complexstrahle: die Punktwürfe bestehen aus den zwei entsprechenden Punkten X, X', die der Strahl verbindet, und den Schnitten mit zwei Ebenen des Haupttetraeders; wir bezeichnen diese Invarianten durch $\lambda_{\alpha\beta}, \ldots$.

Man erkennt leicht, dass:

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{\alpha\beta} = 1;$$

denn sind X und X' zwei entsprechende Punkte auf AB, so sind die Ebenen aus CD nach ihnen auch homolog. Nun ist aber

$$\lambda_{AB} = CD\,(XX'AB) = (XX'AB), \quad \lambda_{\alpha\beta} \equiv (XX'BA),$$

Zwischen λ und diesen Invarianten besteht eine einfache Be-

ziehung. Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ die Schnitte eines Strahles XX' von T mit α, β, γ, δ, so ist:

$$(X\mathfrak{A}X'\mathfrak{C}) = 1 - (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = 1 - \lambda_{\alpha\gamma}, \; (X\mathfrak{A}X'\mathfrak{D}) = 1 - \lambda_{\alpha\delta}, \ldots;$$

also:

$$\lambda = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = \frac{1-\lambda_{\alpha\gamma}}{1-\lambda_{\alpha\delta}} : \frac{1-\lambda_{\beta\gamma}}{1-\lambda_{\beta\delta}} = \frac{1-\lambda_{AC}}{1-\lambda_{AD}} : \frac{1-\lambda_{BC}}{1-\lambda_{BD}}. *)$$

Die Bedingung, damit eine Collineation eine eigentliche Hermite'sche Transformation sei, also sowohl Gewinde, als auch Flächen 2. Grades in sich selbst transformire und zwar letztere so, dass jede der beiden Geradenschaaren in sich übergeht, (Nr. 236) lässt sich leicht durch eine Beziehung zwischen Invarianten ausdrücken. Wenn die in sich transformirten Flächen 2. Grades durch das Kantenvierseit $ABCD$ gehen, F^2 eine von ihnen ist und X und X' zwei entsprechende Punkte auf ihr sind, so hat man:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = CD(X, X', CB, DA), \; (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C}) = AB(X, X', CB, DA);$$

da aber das Vierseit $ABCD$ und X, X' auf F^2 liegen, so ist:

$$CD(X, X', CB, DA) = AB(X, X', CB, DA);$$

also ist:

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\delta\gamma}$$

die gesuchte Bedingung.

Und umgekehrt, wenn sie von einer Collineation erfüllt wird, so liegen stets zwei homologe Punkte X, X' auf einer Fläche 2. Grades durch das Vierseit $ABCD$.

Die Bedingung bedeutet auch, dass auf jedem Complexstrahle die Punktepaare XX', $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ in Involution sind.

262 Die obige Regelschaar, welche durch die Büschel um die entsprechenden Strahlen $\xi\eta$, $\xi'\eta'$ erzeugt wurde, ist ersichtlich eine P_1.

Die ∞^4 Paare entsprechender Geraden der Collineation geben uns durch die Schnittlinien der homologen Ebenen, welche durch sie gehen, die ∞^4 Regelschaaren P_1 und durch die Verbindungslinien der homologen Punkte auf ihnen die ∞^4 Regelschaaren P_2.

Jede von diesen Schaaren ist, wie wir wissen, durch 2 Strahlen bestimmt: je nachdem wir diese als Schnittlinien $\xi\xi'$, $\eta\eta'$ oder als Verbindungslinien XX', YY' auffassen, sind die entsprechenden Geraden $\xi\eta$, $\xi'\eta'$, bezw. XY, $X'Y'$ diejenigen, die zur P_1, bezw. P_2 führen.

*) H. Küppers, Collineationen, durch welche fünf gegebene Punkte des Raumes in dieselben fünf Punkte transformirt werden, Dissertation von Münster, 1890.

Jede zwei entsprechende Punkte von Σ, Σ' führen durch die Schnittlinien der entsprechenden Ebenen ihrer collinearen Bündel zu einer im Complexe befindlichen Sehnen-Congruenz einer cubischen Raumcurve, welche durch A, B, C, D geht. Durch 3 Strahlen $\xi\xi'$, $\eta\eta'$, $\zeta\zeta'$ des Complexes ist eine solche Congruenz bestimmt: die erzeugenden Bündel haben die Scheitel $\xi\eta\zeta$, $\xi'\eta'\zeta'$.

Dies giebt *die* ∞^3 *Congruenzen* $[r_1]$.

Wenn die entsprechenden Punkte auf einer Kante des Haupttetraeders, etwa auf CD, liegen, so haben die Bündel einen sich selbst entsprechenden Strahl und erzeugen ein Strahlennetz (Nr. 79); seine Leitgeraden gehören den Büscheln (A, β), (B, α) an (Nr. 253).

Alle ∞^2 Regelschaaren P_1, welche von den homologen Strahlen durch zwei entsprechende Punkte herrühren, befinden sich in der Sehnen-Congruenz $[r_1]$, die zu diesen Punkten gehört.

Jede Regelschaar P_1 ist in ∞^1 Sehnen-Congruenzen enthalten, welche zu den entsprechenden Punkten gehören, die auf den zur P_1 führenden homologen Geraden liegen.

Zwei $[r_1]$ haben stets eine P_1 gemein; wenn jene zu X, X', bezw. Y, Y' gehören, so gehört diese zu den Geraden XY, $X'Y'$.

Zwei P_1 hingegen befinden sich im allgemeinen nicht in derselben $[r_1]$.

Zu den Axen-Congruenzen $[r_2]$ *führen die collinearen Punktfelder in zwei entsprechenden Ebenen von* Σ, Σ'.

Sind $\xi\eta$ und $\xi'\eta'$ zwei entsprechende Geraden von Σ, Σ', so gehören sie zu der Leitschaar der von ihnen erzeugten Regelschaar P_1; dieselbe enthält, ebenso wie P_1, je eine durch A, B, C, D gehende Gerade; folglich rufen diese 6 Geraden um die zu P_1 gehörigen Complexstrahlen $x \equiv \xi\xi'$, $y \equiv \eta\eta'$ projective Ebenenbüschel hervor; also:

$$x(A, B, C, D, \xi, \xi') \barwedge y(A, B, C, D, \eta, \eta')$$

und ebenso:

$$x(\alpha, \beta, \gamma, \delta, X, X') \barwedge y(\alpha, \beta, \gamma, \delta, Y, Y').$$

In den projectiven Ebenenbüscheln um die Complexstrahlen, in denen sich die Ebenen nach den Ecken des Tetraeders entsprechen, entsprechen sich auch je die zu demselben der beiden collinearen Räume gehörigen Ebenen, deren Schnitte mit je der entsprechenden Ebene die Complexstrahlen sind, und duales gilt hinsichtlich der Punktreihen auf den Complexstrahlen.

Wenn (S, σ) und (S', σ') zwei entsprechende Strahlenbüschel in Σ, Σ' sind, so haben die Regelschaaren P_1, welche zu ihren homologen Strahlen gehören, die Gerade $\sigma\sigma'$ gemein und befinden sich 263

sämmtlich in der Sehnen-Congruenz $[r_1]$, welche von den Bündeln S und S' erzeugt wird. Also bilden die Trägerflächen einen Büschel, dessen Basis aus $\sigma\sigma'$ und r_1 besteht.

Da zwei von ihnen eine beliebige Gerade berühren, so wird in jedem der beiden Räume ein Complex 2. Grades τ^2 durch diejenigen Strahlen erzeugt, welche je mit ihrer entsprechenden Geraden zu einer Regelschaar führen, deren Trägerfläche eine gegebene Gerade berührt.

Die Geraden von Σ hingegen, welche je mit der entsprechenden eine P_1 hervorbringen, die durch einen gegebenen Punkt $P \equiv Q'$ geht, müssen die Gerade $g \equiv PQ$ treffen, welche sich mit ihrer homologen $g' \equiv P'Q'$ im Punkte schneidet.

Demnach ist die Anzahl der Trägerflächen $\mathfrak{R}_1$ von P_1, welche den Bedingungen μ^4, $\nu\mu^3$, $\nu^2\mu^2$, $\nu^3\mu$, ν^4 genügen (vergl. Nr. 232), gleich der Zahl der Geraden von Σ (oder Σ'), welche zu 0, 1, 2, 3, 4 gewissen Complexen τ^2 gehören und auf 4, 3, 2, 1, 0 gegebene Geraden sich stützen, also, nach Nr. 35, gleich $2 . 1^4$, $2 . 1^3 . 2$, $2 . 1^2 . 2^2$, $2 . 1 . 2^3$, $2 . 2^4$, folglich 2, 4, 8, 16, 32.

Die Verdoppelung lässt sich auch damit begründen, dass eine Regelschaar P_1 nur in die Kantenreihe eines Kegels 2. Grades, nicht in den Tangentenbüschel eines Kegelschnittes ausarten kann, in einem Systeme aber 1. Stufe von Flächen 2. Grades, das von höheren Ausartungen frei ist und auch keine zu einem Kegelschnitte ausgeartete Fläche enthält (Nr. 20), die Zahl ν der eine Gerade berührenden Flächen immer doppelt so gross als die Zahl μ der durch einen Punkt gehenden, d. h. z. B. in dem unserm Systeme 4. Stufe entnommenen System 1. Stufe, dessen Flächen die Bedingung $\nu\mu^2$ erfüllen,

$$\nu^2\mu^2 = 2\nu\mu^3$$

ist.

Die Ebenen in Σ, welche je mit ihrer entsprechenden sich in Geraden schneiden, die in eine gegebene Ebene fallen, umhüllen eine abwickelbare Fläche 3. Klasse; denn die durch einen Bündel in Σ und seinen entsprechenden in Σ' erzeugte Sehnen-Congruenz hat 3 Strahlen in der Ebene. Dieser Torsus berührt die 4 Ebenen des Tetraeders.

Wenn aber eine $\mathfrak{R}_1$ eine Ebene berührt, so wirft die P_1 eine Gerade in dieselbe. Begnügen wir uns zunächst damit, dass den $\mathfrak{R}_1$ die Bedingung ϱ, eine gegebene Ebene zu berühren, nur einmal auferlegt wird, also mit den Bedingungen $\mu^3\varrho$, $\nu\mu^2\varrho$, $\nu^2\mu\varrho$, $\nu^3\varrho$, so haben wir, weil die Geraden, welche in den Berührungsebenen einer abwickelbaren Fläche 3. Klasse liegen, einen Complex 3. Grades τ^3 erzeugen, wiederum nach Nr. 35, $2 . 1^3 . 3$, $2 . 2 . 1^2 . 3$, $2 . 2^2 . 1 . 3$, $2 . 2^3 . 3$ oder 6, 12, 24, 48 Gerade, welche sich auf 3, 2, 1, 0 Gerade

stützen, 0, 1, 2, 3 Complexen τ^2 und einem Complexe τ^3 angehören. Sie führen zu den P_1, deren $\mathfrak{R}_1$ den obigen 4 Bedingungen genügen.

Die Charakteristik $\mu^2\varrho^2$ ist gleich der Zahl der Geraden, welche sich auf 2 Gerade stützen und zwei Torsen 3. Klasse, welche 4 gemeinsame Berührungsebenen haben, tangiren oder dual zwei cubische Raumcurven mit 4 gemeinsamen Punkten treffen. Nach Nr. 9 ist diese Zahl 14, da von den Zahlen μ, σ dieser Nr. $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_3 = \mu_4 = 3$, $\sigma_{34} = 4$, die übrigen 0 sind. Daraus folgt wieder:

$$\nu\mu\varrho^2 = 28,\ \nu^2\varrho^2 = 56.$$

Es verbleiben noch: $\mu\varrho^3$, $\nu\varrho^3$, ϱ^4 (von denen die zweite doppelt so gross ist als die erste). In Bezug auf sie begnüge ich mich hier, ihre Werthe anzugeben: 22, 44, 30, indem ich auf die an anderer Stelle*) gemachte Ermittelung, so wie auf die beiden Relationen verweise, welche nach Schubert**) zwischen den 15 Charakteristiken eines Systems 4. Stufe von Flächen 2. Grades bestehen.

Diese 15 Charakteristiken sind also für das ∞^4-System der Trägerflächen der $\mathfrak{R}_1$ der Regelschaaren P_1 eines tetraedralen Complexes die folgenden:

$$\mu^4 = 2,\ \mu^3\varrho = 6,\ \mu^2\varrho^2 = 14,\ \mu\varrho^3 = 22,\ \varrho^4 = 30;$$
$$\nu\mu^3 = 4,\ \nu\mu^2\varrho = 12,\ \nu\mu\varrho^2 = 28,\ \nu\varrho^3 = 44;$$
$$\nu^2\mu^2 = 8,\ \nu^2\mu\varrho = 24,\ \nu^2\varrho^2 = 56;$$
$$\nu^3\mu = 16,\ \nu^3\varrho = 48;$$
$$\nu^4 = 32,$$

und für das System der Trägerflächen der P_2 die dualen.

Weil es ∞^{15} Collineationen und nur ∞^{13} tetraedrale Complexe 264
giebt, so *muss jeder tetraedrale Complex* T *durch* ∞^2 *Collineationen hervorgebracht werden können.*

In der That, jede Collineation, für welche das Grundtetraeder T des Complexes Haupttetraeder ist und irgend zwei Ebenen ε, ε' durch einen beliebigen Complexstrahl (oder zwei Punkte auf ihm) homolog sind, erzeugt T; da er eben durch jenes und den Strahl $\varepsilon\varepsilon'$ eindeutig bestimmt ist.

Ist ε'' eine dritte Ebene durch $\varepsilon\varepsilon'$, so erhalten wir einen dritten Raum Σ'', der zu Σ und Σ' so collinear ist, dass in allen dreien die

*) Mathem. Annalen Bd. 28 S. 274.

**) Kalkül der abzählenden Geometrie S. 79 F. XI und XII.

Ecken und Ebenen von T sich selbst, die drei Ebenen ε, ε', ε'' aber einander entsprechen.

Beweisen wir nun noch direct, dass jede drei homologen Ebenen ξ, ξ', ξ'' in eine Gerade zusammenlaufen. Die beiden projectiven Ebenenbüschel um $\varepsilon\xi$ und $\varepsilon'\xi'$ erzeugen ein Hyperboloid, das durch $\varepsilon\xi$, die Gerade $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''$ und die 4 Ecken von T geht; das bei $\varepsilon\xi$ und $\varepsilon''\xi''$ sich ergebende geht ebenfalls durch jene beiden Geraden und diese 4 Punkte, ist also, weil letztere nicht in einer Ebene liegen, mit dem vorigen identisch. Folglich sind auch die zweiten Geraden $\xi\xi'$ und $\xi\xi''$, welche von ξ aus diesen Hyperboloiden, ausser $\varepsilon\xi$, ausgeschnitten werden, identisch; d. h. aber, ξ, ξ', ξ'' gehen durch dieselbe Gerade.

Dreht sich nun ε'' um $\varepsilon\varepsilon'$, so dreht sich ξ'' um $\xi\xi'$ und *wir erhalten* ∞^1 *Räume* Σ'', *welche alle zu* Σ *und* Σ' *collinear sind; die entsprechenden Ebenen aller dieser Räume bilden je einen Ebenenbüschel und die Axen dieser Büschel erzeugen den tetraedralen Complex, der also allen den* ∞^2 *Collineationen gemeinsam ist, welche durch Zusammenstellung zweier von diesen* ∞^1 *Räumen sich ergeben.*

Diese Collineationen erhalten wir auch, wenn wir die beiden die Collineation endgiltig bestimmenden Ebenen ε, ε' durch irgend einen Strahl von T verändern, was auf ∞^2 Weisen möglich ist.

Unter diesen ∞^2 *Collineationen ergeben sich* ∞^1 *Ausartungen erster Ordnung* (oder vom ersten Typus), wenn blos eine der beiden Ebenen ε, ε' durch eine der Ecken von T geht, *und 6 Ausartungen zweiter Ordnung,* wenn beide je eine Ecke enthalten.

Nehmen wir an, dass ε' durch A geht, dann laufen die 4 Ebenen β, γ, δ, ε' in einen Punkt A zusammen, während das für die entsprechenden Ebenen β, γ, δ, ε nicht gilt. Dies führt zu einer Ausartung der Collineation zwischen zwei Räumen, welche der Hauptsache nach eine Collineation zwischen einem Ebenenbündel und einem Strahlenfelde ist.

265 Weil die Ausartungen der räumlichen Collineation weniger bekannt sind, so scheint eine eingehendere Behandlung erforderlich.

Wenn zwei Punktreihen durch das Entsprechen von A, B, C und A', B', C' in projective Beziehung gebracht werden und der besondere Fall eintritt, dass B' und C' identisch sind, dann artet die Projectivität aus: *jede der beiden Reihen hat einen singulären Punkt* A, *bezw.* B', *dem dann alle Punkte der andern Reihe entsprechen.**)

**) Steiner-Schröter's Vorlesungen über synthetische Geometrie § 19 Anfang.

Werden ferner die Felder σ und σ' durch das Entsprechen von a, b, c, d mit a', b', c', d' collinear gemacht, so haben wir auf a und a' projective Punktreihen, in denen die Spuren von b, c, d denen von b', c', d' entsprechen, und ebenso auf b und b' projective Punktreihen mit $b(a, c, d)$ und $b'(a', c', d')$ als homologen Punkten; so dass ab und $a'b'$ in beiden Fällen entsprechend sind. Zu den Schnitten einer beliebigen Geraden x mit a, b werden die correspondirenden auf a', b' ermittelt; ihre Verbindungslinie ist die homologe Gerade x'.

Wenn aber b', c', d' in einen Punkt A' zusammenlaufen, während b, c, d es nicht thun; dann ist zwar die Projectivität zwischen a und a' nach wie vor allgemein, diejenige aber zwischen b und b' ist ausgeartet und zwar derart, dass ba und A' die singulären Punkte sind. Dem Punkte bx entspricht also A' und x' verbindet diesen Punkt mit demjenigen Punkte auf a', der in der ersteren Projectivität dem ax entspricht. Dreht sich mithin x um einen Punkt von a, so bleibt x' fest. Der Strahlenbüschel A', der zur Punktreihe a' perspectiv ist, wird zur a projectiv; einer beliebigen Geraden x von σ entspricht in σ' derjenige Strahl des Büschels A', der in dieser Projectivität dem Schnittpunkte von x mit der Geraden a correspondirt.

Weil dem ba als singulärem Punkte von b jeder beliebige Punkt auf b' entspricht, der Schnitt von a mit a und also auch sein homologer Punkt auf a' unbestimmt ist, so entspricht der a jede beliebige Gerade in σ'.

*Wir haben also in dem einen Felde σ eine singuläre Gerade a, in dem andern σ' einen singulären Punkt A', und die Collineation zwischen σ und σ', so weit sie sich auf die Geraden der beiden Felder bezieht, ist folgendermassen ausgeartet: Die Punktreihe a und der Büschel A' sind projectiv (mit $a(b, c, d)$ und b', c', d' als entsprechenden Elementen), einer beliebigen Geraden x von σ entspricht in σ' derjenige Strahl von A', der in dieser Projectivität dem Schnittpunkte von x mit der singulären Geraden a correspondirt, weshalb jeder Strahl von A' ∞^1 homologe Strahlen in σ hat; der Geraden a aber entspricht jede beliebige Gerade in σ'.**)

Ersetzt man die Strahlenfelder durch die Punktfelder und projicirt das eine Punktfeld in einen Strahlenbündel, so hat man den oben in Nr. 259 vorkommenden Fall der Collineation zwischen einem Punktfelde $\sigma(\alpha)$**) und einem Strahlenbündel $S'(A)$, bei welcher 4 belie-

*) Hirst, Proceed. London Math. Soc. Bd. 5 S. 40 Nr. 14. Hinsichtlich der Punkte ergiebt sich daraus folgendes Entsprechen: einem beliebigen Punkte von σ entspricht der singuläre Punkt A'; einem auf a gelegenen Punkte aber entsprechen alle ∞^1 Punkte desjenigen Strahls von A', der dem Punkte in der Projectivität zwischen a und A' correspondirt.

**) In den Klammern stehen die früheren Namen.

bigen Punkten A, B, C, D (B, C, D, X) von σ 4 Strahlen a', b', c', d' (AB, AC, AD, x_0) in S' entsprechen, von denen b', c', d' in eine Ebene $\alpha'(\beta)$ fallen. Wir haben dann in σ einen singulären Punkt A, in S' eine singuläre Ebene α', also in beiden einen singulären Strahlenbüschel (A, σ), bezw. (S', α') und die Collineation zwischen σ und S' ist so ausgeartet, dass jedem Punkte X von σ der Strahl von (S', α') correspondirt, der in einer bestimmten Projectivität zwischen den beiden Strahlenbüscheln — die durch das Entsprechen der Strahlen $A(B, C, D)$ und der b', c', d' festgelegt ist — dem den X enthaltenden Strahle von (A, σ) homolog ist; dem A entsprechen alle Strahlen von S'.

266 Um zwei Räume Σ, Σ' collinear zu machen, lässt man den Ebenen α, β, γ, δ, ε die Ebenen α', β', γ', δ', ε' correspondiren. Auf α und α' erhält man zwei collineare Felder, in welchen den Geraden $\alpha(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ die Geraden $\alpha'(\beta', \gamma', \delta', \varepsilon')$ entsprechen, und ebenso in β und β', wobei den $\beta(\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon)$ die $\beta'(\alpha', \gamma', \delta', \varepsilon')$ homolog sind. In beiden Fällen ist die Projectivität auf $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ die nämliche; in ihr entsprechen den Punkten $\alpha\beta(\gamma, \delta, \varepsilon)$ die Punkte $\alpha'\beta'(\gamma', \delta', \varepsilon')$. Eine beliebige Ebene ξ schneiden wir mit α, β, suchen die entsprechenden Geraden in α', β', welche sich auf $\alpha'\beta'$ in dem dem Punkte $\alpha\beta\xi$ entsprechenden Punkte schneiden müssen; ihre Verbindungsebene ist die ξ'.

Wenn nun aber β', γ', δ', ε' durch einen Punkt A' gehen, während β, γ, δ, ε es nicht thun; so bleibt die Collineation zwischen α und α' allgemein, diejenige aber zwischen β und β' artet aus, so dass β eine singuläre Gerade $\beta\alpha$ und β' einen singulären Punkt A' hat. Ist ξ wieder eine beliebige Ebene von Σ, so entspricht der Geraden $\xi\beta$ eine durch A' gehende Gerade und die Ebene ξ', die deshalb auch durch A' gehen muss, verbindet diesen Punkt mit derjenigen Geraden von α', welche in der Collineation zwischen α und α' der $\alpha\xi$ homolog ist. Infolge dieser Collineation wird auch der Bündel A' zu α collinear und in der Collineation zwischen Σ, Σ' entspricht also der beliebigen Ebene ξ von Σ in Σ' diejenige Ebene des Bündels A', die in dieser Collineation zwischen α und A' der Geraden $\alpha\xi$ correspondirt; dieselbe ändert sich nicht, wenn ξ um $\alpha\xi$ sich dreht.

Wir haben also im Raume Σ die singuläre Ebene oder besser das singuläre Feld α, im Raume Σ' den singulären Punkt oder Bündel A'. Jenes Feld und dieser Bündel sind collinear mit $\alpha(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ und β', γ', δ', ε' als entsprechenden Elementen. Die Collineation zwischen Σ und Σ' ist so ausgeartet, dass einer beliebigen Ebene ξ von Σ in Σ'

*diejenige Ebene des Bündels A′ entspricht, welche in der Collineation zwischen α und A′ der Geraden αξ homolog ist; der singulären Ebene α entspricht jede beliebige Ebene in Σ′.**) *Jeder Ebene des Bündels A′ entsprechen also* ∞^1 *Ebenen in Σ, welche einen Büschel um diejenige Gerade von α bilden, die in der Collineation zwischen dem Felde α und dem Bündel A′ der Ebene entspricht;* ihre Schnittlinien mit diesen Ebenen erzeugen deshalb in ihr einen Strahlenbüschel um die Spur dieser Geraden.

In unserm Falle (Nr. 264) sind α', β', γ', δ' mit α, β, γ, δ identisch und also A' mit A.

Das Vorangehende lehrt, dass *die Ausartungen erster Ordnung der räumlichen Collineation zu der Erzeugung des tetraedralen Complexes führen, bei welcher ein Ebenenbündel und ein zu ihm collineares Strahlenfeld zu Grunde gelegt sind und der Complex durch die Strahlenbüschel entsteht, welche in den Ebenen des Bündels liegen und je die Spur der entsprechenden Geraden zum Scheitel haben*, also zur Erzeugung, welche zu der in Nr. 258 betrachteten dual ist.

Wenn wir daher dual verfahren, d. h. den Complex durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte collinearer Räume entstehen und die Collineation ausarten lassen, so gelangen wir zu dieser Erzeugung selbst.

Die ausgeartete räumliche Collineation ist in beiden Fällen die nämliche; wir haben ja in Nr. 258 erkannt, dass die Erzeugung durch ein Punktfeld und einen Strahlenbündel, die zu einander collinear sind, diejenige durch einen Ebenenbündel und ein zu ihm collineares Strahlenfeld nach sich zieht, und umgekehrt.

Da also, im allgemeinen, den Ebenen von Σ bei dieser Ausartung nur Ebenen des Bündels A entsprechen, so sind 4 von den ∞^1 collinearen Ebenen-Räumen — welche sich ergeben, wenn ε' durch eine der Tetraeder-Ecken geht — in Ebenenbündel um diese Ecken ausgeartet.

Die Ausartungen der zweiten Ordnung sind natürlich Ausartungen 267
derjenigen erster Ordnung.

Es gehe also ε' durch A, ε durch B. Der grösseren Deutlich-

*) Was wiederum das Entsprechen der Punkte von Σ, Σ′ anlangt, so entspricht einem beliebigen Punkte von Σ stets der singuläre Punkt A' in Σ′; aber einem in α gelegenen Punkte entsprechen alle ∞^1 Punkte desjenigen Strahls von A', der dem Punkte in der Collineation zwischen α und A' correspondirt. — Je nachdem man den Raum Σ oder Σ′ dualisirt, erhält man die *central* oder die *planar correlation* von Hirst, Proc. London Math. Soc. Bd. 21 S. 92 Nr. 6, 7.

keit halber stellen wir uns, zunächst, α', β', γ', δ' von α, β, γ, δ verschieden vor; durch B gehen demnach α, γ, δ, ε, durch A' aber β', γ', δ', ε'.

Die Collineation zwischen β und β' ist, wie im vorigen allgemeineren Falle, ausgeartet mit $\beta\alpha$ als singulärer Geraden und A' als singulärem Punkte. Nun wird aber auch diejenige zwischen den Feldern α, α' ausgeartet: sie hat B in α zum singulären Punkte und $\alpha'\beta'$ in α' zur singulären Geraden. In beiden Fällen ist der Strahlenbüschel um den singulären Punkt zu der Punktreihe auf der singulären Geraden projectiv. Diese Projectivitäten Π_β, Π_α erhält man, indem man von den beiden projectiven Punktreihen auf $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ — in denen die Schnitte mit γ, δ, ε, bezw. γ', δ', ε' entsprechen — die letztere aus A', die erstere aus B projicirt.

Damit werden auch die Strahlenbüschel (B, α) und (A', β') projectiv mit den in γ, δ, ε, bezw. γ', δ', ε' liegenden Strahlen als homologen.

Eine beliebige Ebene ξ von Σ schneidet α, β in zwei Geraden; der ersteren entspricht, da sie nicht durch den singulären Punkt B geht, die singuläre Gerade $\alpha'\beta'$, der andern eine durch den singulären Punkt A' gehende Gerade; also enthält ξ' die $\alpha'\beta'$ und den A' und ist mit β' identisch. Geht aber ξ durch B, so entspricht der $\alpha\xi$ jeder Strahl in α' um denjenigen Punkt von $\alpha'\beta'$, der ihr als Strahl des Büschels (B, α) in Π_α homolog ist; der $\beta\xi$ aber entspricht ein bestimmter Strahl von (A', β'), derjenige nämlich, der in Π_β dem Schnittpunkte von $\beta\xi$ mit $\beta\alpha$ correspondirt, oder einfacher, welcher in der Projectivität Π der Strahlenbüschel (B, α) und (A', β') dem $\beta\xi$ entspricht. Demnach entspricht in der räumlichen Collineation der durch B gehenden Ebene ξ der ganze Büschel von Ebenen um diesen Strahl.

*Bei dieser ausgearteten räumlichen Collineation hat man also in jedem der beiden Räume eine singuläre Ebene α, bezw. β' und in ihr einen singulären Punkt B, bezw. A'. Die beiden Strahlenbüschel (B, α) und (A', β') sind projectiv bezogen. Jeder Ebene, die nicht durch den singulären Punkt ihres Raumes geht, entspricht die singuläre Ebene des andern Raumes; jeder Ebene aber, die durch den singulären Punkt geht und infolge dessen einen Strahl des singulären Büschels enthält, entspricht jede beliebige Ebene durch den homologen Strahl des andern singulären Büschels.**)

In unserm Falle sind α', β', γ', δ', A' mit α, β, γ, δ, A identisch.

*) Dual ist das Entsprechen der Punkte. — Dualisirt man den einen Raum, so erhält man die *central-planar correlation* von Hirst: a. eben a. O. Nr. 18.

Die Strahlen des Complexes sind Schnittlinien von Ebenen, welche durch entsprechende Strahlen der beiden projectiven Büschel (B, α) und (A, β) gehen, oder Verbindungslinien von Punkten, die auf solchen Strahlen liegen, oder, womit wir beides aussprechen, sie sind Strahlen, welche zwei homologe Strahlen der beiden Büschel zugleich treffen. *Die Ausartung zweiter Ordnung der räumlichen Collineation führt daher zur Erzeugung des tetraedralen Complexes durch projective Strahlenbüschel.* Aber das war schon damit erkannt, dass wir (Nr. 259) diese Erzeugung als Specialfall der Erzeugung durch Bündel und Feld nachwiesen.

Also ist die Reye'sche Erzeugung durch zwei collineare Räume in der That die umfassendste.

Wir fanden ∞^2 Collineationen von zwei Räumen, durch welche 268
der nämliche tetraedrale Complex erzeugt wird, oder besser, ∞^1 *collineare Ebenen-Räume* — darunter 4 Ebenenbündel um die Tetraeder-Ecken — welche, wie man sie auch zu zweien zusammenstellt, immer denselben tetraedralen Complex hervorbringen: je alle entsprechenden Ebenen laufen in einen Strahl desselben zusammen.

So haben wir ∞^3 Ebenenbüschel, deren verschiedene Ebenen in den collinearen Räumen einander homolog sind. Jede Ebene eines solchen Büschels gehört zu einem bestimmten von den Räumen und bestimmt sofort in den übrigen Büscheln diejenigen Ebenen, die zu dem nämlichen Raume gehören. Dadurch werden die ∞^3 Ebenenbüschel unter einander projectiv mit solchen Ebenen als entsprechenden, die je zu demselben Raume gehören.

Reye*) nennt dies Gebilde *einen linearen Complex projectiver Ebenenbüschel und einen Büschel collinearer Ebenen-Räume* und bezeichnet ihre Beziehung dadurch, dass er sagt: *der Complex und der Büschel stützen sich auf einander.*

Einfachere derartige Gebilde sind die beiden sich stützenden Schaaren projectiver Ebenenbüschel um die Geraden der einen, bezw. der andern Regelschaar eines Hyperboloids, ferner die lineare Congruenz**) der projectiven Ebenenbüschel um die Sehnen einer cubischen Raumcurve und die sich auf dieselbe stützende Reihe der collinearen Ebenenbündel aus den Punkten der Curve. Im ersteren bilden je die entsprechenden Ebenen der verschiedenen Büschel der einen Schaar einen Büschel der andern Schaar, im zweiten die entsprechenden der

*) Journal für Mathematik Bd. 104 S. 211.

**) Diese Namen: linearer Complex, lineare Congruenz dienen hier zur Bezeichnung drei-, bezw. zweistufiger linearer Mannigfaltigkeiten, ähnlich wie sonst: Gebüsche, Netz.

verschiedenen Büschel der linearen Congruenz einen Bündel aus der Reihe, und die homologen Ebenen der verschiedenen Bündel der Reihe einen Büschel aus der Congruenz.

Der lineare Complex von projectiven Ebenenbüscheln enthält ∞^3 lineare Congruenzen und ∞^4 Schaaren von projectiven Ebenenbüscheln. Eine lineare Congruenz von projectiven Ebenenbüscheln nehmen wir aus dem linearen Complexe heraus, wenn wir die sämmtlichen Strahlen von T zusammenfassen, welche eine Sehnen-Congruenz $[r_1]$ bilden, mit den projectiven Ebenenbüscheln um sie, deren entsprechende Ebenen stets nach einem und demselben Punkte der Curve r_1 gehen. Die auf die lineare Congruenz sich stützende Reihe der Ebenenbündel besteht aus den Bündeln um die Punkte der r_1, welche sich in den verschiedenen collinearen Räumen Σ, Σ', ... entsprechen.

Die Axen aber der Ebenenbüschel einer Schaar bilden eine Regelschaar P_1, die Axen der sich auf sie stützenden Schaar die Leitschaar, deren Gerade ebenfalls in den verschiedenen collinearen Räumen sich entsprechen.

269 *Die einander entsprechenden Punkte in den verschiedenen collinearen Räumen* Σ, Σ', ..., *die zusammen* (Σ) *heissen mögen, erfüllen,* wie eben gesagt wurde, *eine cubische Raumcurve* r_1, *deren Sehnen-Congruenz zu* T *gehört.* In der That, betrachten wir den Punkt X von Σ als Schnitt dreier Ebenen, so ist der Ort der entsprechenden Punkte in den (Σ) die durch X gehende cubische Raumcurve r_1, welche durch die projectiven Ebenenbüschel erzeugt wird, die den entsprechenden Ebenen jener drei Ebenen ihre Entstehung verdanken.

Alle ∞^3 *cubischen Raumcurven* r_1 *sind projectiv, wobei immer die entsprechenden Punkte dem nämlichen Raume angehören;* nach ihnen gehen entsprechende Ebenen aus den Büscheln um Sehnen der jeweiligen Curve; also entspricht auch in diesen Projectivitäten jeder der Punkte A, B, C, D, durch welche ja alle r_1 gehen, sich selbst.

Es seien $r_1(X)$, $r_1(Y)$ die zu den Punkten X, Y von Σ gehörigen Curven, X', Y' die bezw. auf ihnen gelegenen den X, Y entsprechenden Punkte in Σ', so ergiebt sich, dass auch die Kegel, welche die Curven aus X, bezw. Y projiciren, projectiv und folglich die Bündel X, Y collinear sind,*) wobei die nach entsprechenden Punkten von $r_1(X)$, $r_1(Y)$ gehenden Strahlen homolog sind.

Wenn also bei zwei collinearen Räumen aus allen Punkten X des einen die Strahlen nach den sich selbst entsprechenden Punkten und je

*) Reye, Geometrie der Lage, II S. 10.

nach dem homologen Punkte X' gezogen werden, so sind alle diese ∞^3 *fünfstrahligen Bündel einander collinear.*

In unsern ∞^1 collinearen Räumen entsprechen einer Ebene ξ von Σ die Ebenen eines Büschels, so dass eine durch einen gegebenen Punkt P geht; es giebt daher in ξ einen Punkt, der, zu Σ gerechnet, in einem der andern Räume den P zum entsprechenden hat. *Folglich erfüllen die Punkte von Σ, welche in den verschiedenen Räumen (Σ) den Punkt P zum entsprechenden haben, eine Gerade, die durch P geht,* da Σ ja auch zu den Räumen gehört. *Sie ist* also Verbindungslinie entsprechender Punkte von Σ und Σ', Σ und Σ'', ..., demnach *ein Strahl des Complexes.* Auf diese Weise ist jedem Punkte P des Raumes ein durch ihn gehender Complexstrahl zugeordnet.

Die cubische Raumcurve r_1, deren Punkte in den verschiedenen Räumen dem Punkte X von Σ correspondiren, trifft eine beliebige Ebene π dreimal; also *umhüllen diejenigen Ebenen von Σ, welchen die Ebene π in den Räumen (Σ) entspricht, einen Torsus 3. Klasse, der auch π tangirt.*

Einer Geraden x von Σ entsprechen in den Räumen (Σ) die Geraden einer Regelschaar; die Ebenen, welche zu zwei durch x gehenden Ebenen von Σ homolog sind, bilden die erzeugenden Büschel. Diese Regelschaar ist die Leitschaar derjenigen P_1, welche durch die Ebenenbüschel um x und irgend eine entsprechende, etwa die in Σ', erzeugt wird.

Wenn x zum Complexe gehört, so wird sie von der entsprechenden x' getroffen (Nr. 260); die Regelschaar P_1, welche das Erzeugniss der Büschel x und x' ist, wird die Kantenschaar eines Kegels und vereinigt sich mit der Leitschaar, d. i. mit der Schaar der Geraden, welche der x in den (Σ) entsprechen. Diese gehen also alle durch den Scheitel P und dieser Punkt, zu den verschiedenen (Σ) gerechnet, d. h. als diesen x', x'', ... angehörig betrachtet, hat seine entsprechenden Punkte auf x.

So haben wir nun auch jedem Strahle des Complexes eindeutig seinen Punkt P zugeordnet und damit also eine eindeutige Abbildung des tetraedralen Complexes in den Punktraum, auf die wir noch zurückkommen werden.

Ferner, *während wir durch den Complexstrahl x eine bestimmte Ebene ξ aus dem Raume Σ haben, die mit ihren entsprechenden Ebenen in den andern (Σ) sich in x schneidet, haben wir nicht einen bestimmten Punkt X von Σ auf x derartig, dass x seine Verbindungslinie mit den entsprechenden ist; vielmehr haben wir einen Punkt P auf x gefunden, der, nach und nach zu den verschiedenen (Σ) gerechnet, alle seine ent-*

sprechenden in Σ auf x hat, und x wird also in dieser Weise Verbindungslinie von Punkten von Σ mit den entsprechenden.

Rechnet man eine Gerade p nach und nach zu den (Σ), so bilden die Geraden in Σ, die ihr entsprechen, ebenfalls eine Regelschaar; denn die Regelschaar der einer Geraden x, als Geraden von Σ, entsprechenden Geraden trifft p zweimal.

Ist p ein Strahl des Complexes, so artet diese Regelschaar in den Tangentenbüschel eines Kegelschnitts aus, der in der Ebene ξ von Σ liegt, die mit ihren entsprechenden in den (Σ) sich in p schneidet.

Jede der Collineationen des Σ mit den $\Sigma^{(i)}$ ordnet also einem Complexstrahle $x \equiv p$ zwei sie schneidende Geraden zu; die eine ist die ihr, als Geraden von Σ, in $\Sigma^{(i)}$ entsprechende Gerade, die andere die ihr, als Geraden von $\Sigma^{(i)}$, in Σ entsprechende Gerade; die beiden Schnittpunkte, von denen der erstere P ist und sich mit der Collineation $\Sigma^{(i)}$ nicht ändert, sind entsprechend in $\Sigma^{(i)}$ und Σ.

Wir fanden, im Anfang dieser Nr., dass je *zwei von den Curven r_1* projectiv sind mit solchen Punkten als homologen, welche zu demselben von den Räumen (Σ) gehören.

Infolge dieser Projectivität sind sie entsprechende Curven in collinearen Räumen. Es seien r^3 und r^3_1 zwei projective cubische Raumcurven, und den Punkten E, F, G der ersteren entsprechen die Punkte E_1, F_1, G_1 der zweiten; dann seien noch H und I die Punkte, in denen die Tangenten in E, F an r^3 von den Schmiegungsebenen in F, E geschnitten werden; so dass $EFHI$ ein Schmiegungstetraeder von r^3 ist.*) $E_1F_1H_1I_1$ sei das analog für r^3_1 construirte. Durch die räumliche Collineation, in der den E, F, G, H, I die E_1, F_1, G_1, H_1, I_1 entsprechen, geht r^3 in eine cubische Raumcurve (r^3_1) über, welche ebenfalls $E_1 F_1 H_1 I_1$ zum Schmiegungstetraeder hat und durch G_1 geht, also mit r^3_1 identisch ist. Denn die Kegel, welche r^3_1 und (r^3_1) aus E_1 projiciren, berühren beide die gemeinsame Schmiegungsebene $E_1H_1I_1$ längs der gemeinsamen Tangente E_1H_1 und die Ebene $E_1F_1I_1$ nach der andern gemeinsamen Tangente F_1I_1 längs der Kante E_1F_1 nach dem Berührungspunkte F_1 und gehen durch G_1, also fallen sie zusammen. Dasselbe gilt für die aus F_1 projicirenden Kegel, also auch für die beiden Curven. Weil die Collineation E, F, G in E_1, F_1, G_1 überführt, so ruft sie auf den beiden in ihr correspondirenden Curven r^3 und r^3_1 die gegebene Projectivität hervor.

Diese Collineationen zwischen je zwei unserer r_1 sind aber ver-

*) Schröter, Math. Annalen Bd. 25 S. 293.

schieden von den zwischen den (Σ); sie haben aber auch $ABCD$ zum Haupttetraeder.

Die weiteren Räume (Σ) vervollständigen die projectiven Ebenen- 270
büschel $x(A, B, C, D, \xi, \xi')$ um die Strahlen von T (Nr. 262 und 268). Liegt also etwa ein fester Strahlenbüschel (S, σ) vor, in dem der Strahlenwurf $abcd$ das feste Doppelverhältniss λ von T hat; so bestimmt jeder weitere Strahl e desselben einen von den Räumen (Σ), der Σ_e heissen möge.*)

Der Bündel in Σ_e um den Punkt E erzeugt mit den entsprechenden Bündeln in den andern (Σ) *eine Sehnen-Congruenz* $[r_1]$, *welche in* T *der Inbegriff derjenigen Strahlen ist, die nach den 5 Punkten A, B, C, D, E einen zu $abcde$ projectiven Ebenenbüschel senden.* Dem Strahle f von (S, σ) entspreche der Raum Σ_f und dem Punkte E von Σ_e der Punkt E_f in Σ_f, dem Punkte F aber von Σ_f der Punkt F_e in Σ_e. Dann erzeugen die beiden homologen Büschel EF_e und E_fF von Σ_e und und Σ_f *die Regelschaar* P_1, *welche wiederum diejenigen Strahlen von* T *umfasst, die nach den 6 Punkten A, B, C, D, E, F einen zu $abcdef$ projectiven Ebenenbüschel senden.* Bestimmt endlich g von (S, σ) den Raum Σ_g und entsprechen den Punkten E, F, G von $\Sigma_e, \Sigma_f, \Sigma_g$ bezw. je in den beiden andern Räumen die Punkte E_f, E_g; F_e, F_g; G_e, G_f, so ist der Strahl von T, in welchen die 3 entsprechenden Ebenen EF_eG_e, E_fFG_f und E_gF_gG von $\Sigma_e, \Sigma_f, \Sigma_g$ zusammenlaufen, *der einzige Strahl, der nach den Punkten A, B, C, D, E, F, G einen zu $abcdefg$ projectiven Ebenenbüschel schickt.***)

Im Vorangehenden wurden die Complexstrahlen in erster Linie 271
als *Schnittlinien entsprechender Ebenen* collinearer Räume betrachtet. Dualisiren wir, so gelangen wir zu *einem linearen Complexe von projectiven Punktreihen*, deren Träger den tetraedralen Complex bilden. Die Träger der projectiven Punktreihen einer linearen Congruenz bilden eine Axen-Congruenz $[r_2]$, diejenigen einer Schaar eine P_2.

Auf diese ∞^3 projectiven Punktreihen stützen sich ∞^1 collineare Punkt-Räume, welche je durch die homologen Punkte der Punktreihen erfüllt werden, darunter 4 Punktfelder in den Tetraederebenen. *Ihre ∞^2 Collineationen sind aber genau dieselben, wie die bei den ∞^1 projectiven Ebenenbüscheln.*

*) Den Strahlen a, b, c, d entsprechen diejenigen Räume (Σ), welche in die Ebenenbündel A, B, C, D ausgeartet sind.

**) Vergl. H. Müller, Mathem. Annalen Bd. 1 S. 413; Sturm, ebenda Bd. 6 S. 513, Bd. 15 S. 407.

In der That, es seien Σ, Σ' irgend zwei von den Räumen (Σ), die wir bei den projectiven Ebenenbüscheln hatten, also die Collineation zwischen ihnen eine der ∞^2. Σ und Σ' sind folglich erfüllt mit entsprechenden Ebenen der Ebenenbüschel. Auf irgend einem Complexstrahle liegen zwei in ihnen entsprechende Punkte und die ihnen in den andern projectiven Punktreihen entsprechenden Punkte sind ebenfalls homolog in Σ und Σ', weil eben diese Räume den Complex erzeugen. Also sind Σ, Σ' auch erfüllt von entsprechenden Punkten der Punktreihen; oder die Collineation zwischen Σ, Σ', die durch die Punktreihen hervorgebracht wird, und in der sich zwei derselben Punktreihe angehörige Punkte entsprechen, ist die nämliche, wie die durch die Ebenenbüschel bewirkte, in der sich zwei demselben Ebenenbüschel angehörige Ebenen entsprechen.

Hält man den Ebenenraum Σ fest und verändert den Ebenenraum Σ', so bleibt nach dem in der Nr. 269 Gesagten der Punktraum Σ' fest und der Punktraum Σ ändert sich: der Ebene ξ durch den Complexstrahl x entspricht die veränderliche ξ'; dem P aber als X' entspricht der veränderliche X.

Das ist aber nur eine verschiedene Auffassung der Veränderung der Collineation zwischen 2 Räumen; man kann die Elemente des einen festhalten und die entsprechenden des andern verändern, oder die des zweiten festhalten und die des ersten verändern. Das eine ist mit den Ebenen, das andere mit den Punkten geschehen.

272 Ein linearer Complex von projectiven Ebenenbüscheln wird durch 4 derselben, wofern dieselben nicht zur nämlichen linearen Congruenz gehören, bestimmt, und *vier beliebige projective Ebenenbüschel müssen also auch einen tetraedralen Complex festlegen.* Machen wir uns zunächst klar, dass das hinsichtlich der Mannigfaltigkeit richtig ist. Man kann auf ∞^{16} Weisen vier Ebenenbüschel zusammenstellen, dann auf ∞^9 die Projectivität zwischen ihnen bestimmen, indem man drei festen Ebenen des einen die entsprechenden in den andern zuweist. Die ∞^3 Geraden des Complexes lassen sich auf ∞^{12} Weisen zu vieren zusammenstellen; die Projectivität zwischen ihren Büscheln ist durch den Complex festgelegt. So gelangen wir zur Mannigfaltigkeit

$$16 + 9 - 12 = 13,$$

wie sie dem Complexe T zukommt.

Bei 4 projectiven Ebenenbüscheln kommt es viermal vor, dass entsprechende Ebenen in einen Punkt zusammenlaufen.

Wenn u, u_1, u_2, u_3 die vier Büschel sind, so erzeugen u und u_1,

u und u_2, u und u_3 je ein Hyperboloid, und die 4 Punkte sind die, welche diese 3 Hyperboloide, ausser der Geraden u, gemein haben (Nr. 255); die Ebene von u, welche nach einem dieser Punkte geht, trifft dort mit ihren entsprechenden Ebenen aus u_1, u_2, u_3 zusammen.

Die 4 Punkte sind die Ecken des Tetraeders und die 4 Würfe in den Ebenenbüscheln nach ihnen, welche ja projectiv sind, geben das Doppelverhältniss; damit ist der tetraedrale Complex bestimmt und durch ihn der lineare Complex von projectiven Ebenenbüscheln.

Die projectiven Ebenenbüschel u und u_1 bestimmen eine Schaar von projectiven Büscheln, deren Axen u_x die Geraden der Leitschaar sind, welche zu der von u und u_1 erzeugten Regelschaar gehört: entsprechende Ebenen aus allen diesen Büscheln gehen je nach der nämlichen Geraden dieser Regelschaar. Ebenso führen u_2 und u_3 zu einer Schaar von projectiven Ebenenbüscheln u_y. Stellt man nun jeden Büschel u_x mit jedem u_y zusammen, so erzeugen die ∞^2 Schaaren projectiver Ebenenbüschel, die sich dadurch ergeben, den linearen Complex projectiver Ebenenbüschel $|u, u_1, u_2, u_3|$ und $|u_3|$ nach Reye's kürzerer Bezeichnung, bei welcher der Zeiger dann zugleich die Mannigfaltigkeit angiebt, und die Axen aller dieser ∞^3 Büschel den tetraedralen Strahlencomplex.

Oder auch, durch die projectiven Büschel u_1, u_2, u_3, wird eine lineare Congruenz von projectiven Büscheln festgelegt, deren Axen u_z die Sehnen der cubischen Raumcurve sind, welche durch jene drei Büschel erzeugt wird; die ∞^2 Schaaren, welche durch u und jeden der u_z bestimmt werden, erfüllen (u_3).

Sprechen wir diese beiden Erzeugungen des tetraedralen Strahlencomplexes noch in etwas anderer Form aus:

Zwei Regelschaaren mache man projectiv. Dann sind die Ebenenbüschel um alle Geraden u_x und u_y der einen und der andern Leitschaar sämmtlich unter einander projectiv. Je ein Büschel u_x und ein u_y erzeugen daher eine Regelschaar. Durch die Leitschaaren aller dieser ∞^2 Regelschaaren entsteht ein tetraedraler Complex. Die Ecken des Tetraeders sind die 4 Punkte, in denen sich entsprechende Geraden der beiden gegebenen Regelschaaren schneiden.

Eine cubische Raumcurve ist gegeben; der Ebenenbüschel u wird zu den Ebenenbüscheln u_z, welche aus ihren Sehnen die Punktreihe auf ihr projiciren, projectiv gemacht. Die Leitschaaren der Regelschaaren, welche je durch u und irgend einen u_z erzeugt werden, erfüllen einen tetraedralen Complex. Der Büschel u wird auch zur Punktreihe auf der Curve projectiv und viermal geht eine Ebene von ihm durch ihren entsprechenden

Punkt in derselben: diese 4 Punkte der Curve sind die Ecken des Tetraeders.

Diesen beiden Erzeugungen entsprechen zwei zu ihnen duale.

III.

273 *Auch die Correlation oder Reciprocität zweier Räume führt zu einem tetraedralen Complexe, nämlich demjenigen der sogenannten Wechselstrahlen der Correlation.* *) Unter einem Wechselstrahle versteht Schröter den Schnittstrahl der beiden Ebenen (Polarebenen) ξ' und η, die einem und demselben Punkte $X \equiv Y'$ in beiderlei Sinne correspondiren. Jeder solcher Strahl ist auch Verbindungslinie der beiden Punkte (Pole), welche in beiderlei Sinne einer Ebene entsprechen. In der That, die beiden Geraden (Polaren), welche dem $\xi'\eta$ entsprechen, müssen durch $Y' \equiv X$ gehen und infolge dessen befinden sich die beiden Pole der Ebene, welche diese Polaren verbindet, auf $\xi'\eta$. Damit hat sich auch gezeigt, dass einem Wechselstrahle noch eine dritte Eigenschaft zukommt, dass nämlich seine beiden Polaren sich schneiden: der Schnittpunkt ist der Punkt, dessen beide Polarebenen ihn zur Schnittlinie haben, die Verbindungsebene die Ebene, deren beide Pole er verbindet.

Alle Wechselstrahlen erzeugen, wie gesagt, einen tetraedralen Complex.

Im Grunde ist dies jedoch nur die Eigenschaft der Collineation; denn die zwei Ebenen ξ', η, die je einem und demselben Punkte entsprechen, sind homolog in zwei collinearen Räumen, welche beide reciprok zu dem Raume der Punkte sind.

Und so ist jeder Wechselstrahl Schnittlinie zweier entsprechender Ebenen dieser collinearen Räume u. s. w.

Die Ebenen des Hauptvierseits der Correlation (Nr. 234) entsprechen den Ecken desselben in beiderlei Sinne; also bilden diese Ecken und Ebenen das Haupttetraeder der Collineation und das Grundtetraeder des Complexes.

274 *Das einfachste System 2. Stufe von cubischen Raumcurven wird durch diejenigen gebildet, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder haben* (Nr. 269). Wenn $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ das Tetraeder ist, so gehen alle Curven dieses Systems, das wir Bündel nennen wollen, durch zwei Ecken desselben, etwa A und B, berühren

*) Schröter, Journal für Mathematik Bd. 77 S. 134.

in ihnen zwei windschiefe Kanten AC, BD und haben die Ebenen des Tetraeders, welche sich in der Gegenkante von AB schneiden, also ACD und BDC zu Schmiegungsebenen.

Die Tangenten aller Curven dieses Bündels erzeugen einen zum Tetraeder $ABCD$ gehörigen Reye'schen Complex. Das constante Doppelverhältniss desselben hat einen absoluten Werth; ist g ein Strahl des Complexes, so ist:

$$g(ABCD) = \tfrac{1}{4}.$$

Der Kegel 2. Grades (A), welcher irgend eine Curve des Bündels aus A projicirt, berührt die Ebenen $ACD \equiv \beta$ und $ABD \equiv \gamma$ längs AC und AB; also bilden alle diese Kegel (A), von denen jeder ∞^1 Curven des Bündels trägt, einen Büschel, zu welchem auch die Ebenenpaare (β, γ) und (δ, δ) gehören; analoges gilt für die Kegel (B).

Wenn r^3 eine Curve des Bündels ist, so legt man eine Collineation mit dem Haupttetraeder $ABCD$ fest, in der sich zwei Punkte X, X' von r^3 entsprechen. Der Kegel (A) dieser Curve geht, weil er β, γ längs AC, AB berührt und durch X geht, in den Kegel über, der ebenfalls β, γ längs AC, AB tangirt und durch X' geht, also in sich selbst, und gleiches gilt für (B); also geht auch r^3, der Schnitt dieser beiden Kegel (ausser AB), in sich selbst über. Im Büschel der (A) gehen daher 3 Kegel in sich selbst über, der eben erwähnte und (β, γ), (δ, δ); also wird jeder (A) und ebenso jeder (B) in sich selbst transformirt und demnach auch jede Curve des Bündels: jede zwei entsprechende Punkte liegen auf der nämlichen Curve desselben.

Liegen nun irgend zwei entsprechende Punkte unendlich nahe auf ihrer Curve, dann gilt dies für jede zwei, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser infinitesimalen Collineation sind die Tangenten der Bündelcurven.

Nennen wir wiederum auf einer beliebigen Geraden g die Schnitte mit den Tetraederebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$. In der Involution, welche der Büschel der (A) in g einschneidet, ist $\mathfrak{D}$ der eine Doppelpunkt und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ein Paar, also der vierte harmonische $\mathfrak{D}'$ zu $\mathfrak{D}$ in Bezug auf $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ der andere Doppelpunkt. Die Involution, welche von den (B) herrührt, hat $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, welcher zu $\mathfrak{C}$ harmonisch ist nach $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$, zu Doppelpunkten. Das gemeinsame Paar dieser beiden Involutionen ist das Paar der Begegnungspunkte der g mit der einzigen sie zweimal treffenden Curve des Bündels. Die Gerade g ist also eine Tangente einer Bündelcurve, wenn diese beiden Punkte zusammenfallen, d. h. wenn die beiden Paare $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ einen Punkt gemeinsam haben. Nur

$\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{D}'$ können sich vereinigen, und das erfordert: $(\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathfrak{D}\mathfrak{D}') = 0$. Nun ist aber:

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathfrak{D}\mathfrak{D}') = 1 - (\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{C}'\mathfrak{D}') = 1 - \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}{\mathfrak{D}\mathfrak{C}'} \cdot \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}'};$$

ferner:

$$\frac{2}{\mathfrak{C}\mathfrak{C}'} = \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}' = \frac{2\,\mathfrak{C}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{C}\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}},$$

$$\mathfrak{D}\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D} \,.\, \mathfrak{D}\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}}, \quad \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}{\mathfrak{D}\mathfrak{C}'} = \frac{2\,\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}\mathfrak{A}}, \quad \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}'} = \frac{2\,\mathfrak{D}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}};$$

also:

$$0 = (\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathfrak{D}\mathfrak{D}') = 1 - 4(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}),$$

oder:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = g(ABCD) = \tfrac{1}{4}.$$

Auf eine einzelne Curve des Bündels bezogen, lautet der Satz folgendermassen:

Wenn A, B zwei Punkte einer cubischen Raumcurve sind und C, D die Punkte, in denen ihre Tangenten je von der Schmiegungsebene des andern Punktes getroffen werden, dann umfasst jede Tangente der Curve mit diesen 4 Punkten einen Ebenenwurf vom Doppelverhältnisse $\frac{1}{4}$.*)

275 Wir besprechen nun noch zwei tetraedrale Complexe von *metrischem* Charakter. Der eine ist Reye's *Axen-Complex einer Fläche 2. Ordnung.***) Unter einer *Axe* einer Fläche 2. Grades (in allgemeinerem Sinne, als das Wort gewöhnlich gebraucht wird) versteht Reye dabei *jede Gerade, die zu ihrer Polare nach der Fläche normal ist*, so dass diese dann auch Axe ist. Der Name beruht darauf, dass jede derartige Gerade sogar in zwei Weisen Axe ist, nämlich sowohl Axe eines ebenen Schnitts, als auch Axe eines Berührungskegels der Fläche. In der That, es seien p und p' zwei zu einander senkrechte Polaren, π' die Ebene durch p, welche zu p' parallel ist, π hingegen die Ebene durch p', welche normal zu p ist; der Fusspunkt von p in ihr sei P' und der auf p gelegene Pol von π sei P.

Für den Schnitt der Ebene π' mit der Fläche sind p und $\pi'p'$ Polare und Pol, folglich ist, da letzterer unendlich fern in normaler Richtung zu p liegt, p' eine Axe des Schnitts.

Ferner, für den Tangentenkegel der Fläche aus P' sind p und

*) Vergl. Voss, Math. Annalen Bd. 13 S. 237; Sturm, ebenda Bd. 26 S. 490, Bd. 28 S. 271 und die in Nr. 56 erwähnte Dissertation von E. Heinrichs, in der der hier erwähnte Curvenbündel ausführlicher behandelt ist.

**) Geometrie der Lage Abth. II 18. Vortrag in der 1. Aufl., 21. Vortrag in der 2. Auflage.

$\pi \equiv P'p'$ Polarstrahl und Polarebene; da sie normal zu einander sind, so ist p eine Axe des Kegels.

Zu diesen Reye'schen Axen gehören alle Strahlen von der Richtung der Hauptaxen und ihre Polaren, die Geraden in den Hauptebenen, ferner alle Durchmesser und ihre Polaren, die unendlich fernen Geraden; denn jede unendlich ferne Gerade ist zu jeder endlichen als normal anzusehen, da sie in der unendlich fernen Ebene liegt, die ja immer zum Parallelebenen-Büschel der zu einer Geraden senkrechten Ebene gehört.

Ferner gehören alle Normalen der Fläche zu diesen Axen; auf ihnen hat sich P mit P' vereinigt.

Auf jeder Axe p fanden wir einen Punkt P, für den p das Loth auf seine Polarebene π ist. Umgekehrt ist jederzeit das Loth, das aus einem beliebigen Punkte auf die zugehörige Polarebene gefällt ist, eine Axe. Es wird also jedem Punkte P ein gewisser unendlich ferner Punkt $\mathfrak{P}$ zugeordnet, derjenige, welcher unendlich fern ist in normaler Richtung zur Polarebene von P. Jedem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{P}$ aber entsprechen ∞^1 Punkte P, welche auf einem Durchmesser d der Fläche liegen, dem conjugirten zu der Durchmesser-Ebene δ, zu der die Richtung nach $\mathfrak{P}$ normal ist. Diese Zuordnung der unendlich fernen Punkte $\mathfrak{P}$ und der Durchmesser d ist eine collineare, denn $\mathfrak{P}$ und δ bewegen sich reciprok und δ und d ebenfalls.

Demnach ist der Complex der Axen einer Fläche 2. Grades ein tetraedraler, denn wir sind zur Erzeugung vermittelst eines Feldes und eines Bündels gelangt, die zu einander collinear sind.

Wir wissen aber, dass wir diese Collineation auch als Collineation zwischen zwei Punkträumen auffassen können, von welchen zwei Räumen aber der eine sich auf eine Ebene, die Ebene des Feldes, zusammengedrängt hat; denn im allgemeinen entsprechen den Punkten des andern Raums nur Punkte dieser Ebene (je ∞^1 einer).

Das Grundtetraeder des Axen-Complexes wird durch die Hauptebenen der Fläche und die unendlich ferne Ebene $\mathfrak{E}$ gebildet.

Jede Complexcurve ist eine Parabel.

Jeder Complexkegel ist gleichseitig, denn er enthält die drei Parallelen aus seiner Spitze zu den Hauptaxen.*)

Wenn die Fläche durch eine zu ihr ähnliche und ähnlich gelegene mit demselben Mittelpunkte ersetzt wird, so bleibt die Collineation zwischen dem Felde in $\mathfrak{E}$ und dem Durchmesser-Bündel dieselbe, also auch der Axencomplex.

*) Schröter, Oberflächen 2. Ordnung § 13.

276 *Einen anderen interessanten tetraedralen Complex metrischen Characters liefert der Ort der Strahlen, welche von zwei gegebenen Punkten A_1, A_2 gleiche Entfernung haben, oder der Ort der Axen der Rotationscylinder, welche durch A_1, A_2 gehen.**)

Es sei B die Mitte von $A_1 A_2$ und γ die Ebene, welche in diesem Punkte auf $A_1 A_2$ senkrecht steht. Man erkennt unmittelbar, dass der Complex symmetrisch sowohl in Bezug auf B, als auf γ ist, ferner, dass er das Strahlenfeld in γ, die Bündel aus B und aus dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{A}$ von $A_1 A_2 \equiv a$ ganz enthält.

Wenn g ein Strahl des Complexes ist, so liegt auf ihm der Punkt $g\gamma$ in der Mitte der Fusspunkte der Lothe aus A_1, A_2 und ist selbst Fusspunkt des Lothes aus B auf g.

Folglich ist der betrachtete Complex zugleich *der Ort der Strahlen, welche auf den Strahlen des Büschels* (B, γ) *senkrecht stehen*, und gehört in gleicher Weise zu allen Punktepaaren von a, für welche B die Mitte ist.

Der Strahlenbüschel (B, γ) und derjenige in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ um $\mathfrak{A}$ sind projectiv, indem jedem Strahle des ersteren die unendlich ferne Gerade der zu ihm senkrechten Ebenen entspricht.

Mithin treffen die Strahlen unseres Orts homologe Strahlen zweier projectiver Büschel und wir haben es mit einem tetraedralen Complexe zu thun. Nur die nach den unendlich fernen Kreispunkten (absoluten Punkten) von γ gehenden Strahlen von (B, γ) sind zu den auf ihnen senkrechten Ebenen zugleich parallel. *Also sind die beiden absoluten Punkte von* γ die sich selbst entsprechenden Punkte der von den projectiven Strahlenbüscheln in $\gamma\mathfrak{E}$ eingeschnittenen projectiven Punktreihen, oder *die beiden übrigen Ecken des Grundtetraeders, ausser B und $\mathfrak{A}$.*

Die Ebenen aus einem Complexstrahle g nach B und $\mathfrak{A}$ schneiden γ in zwei zu einander senkrechten Geraden; weil zu diesen die Strahlen aus ihrem Schnitte nach den absoluten Punkten von γ harmonisch sind, *so ist das Doppelverhältniss unseres Complexes* — 1.

Der Complexkegel aus X geht durch das Loth aus X auf γ und schneidet diese Ebene in dem Kreise, der die Strecke zwischen B und dem Fusspunkte des Lothes zum Durchmesser hat. Also stehen seine einen Kreisebenen auf einer Kante senkrecht.

*Alle Kegel des vorliegenden Complexes sind orthogonal.***)

*) Eingehender wird dieser Complex untersucht in: B. Eck, Ueber die Vertheilung der Axen von Rotationsflächen 2. Grades, welche durch gegebene Punkte gehen (Dissertation von Münster, 1890).

**) Schröter, Oberflächen 2. Ordnung § 12.

Weil das Strahlenfeld 𝔈 ganz zum Complexe gehört, so kommt aus einem unendlich fernen Punkte X ins Endliche nur ein Strahlenbüschel zum Complexe. Der Schnitt seiner Ebene mit γ ist die Gerade, welche in B auf der Ebene Xa senkrecht steht.

Jede Complexcurve ist eine Parabel und ergiebt sich leicht als Enveloppe derjenigen Geraden der Ebene, welche von zwei festen Punkten, den Fusspunkten der Lothe aus A_1 und A_2 auf die Ebene, constante Differenz der Quadrate der Entfernungen (nämlich gleich der Differenz der Quadrate der beiden Lothe) haben.

Wir wollen nun einige *Ausartungen* des tetraedralen Complexes 277
betrachten.

Wir wissen von der Betrachtung des Gewindes her, dass wenn die beiden erzeugenden projectiven Strahlenbüschel einen gemeinsamen und sich selbst entsprechenden Strahl s haben — was eine $(2+1)$-fache Bedingung ist, — dann der tetraedrale Complex *in das Gebüsche* $[s]$ *und ein Gewinde zerfällt*, zu dem aber auch ein Strahlennetz mit zwei in s vereinigten Leitgeraden gehört. *Also gehört die Leitgerade des Gebüsches zum Gewinde.* Ein so zusammengesetzter tetraedraler Complex — der die Mannigfaltigkeit $5+3$ hat — kann auf ∞^2 Weisen durch zwei projective Strahlenbüschel mit s als sich selbst entsprechendem Strahle erzeugt werden. —

Eine andere bemerkenswerthe Ausartung tritt ein, *wenn die 4 Ebenen des Grundtetraeders durch denselben Punkt gehen. Alle Strahlen, welche von 4 solchen Ebenen in einem Punktwurfe von gegebenem Doppelverhältnisse geschnitten werden, sind ersichtlich Tangenten eines gewissen Kegels 2. Grades, welcher die 4 Ebenen berührt, und alle Tangenten desselben haben diese Eigenschaft.*

Nun ist die Concurrenz von 4 Ebenen eine einfache Bedingung; also sollte man ∞^{12} derartige tetraedrale Complexe erwarten. Aber es giebt nur ∞^8 Kegel 2. Grades. Der Tangenten-Complex aber jedes Kegels 2. Grades kann auf ∞^4 Weisen als tetraedraler Complex aufgefasst werden, indem man beliebige 4 von seinen Berührungsebenen als Tetraeder-Ebenen nimmt.

Die ∞^2 Collineationen, welche einen solchen Complex erzeugen, sind alle in Projectivitäten zwischen 2 Strahlenbüscheln aus dem Scheitel des Kegels in zwei beliebigen Tangentialebenen desselben ausgeartet.

Und umgekehrt, jede zwei projective Strahlenbüschel mit gemeinsamem Scheitel bringen einen in der beschriebenen Weise ausgearteten tetraedralen Complex hervor.

Fallen die 4 Ecken des Grundtetraeders in eine Ebene, so ergiebt sich der Complex der Treffgeraden eines Kegelschnitts.

Dabei sind die 4 Punkte getrennt von einander angenommen. Nehmen wir aber bei der Erzeugung des Complexes vermittelst eines Bündels A und eines Feldes α, die zu einander collinear sind, an, dass A in α liegt; er muss sich dann mit einer der 3 in α gelegenen Ecken B, C, D des Tetraeders, d. h. mit einem der Punkte von α, durch welche ihre entsprechenden Strahlen im Bündel A gehen, vereinigen, etwa mit B. *Es haben sich 2 Ecken des Tetraeders vereinigt, jedoch so, dass die Verbindungslinie bestimmt ist.* Da jeder Strahl von (A, β) mit dem entsprechenden von (B, α) zusammenfällt, so *besteht der Complex aus ∞^1 Strahlennetzen, deren Leitgeraden sich je in einem Strahle von (B, α) vereinigt haben.* Die zur endgiltigen Festlegung eines solchen Strahlennetzes erforderliche Projectivität (Nr. 58) zwischen der Punktreihe auf der Leitgeraden und dem Ebenenbüschel um sie wird durch die Collineation geliefert, indem jede Ebene des Büschels demjenigen Punkte der Reihe entspricht, dessen in der Collineation entsprechenden Strahl sie enthält.

In zwei Strahlengebüsche zerfällt der tetraedrale Complex, wenn bei beliebigem Tetraeder das Doppelverhältniss einen der Werthe 0 oder 1 oder ∞ hat; wenn die projectiven Büschel, die ihn erzeugen, in ausgearteter Projectivität sich befinden, mit einem singulären Strahle in jedem; wenn die Collineation zwischen einem Felde und einem Bündel, durch die er entsteht, so ausartet, dass jedes der beiden Gebilde einen singulären Strahl besitzt und einem beliebigen Punkte des Feldes der singuläre Strahl des Bündels, einem Punkte aber der singulären Geraden des Feldes jeder beliebige Strahl in einer gewissen Ebene durch den singulären Strahl des Bündels correspondirt.*) Endlich führt zu einem so zerfallenden Complexe auch eine Collineation, welche eine sich Punkt für Punkt entsprechende Punktreihe und einen Büschel von lauter sich selbst entsprechenden Ebenen besitzt (Nr. 241): das Haupttetraeder ist in diesem Falle unbestimmt; fest sind nur 2 Gegenkanten desselben und zwei Ecken auf der einen, zwei Ebenen durch die andere.

Hierunter fallen, wie wir wissen, auch die Collineationen mit Axen und als noch speciellerer Fall die windschiefen Involutionen. —

*) Man erhält diese Ausartung, wenn man von den beiden Feldern σ, σ' in ausgearteter Collineation, die in Nr. 265 betrachtet wurden, das Feld σ' in einen Bündel projicirt.

Bei einer Homologie ist jeder Strahl im Raume Verbindungslinie oder Schnittlinie entsprechender und vereinigter Punkte, bezw. Ebenen, weil es deren ∞^2 giebt.

IV.

Die Reye'sche Erzeugung des tetraedralen Complexes T *vermittelst zweier collinearer Räume* Σ *und* Σ' *führt unmittelbar zu einer eindeutigen Abbildung desselben in den Punkt- oder Ebenenraum.* 278

Jedem Strahle des Complexes entspricht in dieser Abbildung derjenige Punkt des einen der beiden Räume, etwa des Raumes Σ, *den er mit seinem entsprechenden in* Σ' *verbindet, oder diejenige Ebene von* Σ, *welche sich in ihm mit ihrer homologen in* Σ' *schneidet.*

Dass jedem Elemente (Punkt oder Ebene) von Σ, das sich nicht selbst entspricht, nur ein Strahl von T correspondirt, ist sofort ersichtlich. Aber auch umgekehrt, wenn ein Strahl von T Verbindungs- oder Schnittlinie von mehr als einem Paare entsprechender Elemente ist, so ist er sich selbst entsprechend, also eine Kante des Haupttetraeders T; einem beliebigen Strahle von T entspricht nur ein Punkt, bezw. eine Ebene.

Die in Nr. 269 erhaltene eindeutige Abbildung ist hiervon nicht verschieden; denn nehmen wir aus den von Σ verschiedenen Collineationen des Büschels (Σ) eine, etwa Σ', heraus, so ist der dort einem Strahle x des Complexes zugeordnete und auch auf ihm gelegene Punkt P eben der Punkt von Σ', der seinen entsprechenden in Σ ebenfalls auf x hat; also sind nur die Räume vertauscht.

Wir fanden ferner in Nr. 262, 268, 270, dass um alle Strahlen x von T die Büschel

$$x(A, B, C, D, \xi, \xi', \xi'', \ldots),$$

in denen die Ebenen $\xi, \xi', \xi'', \ldots$ den verschiedenen collinearen Räumen $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots$ von (Σ) angehören, sämmtlich unter einander projectiv sind und dass in einem Strahlenbüschel $abcdef\ldots$, in welchem $(abcd)$ gleich dem constanten Doppelverhältnisse λ von T ist, jeder weitere Strahl e einen der collinearen Räume Σ_e ausscheidet und so dem Complexstrahle x eine durch ihn gehende, dem Σ_e angehörige Ebene ξ_e zuordnet, welche der Projectivität:

$$x(A, B, C, D, \xi_e) \barwedge abcde$$

genügt.

Die durch diese Projectivität bewirkte eindeutige Abbildung des tetraedralen Complexes oder die duale ist also auch von der aus der Reye'schen Erzeugung sich ergebenden nicht verschieden.

Der einer Ebene ξ_e zugehörige Complexstrahl x ist, wenn E ein beliebiger Punkt in dieser Ebene ist, die nicht durch ihn gehende in ξ_e gelegene Sehne derjenigen cubischen Raumcurve r_1 von T, deren Sehnen nach den Punkten A, B, C, D, E Ebenenbüschel senden, welche zu $abcde$ projectiv sind (Nr. 270). Wird der Punkt E in ξ_e verschoben, so ändert sich wohl die cubische Raumcurve, aber nicht die genannte Sehne, weil diese die Projectivitäts-Eigenschaft auch in Bezug auf die neue Lage von E erfüllt.

Dreht man hingegen ξ_e um den festen Punkt E, so bleibt die Curve r_1 fest und die Strahlen, welche den Ebenen des Bündels E entsprechen, erfüllen ihre Sehnen-Congruenz; die Ebenen ξ_f durch jeden, die nun in der Projectivität dem Strahle f des Büschels correspondiren, gehen alle durch den Punkt F auf r_1, der in der Projectivität der Curven-Punktreihe und des Strahlenbüschels:

$$ABCDE \barwedge abcde,$$

(welche ja eine Folge der Projectivität der verschiedenen Ebenenbüschel um die Sehnen von r_1 ist) dem f entspricht. Also bewegen sich ξ_e und ξ_f gleichzeitig in Bündeln und demnach collinear durch den Raum, wie ja auch nothwendig.

Eine einfachere Construction des jeder Ebene ξ_e zugehörigen Strahles x ist folgende:

Man schneidet die Ebene ξ_e mit ABC in der Geraden e' und diese mit AB in E', construirt ferner auf AB den Punkt C', so dass $ABC'E' \barwedge abce$; wenn dann X der Schnitt von CC' mit e' ist, so ist $X(A, B, C, e') \barwedge abce$. Construirt man nun im Büschel X den Strahl d', welcher d entspricht, so schneidet die Ebene Dd' in ξ_e den gesuchten Strahl x ein.

279 *Man kann* bei der aus der Reye'schen Erzeugung sich ergebenden Abbildung *den Raum Σ durch einen zu ihm collinearen Σ_1 ersetzen;* es wird dann nur die unwesentliche Incidenz entsprechender Elemente aufgegeben, während die wesentlichen Eigenschaften der Abbildung erhalten bleiben.

Von dieser Art ist, wie dies schon Bertini*) bemerkt hat, die Weiler'sche Abbildung des tetraedralen Complexes.**)

Es seien wieder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ die Schnitte eines Strahles x des

*) Transunti dell' Accademia dei Lincei Ser. III Bd. 4 (1879) in dem Aufsatze über die Congruenz 2. Ordnung 6. Klasse 1. Art.

**) Weiler, Zeitschrift für Mathematik Bd. 22 (1877) S. 261.

Complexes mit den 4 Ebenen des Tetraeders, B' der Schnitt $(CD, B\mathfrak{A})$ und A' auf CD so gelegen, dass $(A'B'CD) = \lambda$, ähnlich wie in Nr. 253; weshalb A' auf $A\mathfrak{B}$ liegt. Die beiden Geraden x und $A\mathfrak{B}A'$ liegen in einer Ebene und also auch $A\mathfrak{A}$ und $A'\mathfrak{C}$. Den Schnitt X_1 dieser letzteren nimmt Weiler als Bild des Complexstrahles x. Wenn X_1 gegeben ist, so liefert AX_1 auf der Tetraederebene α den Punkt $\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{A}$ dann auf CD den Punkt B', das Doppelverhältniss λ den A', endlich X_1A' auf γ den Spurpunkt $\mathfrak{C}$, und x ist $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$. Damit ist diese Abbildung als eindeutig erkannt.

Betrachten wir aber T als Erzeugniss der Verbindungslinien $x \equiv XX'$ entsprechender Punkte collinearer Räume Σ und Σ' und demnach X als Bildpunkt von x; so wollen wir nun beweisen, dass X und X_1 gleichzeitig gerade Linien durchlaufen, womit dann die Collineation der Räume (X) und (X_1) nachgewiesen ist.

Wenn X eine Gerade durchläuft, so beschreibt $x \equiv XX'$ eine Regelschaar P_2, welche in jeder der 4 Tetraederebenen eine Gerade, also auch eine Leitgerade hat. Diejenigen Leitgeraden, die in α und γ liegen, seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$. Die Punktreihen der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ auf ihnen sind zu der Punktreihe der X projectiv; ferner bewegen sich B' und A' in zu ihnen projectiven Punktreihen; also beschreibt $\mathfrak{C}A'$ eine Regelschaar ϱ; und da $A\mathfrak{A}$ die Ebene $A\mathfrak{a}$ durchstreicht, so haben wir in der Spurcurve der ϱ in dieser Ebene den Ort von X_1. Da aber $\mathfrak{a}$ eine Leitgerade von P_2 ist, so fällt eine Erzeugende dieser Regelschaar in $A\mathfrak{a}$, und mit ihr die Spurpunkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und der auf $A\mathfrak{B}$ liegende Punkt A', folglich eine Erzeugende von ϱ; demnach befinden sich die Spuren, in $A\mathfrak{a}$, der Geraden von ϱ auf einer Leitgeraden dieser Regelschaar.

Wir halten uns deshalb, behufs genauerer Beschreibung der Ab- 280
bildung, an die ursprüngliche Form derselben, so wie sie sich unmittelbar aus der Reye'schen Erzeugung ergiebt, und zwar wollen wir *die Abbildung in den Ebenenraum* bevorzugen.

Jedem Kegel des tetraedralen Complexes T *entspricht ein Ebenenbüschel um einen Complexstrahl;* in der That, wird die Spitze des Kegels als Punkt von Σ' mit X' bezeichnet, so ist XX' die Axe dieses Büschels, denn seine Ebenen schneiden sich mit den homologen im entsprechenden Büschel, dessen Axe auch durch X' geht, in den Kanten des Complexkegels.

Umgekehrt, jedem Ebenenbüschel in Σ *um einen Strahl von* T, d. h. um einen Strahl von Σ, der seinen entsprechenden in Σ' schneidet, *correspondirt in* T *ein Kegel.*

Einem beliebigen Ebenenbüschel von Σ entspricht in T eine Regelschaar P_1.

Zwei Strahlen von T *schneiden sich, wenn ihre entsprechenden Ebenen einen Complexstrahl gemeinsam haben.* Der Schnittpunkt ist derjenige Punkt dieses Strahles, der, als Punkt von Σ', durch ihn mit seinem homologen Punkte in Σ verbunden wird.

Eine Complexcurve von T *bildet sich in eine abwickelbare Fläche 3. Klasse ab;* denn die beiden collinearen Bündel um einen beliebigen Punkt X von Σ und seinen entsprechenden in Σ' erzeugen eine Sehnen-Congruenz $[r_1]$; die 3 Strahlen derselben, welche in die Ebene der Complexcurve fallen, beweisen, dass es durch X 3 Ebenen in Σ giebt, die mit ihren entsprechenden sich auf der Ebene, also in Tangenten der Complexcurve schneiden.

Dieser Torsus 3. Klasse ist übrigens, wenn wir die Ebene, als zu Σ' gehörend, mit $\mathfrak{x}'$ bezeichnen, derjenige, dessen Ebenen entsprechende und sich schneidende Geraden der beiden collinearen Felder $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ verbinden, also ein r_2 (Nr. 262).

Wir haben in T dreierlei Strahlenbüschel (Nr. 256).

Allen Strahlen eines Büschels, der sich in einer Ebene des Tetraeders T befindet, entspricht in Σ diese Ebene.

Damit haben wir *eine Ausnahme von der eindeutigen Abbildung: jede der 4 Tetraeder-Ebenen entspricht allen in ihr gelegenen Strahlen von* T.

Einem Strahlenbüschel, dessen Scheitel in einer Ecke von T liegt, entspricht in Σ ein Kegel 2. Klasse aus der nämlichen Ecke, der von den Ebenen eingehüllt wird, welche entsprechende Strahlen des Büschels, insofern er zu Σ' gehört, und seines homologen in Σ verbinden; er berührt die 3 Tetraederebenen aus der Ecke und die Ebene des Strahlenbüschels.

Umgekehrt, jedem Kegel 2. Klasse aus einer Ecke von T, welcher die in ihr zusammenstossenden Tetraederebenen tangirt, als Gebilde von Σ entspricht in T der Strahlenbüschel aus der Ecke, der sich in der vierten Berührungsebene befindet, welche der Kegel mit seinem in Σ' correspondirenden Kegel gemein hat.

Nimmt ein T-Strahlenbüschel aus A eine Kante, etwa $\gamma\delta$, in sich auf, so zerfällt der Kegel 2. Klasse in den Ebenenbüschel um diese Kante und einen zweiten, das eigentliche entsprechende Gebilde, dessen Axe in β liegt. Denn *die Kanten des Tetraeders haben alle durch sie gehenden Ebenen zu entsprechenden in Σ, und so ergiebt sich die zweite Ausnahme von der Eindeutigkeit.*

Ein Strahlenbüschel des Complexes von der dritten und wichtigsten

Art, *der seinen Scheitel in einer Ebene von T, etwa in α, hat und seine Ebene durch die Gegenecke A schickt, hat zum Bilde in Σ einen Ebenenbüschel, dessen Axe in α liegt* und den Scheitel des Strahlenbüschels, als Punkt von Σ', mit seinem entsprechenden Punkte in Σ verbindet. Der gegebene Strahlenbüschel nämlich, als Gebilde von Σ', und sein entsprechender in Σ haben durchweg sich schneidende homologe Strahlen; weil sie dem Complexe angehören (Nr. 260). Die entsprechenden Strahlen führen also durch ihre Verbindungsebenen zu einem Ebenenbüschel, der mit beiden Strahlenbüscheln perspectiv und das Bild des gegebenen Strahlenbüschels ist.

Umgekehrt wiederum, einem Ebenenbüschel von Σ, dessen Axe in einer Ebene α von T liegt, entspricht in T derjenige Strahlenbüschel, den der Ebenenbüschel mit dem ihm in Σ' entsprechenden und zu ihm — wegen der sich selbst entsprechenden Ebene α — perspectiven erzeugt. Der Scheitel dieses Strahlenbüschels liegt in α im Schnittpunkte der beiden Axen; da in den beiden Ebenenbüscheln zwei homologe Ebenen durch A gehen, so thut es auch ein Strahl des Strahlenbüschels und dessen Ebene.

Einer im tetraedralen Complexe befindlichen Congruenz m^{ter} Ordnung 281
entspricht in Σ eine Fläche F m^{ter} Klasse; denn den m Strahlen, die von einem beliebigen Punkte an jene kommen, entsprechen die m Berührungsebenen dieser in dem Ebenenbüschel, der dem Complexkegel aus dem Punkte entspricht.

Die Klasse n der Congruenz ist $\leq 3m$; denn den n Strahlen derselben, die in eine beliebige Ebene fallen, entsprechen ebenso viele gemeinsame Berührungsebenen der Fläche m^{ter} Klasse und des cubischen Torsus, der, in Σ, einer Complexcurve von T correspondirt.

Wenn $n < 3m$ ist, so müssen $3m - n$ von den gemeinsamen Berührungsebenen der Fläche F und des Torsus so beschaffen sein, dass ihnen nicht blos ein Strahl in T entspricht, d. h. sie müssen Ebenen des Tetraeders sein.

Sind mithin φ_α, φ_β, φ_γ, φ_δ die Grade der Vielfachheit der 4 Ebenen des Tetraeders als Berührungsebenen der Fläche F, so hat man:

$$3m - n = \varphi_\alpha + \varphi_\beta + \varphi_\gamma + \varphi_\delta.$$

Daher entspricht einer beliebig zum Tetraeder gelegenen Fläche m^{ter} Klasse im Ebenenraume Σ eine Congruenz m^{ter} Ordnung und $3m^{ter}$ Klasse in T.

Und dual: *Einer beliebig zum Tetraeder gelegenen Fläche m^{ter} Ord-*

nung im Punktraum Σ *entspricht eine Congruenz* m^{ter} *Klasse und* $3m^{\text{ter}}$ *Ordnung in* T.

Die Klasse vermindert sich im ersten Falle, die Ordnung im zweiten Falle um

$$\varphi_\alpha + \varphi_\beta + \varphi_\gamma + \varphi_\delta,$$

wenn die Fläche m^{ter} *Klasse die Ebenen des Tetraeders zu* φ_α-, φ_β-, ... *fachen Berührungsebenen, bezw. die Fläche* m^{ter} *Ordnung die Ecken des Tetraeders zu ebenso vielfachen Punkten hat.*

Die Curve des Complexes T in einer Ebene durch eine Ecke A des Tetraeders besteht aus zwei Strahlenbüscheln, von denen der eine seinen Scheitel in A, der andere auf α hat. Der Ebenenbüschel, der letzterem im Ebenenraume Σ entspricht, hat seine Axe in α und enthält $m - \varphi_\alpha$ von α verschiedene Berührungsebenen der Fläche m^{ter} Klasse F; die diesen entsprechenden Strahlen der Congruenz in unserer Ebene gehen nicht durch A; folglich enthält der erste Büschel

$$n - (m - \varphi_\alpha) = 2m - (\varphi_\beta + \varphi_\gamma + \varphi_\delta)$$

Strahlen, und da dies für jede Ebene durch A gilt, so kommt von der Ecke A ein Kegel von dieser Ordnung an die Congruenz, oder der Punkt ist für sie singulär von diesem Grade (Nr. 136).

Die Ecken A, B, C, D des Tetraeders sind also für die Congruenz in T, *deren Bild die Fläche* m^{ter} *Klasse ist, singulär vom Grade*

$$2m - (\varphi_\beta + \varphi_\gamma + \varphi_\delta),\ 2m - (\varphi_\gamma + \varphi_\delta + \varphi_\alpha),\ \dots$$

Dual: *Hat die Congruenz zum Bilde im Punktraume* Σ *eine Fläche* m^{ter} *Ordnung, welche A, B, ... zu* φ_α-, ... *fachen Punkten hat, so sind die Ebenen des Tetraeders singulär vom genannten Grade,* d. h. enthalten Curven von Congruenzstrahlen von der Klasse

$$2m - (\varphi_\beta + \varphi_\gamma + \varphi_\delta),\ \dots$$

Von den m Strahlen, die von einem Punkte einer Tetraederebene α ausgehen, gehören $m - \varphi_\alpha$ zum Büschel aus ihm, dessen Ebene durch A geht, also φ_α zu dem in die Ebene α fallenden; folglich liegen in der Ebene α ∞^1 Congruenzstrahlen, welche eine Curve von der Klasse φ_α umhüllen.

Die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sind also für die in die Fläche* m^{ter} *Klasse abgebildete Congruenz singulär vom Grade* $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \dots$

Vom nämlichen Grade singulär sind im dualen Falle die Ecken A, B, C, D.

282 Betrachten wir z. B. eins der Strahlennetze in T, welche ihre Leitgeraden in den Büscheln (A, β), (B, α) haben. Es hat in den

Ebenen α, β je einen Strahlenbüschel, also sind diese singulär vom Grade 1 (ebenso die Punkte A, B); wir haben

$$m = n = 1,\ \varphi_\alpha = \varphi_\beta = 1,\ \varphi_\gamma = \varphi_\delta = 0.$$

Das Bild im Ebenenraume ist eine Fläche 1ter Klasse, welche α und β berührt, also ein Ebenenbündel, der seinen Scheitel auf $\alpha\beta$ hat. In der That, ein solcher Bündel in Σ erzeugt ja mit seinem entsprechenden in Σ', der seinen Scheitel ebenfalls auf $\alpha\beta$ hat, weil dieser Verbindungsstrahl der Scheitel sich selbst entspricht, ein Strahlennetz (Nr. 79).

Das Bild unseres Strahlennetzes im Punktraume Σ ist ein durch AB gehendes Punktfeld, das mit seinem entsprechenden in Σ' ebenfalls ein Strahlennetz hervorbringt.

Für eine Sehnen-Congruenz $[r_1]$ von T sind die Ebenen des Tetraeders nicht singulär; jede enthält nur 3 Sehnen: die 3 Kanten; also haben wir $m = 1$, $n = 3$, alle $\varphi_\alpha, \ldots = 0$. Im Ebenenraume Σ entspricht ein Ebenenbündel mit beliebig gelegenem Scheitel, der ja auch mit seinem entsprechenden in Σ' die $[r_1]$ erzeugt.

Für $[r_1]$, deren Curve r_1 durch alle 4 Ecken des Tetraeders geht, sind diese Punkte singulär vom 2. Grade, indem durch jeden ein Kegel 2. Ordnung zur Congruenz geht. In der That haben alle 4 Zahlen $2m - (\varphi_\beta + \varphi_\gamma + \varphi_\delta), \ldots$ den Werth 2.

Wird aber $[r_1]$ in den Punktraum abgebildet, so haben wir: $m = 3$, $n = 1$ und alle vier φ gleich 2.

Das Bild der Congruenz ist eine Fläche 3. Ordnung mit Doppelpunkten in den 4 Tetraeder-Ecken.

Zwei Flächen 2. Grades F und F' seien collinear, d. h. entsprechend 283
in zwei collinearen Räumen; dann sind sowohl *die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf ihnen*, als auch *die Schnittlinien entsprechender Berührungsebenen von ihnen* in dem tetraedralen Complexe enthalten, der zu den beiden Räumen gehört.

*Wenn die beiden Flächen in keiner besondern Beziehung zum Tetraeder stehen, so bilden die ersteren Linien, welche sich in die Punkte von F abbilden, eine Congruenz 2. Klasse 6. Ordnung, für welche die 4 Ebenen des Tetraeders singulär vom 4. Grade sind, also zur Congruenz gehörige Curven 4. Klasse enthalten; die Schnittlinien aber, die sich in die Berührungsebenen von F abbilden, erzeugen eine Congruenz 2. Ordnung 6. Klasse, für welche die Ecken singulär vom 4. Grade sind, d. h. an die Congruenz Kegel 4. Ordnung senden.**)

*) Reye, Journal f. Mathematik Bd. 93 S. 81; del Re, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo Bd. 1 S. 290.

Wenn F und infolge dessen auch F' etwa die α berührt, so wird die Congruenz der Schnittlinien entsprechender Tangentialebenen 5. Klasse. Wir kommen hierauf genauer bei der späteren Betrachtung der Congruenz (2, 6) zweiter Art zu sprechen. Hier begnügen wir uns, zu erwähnen, dass dann infolge des obigen Satzes *die Ebene* α *für die Congruenz* (2, 5) *singulär vom 1. Grade ist*, also einen Congruenz-Strahlenbüschel enthält.

Wenn F' *mit* F *identisch, also* F *zu sich selbst collinear ist*, so hat man bekanntlich zwei Fälle zu unterscheiden: entweder geht jede der beiden Geradenschaaren in sich selbst über oder in die andere.

Im ersteren Falle, dem einer Hermite'schen Collineation (Nr. 236), mit welcher wir uns hier allein beschäftigen wollen, liegt ein Kantenvierseit des Haupttetraeders auf der Fläche, alle 4 Ebenen desselben berühren die Fläche und die Ecken liegen auf ihr. Also sind beide Congruenzen 2. Ordnung und 2. Klasse, aber, wie wir später sehen werden, noch specieller, als wenn oben F alle 4 Ebenen $\alpha, \ldots$ berührt oder durch alle 4 Punkte $A, \ldots$ geht, ohne Kanten zu enthalten.

Wenn die beiden Flächen 2. Grades F *und* F' *zu einander polar sind in Bezug auf eine dritte Fläche 2. Grades* S; so sind sie auch collinear, derartig, dass je zwei Punkte auf ihnen sich entsprechen, von denen jeder der Berührungspunkt der Polarebene des andern in Bezug auf S ist. Man erhält die Collineation, wenn man mit dem Polarsysteme in Bezug auf S dasjenige in Bezug auf F' oder F verbindet.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf F und F' sind projectiv verallgemeinerte Normalen (Quasinormalen) der einen oder andern Fläche. Denn eine Normale einer Fläche verbindet ihren Fusspunkt mit dem Pole seiner Berührungsebene in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ als ausgeartete Fläche 2. Klasse. Diese ist im Vorangehenden durch die allgemeine Fläche S ersetzt.

Die Congruenz der Normalen einer Fläche 2. Grades ist also 2. Klasse 6. Ordnung. Sie befindet sich im Axen-Complex und hat in den Ebenen des Tetraeders desselben Curven 4. Klasse; die drei in den Hauptebenen der Fläche sind ersichtlich die Evoluten der Hauptschnitte.

Die 6 Normalen, die von einem Punkte O auf eine Fläche 2. Grades herabgelassen werden können, liegen stets auf einem Kegel 2. Grades, dem Kegel des Axen-Complexes.

Ihre Fusspunkte sind gemeinsame Punkte der beiden Fusspunkts-Curven der einen und der andern Schaar der Fläche in Bezug auf O; welche Curven Raumcurven 4. Ordnung 2. Art sind, die den Geraden der zugehörigen Schaar einmal, denen der andern dreimal begegnen

(Nr. 124). Ausserdem haben diese beiden Curven noch die Schnitte der unendlich fernen Curve der Fläche mit dem absoluten Kegelschnitte gemein.

Die Fusspunkte der 2 in eine Ebene fallenden Normalen sind die Schnittpunkte der Ebene mit der Berührungscurve des zur Ebene senkrechten Tangentialcylinders der Fläche.

In Σ sei eine abwickelbare Fläche oder ein Torsus ν^{ter} Klasse t 284
gelegt; sie erzeugt mit dem ihr in Σ' entsprechenden Torsus t', ebenfalls ν^{ter} Klasse, eine Regelfläche $2\nu^{\text{ten}}$ Grades, welche ihr in T correspondirt. Auf einer beliebigen Geraden l rufen die entsprechenden Berührungsebenen eine Correspondenz $[\nu, \nu]$ hervor; durch die Coincidenzpunkte gehen die Erzeugenden der Regelfläche, welche l treffen.

Wenn aber t die Ebene α des Tetraeders zur ψ_α-fachen Berührungsebene hat, so gilt dies auch für t'; α gehört dann ψ_α-fach zum vollen Erzeugniss; der Grad des eigentlichen Erzeugnisses, von dem im Continuum ψ_α Gerade in α hineinfallen, vermindert sich um ψ_α. Also ergiebt sich:

Zwischen der Klasse ν eines Torsus in Σ und dem Grade n der entsprechenden Regelfläche in T *besteht die Beziehung:*

$$2\nu = n + \psi_\alpha + \psi_\beta + \psi_\gamma + \psi_\delta.$$

Darin bedeutet ψ_α den Grad der Vielfachheit der Ebene α als Berührungsebene des Torsus oder die Anzahl der Erzeugenden der Regelfläche, welche in α fallen, und $\psi_\beta, \ldots$ haben ähnliche Bedeutungen für $\beta, \ldots$

Bei der Abbildung von T in den Punktraum ist ν die Ordnung der Curve, in die sich die Regelfläche abbildet, ψ_α der Grad der Vielfachheit des Punktes A auf dieser Curve oder die Zahl der Erzeugenden der Regelfläche, welche durch A gehen.

Eine Regelschaar P_1 in T, das Erzeugniss zweier entsprechender Ebenenbüschel von Σ und Σ', hat natürlich einen Ebenenbüschel zum Bilde in Σ; in der That, alle vier ψ sind 0.

Bei einer Regelschaar P_2 hingegen, welche durch zwei entsprechende Punktreihen erzeugt wird, enthält jede der Tetraederebenen eine Erzeugende, also sind alle vier ψ gleich 1, und $\nu = 3$.

Einer Regelschaar P_2 *entspricht demnach im Ebenenraume Σ ein Torsus 3. Klasse, welcher die 4 Ebenen von* T *berührt.*

Während also die Geraden einer Regelschaar P_2 *Verbindungslinien der homologen Punkte zweier entsprechender Geraden von Σ und Σ' sind, sind sie Schnittlinien der homologen Ebenen zweier entsprechenden Torsen 3. Klasse r_2^*, welche beide die Tetraederebenen berühren.*

Ebenso bilden auf einer Regelschaar P_1 *die Punkte der einzelnen Geraden, für welche, als Punkte von* Σ, *diese Geraden die Verbindungslinien mit den entsprechenden Punkten in* Σ' *sind, eine cubische Raumcurve* r_1^*, *die durch die Ecken von* T *geht.*

Den Geraden des Regelschaar begegnet sie einmal, also denen der Leitschaar zweimal. Unter diesen befinden sich die Axen l, l' der beiden erzeugenden Ebenenbüschel. Mit der Regelschaar, welche durch die Punktreihen auf diesen Axen entsteht, hat P_1 zwei Gerade gemein, weil den Leitschaaren die zwei Geraden l, l' gemein sind. In den Schnitten derselben mit l begegnet die cubische Raumcurve r_1^* der l.

Ingleichen geht bei P_2 durch jede Gerade nur eine Ebene des Torsus 3. Klasse r_2^*, durch jede Gerade der Leitschaar aber zwei.

Weil dieser Torsus durch einen beliebigen Punkt X 3 Ebenen sendet und durch die Bündel X und X' eine Sehnen-Congruenz $[r_1]$ entsteht, so folgt:

Eine Regelschaar P_2 *und eine Sehnen-Congruenz* $[r_1]$, *und ebenso eine Regelschaar* P_1 *und eine Axen-Congruenz* $[r_2]$ *von* T *haben stets 3 Strahlen gemein; während eine* P_1 *und eine* $[r_1]$, *so wie eine* P_2 *und* $[r_2]$ *einen Strahl gemein haben*, wofern nicht P_1 in $[r_1]$, bezw. P_2 in $[r_2]$ liegt.

Jeder der ∞^4 *Regelschaaren* P_1 *ist somit eine cubische Raumcurve* r_1^* *zugeordnet; diese Raumcurven erschöpfen das ganze vierfach unendliche System der cubischen Raumcurven durch die Ecken des Tetraeders.* In der That, jede durch dieselben gehende cubische Raumcurve und ihre entsprechende in Σ' führen — wegen der 4 sich selbst entsprechenden Punkte — zu einer Regelschaar, gebildet durch die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte. Keine von den Erzeugenden fällt in eine der Tetraederebenen, also entspricht dieser Regelschaar im Ebenenraume Σ ein Ebenenbüschel, und sie ist das Erzeugniss desselben und seines entsprechenden in Σ', also eine P_1.

285 *Wir haben zwei verschiedene Systeme 8. Stufe von unicursalen Regelflächen 4. Grades* ϱ^4 *von der Art III* (Nr. 41) *im Complexe* T.

Die einen entsprechen bei der Abbildung in den Ebenenraum Σ den Kegeln 2. Grades k_2 desselben (als Torsen 2. Klasse). An jeden Kegel von Σ und seinen entsprechenden in Σ' kommen aus jeder von den 4 Ecken des T 2 Paare entsprechender Berührungsebenen; also geht die cubische Doppelcurve der ϱ^4 durch die 4 Ecken und weil sie ∞^1 Strahlen des Complexes doppelt trifft, ist sie eine der ∞^3 Curven r_1 von Nr. 254, deren ganze Sehnen-Congruenz $[r_1]$ zu T gehört. Weil jede von diesen Congruenzen ∞^5 Regelflächen 4. Grades enthält (Nr. 41), so gelangt man auch auf diese Weise zu den ∞^{3+5} Regelflächen ϱ^4.

In den Punktraum bilden sich diese ϱ^4, weil sie durch jede der 4 Tetraederecken 2 Erzeugende schicken, in unicursale Raumcurven 6. Ordnung ab, welche durch die Ecken zweimal gehen.

Berührt k_2 eine der Tetraederebenen, so entspricht ihm nur eine cubische Regelfläche ϱ^3, die ihre Doppelgerade durch die Gegenecke sendet, durch die 3 andern nur einfach geht; wir erhalten, bei jeder Ebene und Gegenecke von T, ∞^6 solche Flächen ϱ^3, welche in den Punktraum sich als Raumcurven 4. Ordnung abbilden, die durch eine Ecke zweimal, durch die andern einmal gehen.

Das zweite System von ϱ^4 ergiebt sich dual; sie berühren die Tetraederebenen doppelt und liegen in den Axen-Congruenzen $[r_2]$ des Complexes; bei der Abbildung in den Punktraum haben sie die Kegelschnitte desselben zu Bildern. Geht aber einer von diesen durch eine Ecke des Tetraeders, so entspricht ihm in T eine cubische Regelfläche, welche nur die Gegenebene doppelt, die andern Ebenen von T einfach berührt.

Es sei wieder k_2 ein Kegel 2. Grades des Ebenenraums Σ, ϱ^4 die ihm entsprechende Regelfläche; zwei Erzeugende derselben begegnen sich, wenn ihre entsprechenden Ebenen sich in einem Strahle von T schneiden (Nr. 280). Ist aber t^2 der Kegel von T aus der Spitze von k_2, so führt jede Kante von t^2 zu zwei sich schneidenden Erzeugenden von ϱ^4 und also zu einer doppelten Berührungsebene dieser Fläche.

Wenn t^2 und k_2 die Lage haben, dass es ein und infolge dessen ∞^1 Trieder giebt, welche k_2 um- und t^2 eingeschrieben sind, so erhalten wir ∞^1 Tripel von Erzeugenden der ϱ^4, welche sich gegenseitig schneiden, und zwar in drei verschiedenen Punkten, den Punkten X' nämlich der 3 auf t^2 gelegenen Kanten des Trieders, welche durch diese Kanten mit ihren entsprechenden Punkten X von Σ verbunden werden (Nr. 280); also fallen die 3 Erzeugenden je in eine Ebene und die Fläche ϱ^4 hat eine einfache Leitgerade, welche zugleich Axe eines Büschels dreifacher Berührungsebenen ist, ist also von der Art IV (Nr. 41). Aus jedem Punkte kommen ∞^4 so zu seinem Complexkegel t^2 gelegene Kegel k_2; d. h. *im achtstufigen Systeme von* ϱ^4 *von der ersten Art giebt es* ∞^7 *Flächen, welche, ausser der doppelten cubischen Leitcurve, noch eine einfache Leitgerade haben, und ebenso, dual, im Systeme von der zweiten Art* ∞^7 *mit einer dreifachen Leitgeraden*, also von der Art IX (Nr. 44). Diese haben, bei der Abbildung in den Punktraum, diejenigen Kegelschnitte k^2 zu ihren Bildern, welche je zu dem Complex-Kegelschnitte t_2 in ihrer Ebene so gelegen sind, dass es ∞^1 Dreiecke giebt, welche k^2 ein- und t_2 umgeschrieben sind.

V.

286 Wir wenden uns nun zur Untersuchung *der linearen Transformationen, welche einen tetraedralen Complex in sich selbst überführen.*

Eine *Collineation*, die das thut, muss ersichtlich das Grundtetraeder in sich selbst überführen. Sie transformire also die Permutation $ABCD$ der Ecken in die Permutation $A_1 B_1 C_1 D_1$ derselben; es gehe ferner der Strahl g von T über in den ebenfalls zu T gehörigen Strahl g_1, so ist wegen der Collineation:

$$g(A, B, C, D) \barwedge g_1(A_1, B_1, C_1, D_1);$$

aber weil g und g_1 beide zu T gehören, ist:

$$g(A_1, B_1, C_1, D_1) \barwedge g_1(A_1, B_1, C_1, D_1);$$

also:

$$g(A, B, C, D) \barwedge g(A_1, B_1, C_1, D_1).$$

Folglich kann die Permutation $A_1 B_1 C_1 D_1$ nur eine der folgenden vier sein:

$$ABCD, \quad BADC, \quad CDAB, \quad DCBA.$$

Jede Collineation, welche die 4 Ecken A, B, C, D des Tetraeders eines tetraedralen Complexes in eine dieser 4 Permutationen überführt, transformirt den Complex in sich selbst, so wie alle, welche mit ihm das Tetraeder gemein haben.

Im ersten Falle geht jede der Ecken in sich selbst über. Also: *Jede der ∞^3 Collineationen, welche das Grundtetraeder des Complexes* T *zum Haupttetraeder haben, führt ihn in sich selbst über.*

Unter diesen Collineationen befinden sich die ∞^2, welche den Complex erzeugen und bei denen einmal und dann durchweg zwei homologe Ebenen sich in einem Strahle von T schneiden, zwei homologe Punkte auf einem solchen Strahle liegen und durch welche jeder Strahl von T in einen ihn schneidenden übergeführt wird.

Jede Collineation transformirt alle tetraedralen Complexe in sich selbst, die zu ihrem Haupttetraeder gehören.

Die 3 andern Fälle sind nicht wesentlich verschieden; es genügt, den ersten zu betrachten, in ihm entsprechen sich A und B, C und D involutorisch.

Jede Collineation, welche zweimal zwei Ecken (oder zwei Ebenen) des Tetraeders von T *involutorisch vertauscht, transformirt* T *in sich selbst.*

Die Kanten AB und CD entsprechen sich selbst, sind also Gegenkanten des Haupttetraeders der Collineation, und diese ist dadurch charakterisirt, dass die conjectiven Punktreihen auf den genannten Kanten (und die conjectiven Büschel um sie) involutorisch sind.

Da die Ecken A', B', auf AB, C', D', auf CD, des Haupttetraeders $A'B'C'D'$ der Collineation die Doppelpunkte dieser Involutionen sind, so sind die beiden Invarianten $\lambda_{\alpha'\beta'}$ und $\lambda_{\gamma'\delta'}$ gleich -1. Mithin ist, wenn X, X_1 zwei entsprechende Punkte und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ die Schnitte von XX_1 mit den Ebenen von $A'B'C'D'$ sind, sowohl:

$$(XX_1\mathfrak{A}'\mathfrak{B}') = (XX_1\mathfrak{D}'\mathfrak{C}'),$$

als auch:

$$(XX_1\mathfrak{A}'\mathfrak{B}') = (XX_1\mathfrak{C}'\mathfrak{D}').$$

Hieraus folgt (Nr. 261), dass sowohl alle Flächen 2$^{\text{ten}}$ Grades durch das Kantenvierseit $A'B'C'D'$ des Haupttetraeders der Collineation, als auch alle durch $A'B'D'C'$ in sich selbst transformirt werden, und zwar so, dass je die Geradenschaaren dieser Flächen in sich selbst übergehen.

Auch umgekehrt, *wenn eine Collineation in zwei Weisen eine Hermite'sche ist*, d. h. die Flächen 2. Grades durch zwei Kantenvierseite $A'B'C'D'$, $A'B'D'C'$ ihres Haupttetraeders in sich transformirt, so bestehen die obigen Beziehungen; bei einem beliebigen Strahle XX_1 erfordert dies, dass $(XX_1\mathfrak{A}'\mathfrak{B}')$ und $(XX_1\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$ gleich -1 sind. Also haben wir auf den Kanten $A'B'$, $C'D'$ Involutionen, und wenn nun AB irgend ein Paar der einen, CD irgend ein Paar der andern Involution ist, so *werden* alle ∞^1 tetraedralen Complexe, welche zu $ABCD$ gehören, also *im Ganzen* ∞^3 *tetraedrale Complexe in sich selbst übergeführt.*

Wenn wieder der Complex T mit den Tetraeder $ABCD$ gegeben ist, so sind es für die Collineation 4 dreifache Bedingungen, dass A und B, C und D sich involutorisch entsprechen; es giebt daher ∞^3 Collineationen, die sie erfüllen.

Wir haben also 3 Systeme 3. Stufe von — im allgemeinen nicht involutorischen — Collineationen I, II, III, welche den gegebenen Complex T *in der jetzigen Weise in sich transformiren. Jedes von ihnen enthält* ∞^2 *windschiefe Involutionen*, einen „Bündel von windschiefen Involutionen"; wir erhalten im ersten eine solche, wenn man zwei Geraden u, v zu Axen wählt, welche AB und CD schneiden und zwar harmonisch zu A, B, bezw. C, D.

Die drei dreifach unendlichen Systeme I, II, III von Collineationen stehen ersichtlich in der gegenseitigen Beziehung, dass das Product zweier aus verschiedenen Systemen stets eine Collineation aus dem dritten Systeme ist.

Wenn u_1, v_1 die Axen einer windschiefen Involution aus I sind, so gehören u_1, v_1, AC, BD zu einer Regelschaar, weil sie AB, CD

harmonisch schneiden; in der Leitschaar seien u_2, v_2 harmonisch zu AB, CD gewählt, wir nehmen sie als Axen einer windschiefen Involution aus II; vervollständigen wir das aus u_1, v_1, u_2, v_2 gebildete Vierseit zum Tetraeder, so sind die letzten Gegenkanten u_3, v_3 Axen einer Involution, die das Product der beiden ersteren ist (Nr. 182) und also dem Systeme III angehört.

Somit kann man jeder der ∞^2 *windschiefen Involutionen aus I* ∞^1 *windschiefe Involutionen aus II so zuordnen, dass ihr Product eine windschiefe Involution aus III ist. Die drei Axenpaare bilden ein Tetraeder,* und das Product aller drei Transformationen ist die Identität.

287 Soll eine *Correlation* den tetraedralen Complex T in sich selbst transformiren, so muss sie die 4 Ecken A, B, C, D des Grundtetraeders in eine solche Permutation $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1$ der 4 Ebenen überführen, dass:

$$g(A, B, C, D) = g_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) = g(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) = g(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Also muss wiederum $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ eine der 4 Permutationen:

$$\alpha\beta\gamma\delta, \quad \beta\alpha\delta\gamma, \quad \gamma\delta\alpha\beta, \quad \delta\gamma\beta\alpha$$

sein.

Und umgekehrt, jede Correlation, die eine solche Ueberführung bewirkt, transformirt T und alle andern tetraedralen Complexe mit dem nämlichen Tetraeder in sich.

Im ersten Falle ist, weil jede Ecke von T der Gegenebene entspricht, die Correlation ein Polarsystem.*)

Jedes der ∞^3 *Polarsysteme, welche das Grundtetraeder von* T *zum Polartetraeder haben, transformirt* T *in sich selbst.*

Wenn aber durch die Correlation A, B, C, D in β, α, δ, γ übergehen, so entspricht jede der Geraden $AC \equiv \beta\delta$, CB, BD, DA sich selbst, AB aber und CD entsprechen sich gegenseitig in beiderlei Sinne. Mithin ist das Kantenvierseit $ACBD$ das Hauptvierseit der Correlation.

Jede von den erwähnten Polarsystemen verschiedene Correlation, welche den Complex T *in sich selbst überführt, hat ein Kantenvierseit seines Grundtetraeders zum Hauptvierseit; und umgekehrt.*

Denn wenn $ACBD$ Hauptvierseit einer Correlation ist, so führt dieselbe die Punkte A, B, C, D in die Ebenen $\beta \equiv CAD$, $\alpha = CBD$, δ, γ über, also auch jeden tetraedralen Complex, der $ABCD$ zum Grundtetraeder hat, in sich selbst.

*) Reye, Geometrie der Lage, II S. 66.

Indem jeder Ecke des Vierseits die zugehörige Winkel-Ebene als Polarebene zugeordnet wird, werden der Correlation 4 dreifache Bedingungen auferlegt.

Es ergeben sich daher 3 Systeme 3. Stufe I′, II′, III′ von Correlationen, die auf die jetzige Weise den tetraedralen Complex T *in sich transformiren.*

Während aber die Collineationen I, II, III durch das Vorhandensein von 2 Paaren von sich involutorisch entsprechenden Punkten (und Ebenen) particularisirt sind, sind diese Correlationen I′, II′, III′ allgemein.

Es erhellt sofort, dass die einen aus den andern sich ergeben, wenn in Bezug auf eins der obigen Polarsysteme polarisirt wird.

Das Product zweier Correlationen aus verschiedenen Systemen, etwa aus I′ und II′, ist eine Collineation III, dasjenige einer Collineation I und einer Correlation II′ eine Correlation III′.

Unter den ∞^3 Correlationen I′, II′, III′ befinden sich aber auch noch Polarsysteme, sowie Nullsysteme.

Das Polarsystem jeder Fläche 2. Grades, welche durch eins der drei Kantenvierseite des Tetraeders T geht, transformirt T *in sich. Solcher, von den obigen Polarsystemen wesentlich verschiedener, Polarsysteme haben wir in jedem der 3 Systeme* ∞^1.

Wenn ferner die 4 Seiten eines Kantenvierseits in einem Null- 288
systeme sich selbst entsprechen, so sind sie Leitstrahlen desselben oder im zugehörigen Strahlengewinde enthalten. Das Vierseit bestimmt ein Strahlennetz, dessen Leitgerade die beiden übrigen Kanten von T sind.

Jedes der 3 Kantenvierseite des Tetraeders von T *führt zu einem Büschel von Nullsystemen, welche den* T *in sich selbst transformiren.*

Durch die Verbindung zweier Nullsysteme ergiebt sich, wie wir wissen, eine Collineation mit Axen, in welcher zwei Punkte einander entsprechen, welche in den beiden Nullsystemen Nullpunkte der nämlichen Ebene sind, und deren Axen die Leitgeraden des Strahlennetzes sind, welches den beiden zugehörigen Gewinden gemeinsam ist (Nr. 102).

Wir verbinden zwei Nullsysteme $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ aus den Büscheln I′ und II′, denen die Gewinde Γ_1, Γ_2 zugehören.

Weil den Ebenen α, β, γ, δ in $\mathfrak{N}_1$ die Punkte B, A, D, C, in $\mathfrak{N}_2$ die Punkte C, D, A, B entsprechen, so correspondiren in der Collineation mit Axen, welche das Product der beiden Nullsysteme ist, den Punkten A, B, C, D die Punkte D, C, B, A; folglich gehört sie zum Systeme III, in dessen Collineationen sich A, D und B, C involutorisch entsprechen. In einer Collineation mit Axen aber giebt es entweder kein Paar sich involutorisch entsprechender Punkte, oder alle Paare sind involutorisch und es liegt eine windschiefe Involution vor.

Combinirt man also zwei Nullsysteme aus verschiedenen Büscheln, etwa aus I', II', so ergiebt sich eine windschiefe Involution aus dem Bündel III.

Man ersieht auch, wie aus der einfachen Unendlichkeit der einen Systeme die doppelte der andern folgt.

Weil $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ zum Producte eine windschiefe Involution haben, so stützen sich Γ_1 und Γ_2 auf einander.

Die 3 Büschel von Gewinden, welche zu den Nullsystemen gehören, haben also die Eigenschaft, dass je zwei Gewinde aus verschiedenen Büscheln in Involution sind.

3 Gewinde Γ_1, Γ_2, Γ_3, die bezw. zu den 3 Büscheln gehören, führen demnach zu einer solchen Gruppe von 8 Transformationen, wie wir sie in Nr. 178 betrachtet haben: 3 Nullsysteme, 3 windschiefe Involutionen, 1 Polarsystem, die Identität, welche alle den tetraedralen Complex T *in sich selbst transformiren.*

In dem Polarsysteme entspricht (Nr. 178) einem Punkte die Ebene, welche die ihm in den drei windschiefen Involutionen correspondirenden Punkte verbindet. Da aber dem A die 3 Punkte B, C, D entsprechen, so ist α die Polarebene von A. *Folglich gehört das Polarsystem unserer Gruppe zu den ∞^3 Polarsystemen, welche das Grundtetraeder von* T *zum Polartetraeder habe.*

Und die dreifache Unendlichkeit dieser Polarsysteme erhellt auch sofort: jedes von ihnen gehört zu einem Tripel von Nullsystemen, die aus verschiedenen Büscheln genommen sind.

Die 3 windschiefen Involutionen unserer Gruppe bilden für sich (mit der Identität) einen Cyklus, indem jede das Product der beiden andern und das Product aller 3 die Identität ist.

Aber dieser Cyklus ist von dem in Nr. 286 erhaltenen verschieden; hier gehören die 6 Axen zu derselben Regelschaar, der Leitschaar derjenigen Regelschaar, welche den 3 Gewinden gemeinsam ist; dort bildeten sie die Kanten eines Tetraeders.*)

*) Vergl. Lie, Göttinger Nachrichten für 1870 S. 53; Ameseder, Wiener Sitzungsberichte Mai 1888.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Nachträgliche Zusätze.

Bei *der zweiten Abbildung des Gewinde-Raums* in Nr. 227 haben wir noch die Eigenschaft anzugeben, durch welche die Kegelschnitte K_1^2 gekennzeichnet werden, in die sich die Strahlengebüsche abbilden. Jeder von ihnen besitzt ∞^1 Polardreiecke, welche zugleich Tangentendreiecke von C_1^2 sind; also ist C_1^2 dem K_1^2 harmonisch ein- und daher K_1^2 dem C_1^2 harmonisch umgeschrieben oder nach Reye's Ausdrucke (Geometrie der Lage, Abth. I 3. Auflage S. 225): K_1^2 stützt C_1^2.

Die ∞^4 Strahlengebüsche bilden sich folglich ab in die ∞^4 Kegelschnitte, welche den Kegelschnitt C_1^2 stützen.

Jede Schaar enthält, wie bekannt, 2, welche den Gebüschen des der Schaar entsprechenden Büschels von Gewinden correspondiren.

Eine solche Ausartung des tetraedralen Complexes, wie sie im zweiten Absatze auf S. 366 beschrieben ist, *wird durch die Lothe gebildet, welche auf den Ebenen des Raums je im Nullpunkte in Bezug auf ein gegebenes Nullsystem $\mathfrak{N}$ (oder Gewinde) errichtet sind.* Das Punktfeld in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ und der Strahlenbündel aus ihrem Nullpunkte $\mathfrak{U}$ erzeugen diesen Complex, wenn in der Collineation zwischen ihnen einem Punkte von $\mathfrak{E}$ die Polare, nach dem Nullsysteme, seiner Polare in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ entspricht.*)

*) Schönflies, Geometrie der Bewegung S. 109; Study, Mathem. Annalen Bd. 39 S. 480.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Wortverzeichniss.

(Die Zahl giebt die Seite an, auf welcher das Wort erklärt oder besprochen wird.)

Absolute Curve: 65.
Absolute Punkte: 364.
Adjungirtes Strahlennetz: 165.
Adjungirt-conjugirtes Strahlennetz: 166.
Associirte Punkte, Ebenen: 66.
Ausartungen einer Regelschaar: 14.
Ausartungen von Collineationen: 348.
Ausartungen eines tetraedralen Complexes: 365.
Axe eines Nullsystems: 65.
Axe eines linearen Complexes oder Strahlengewindes: 88.
Axe eines Strahlengebüsches: 3.
Axe, Axencongruenz einer cubischen Raumcurve: 335.
Axe, Axencomplex einer Fläche 2. Grades: 362.
Axen, Collineation mit: 115.
Axen einer windschiefen Involution: 70.

Brennpunkte, Brennebenen des Hauptstrahls eines Strahlennetzes: 154.
Bündelgrad einer Congruenz: 7.
Büschel collinearer Räume: 355.
Büschel von Gewinden: 136.

Cayley'sche Regelfläche 3. Grades: 52.
Centralcomplexe eines Büschels von Gewinden: 153.
Centralebene eines Strahlennetzes: 152.
Charakteristiken eines höheren Nullsystems: 78.
Charakteristiken eines einstufigen Kegelschnitt-Systems: 24.
Charakteristiken eines einstufigen Systems von Flächen 2. Grades: 26.
Charakteristiken mehrstufiger Systeme von Flächen 2. Grades: 253, 305, 347.
Charakteristische Curve eines Strahlennetzes: 166.
Chasles'sche Erzeugung des Strahlengewindes: 102.
Chasles' Correspondenz-Princip: 17.
Coincidenz-Punkte oder -Elemente oder kurz Coincidenzen: 17, 39, 40.
Collineation mit Axen: 115.
Complex: 6.
Congruenz: 6.
Congruenz (m, n): 41.
Conjugirtes Strahlennetz: 165.
Correlation: 62.
Correspondenz $[n, n_1]$: 16.
Correspondenz-Princip von Chasles: 17.
Correspondenz-Princip für das Punktfeld und zu ihm collineare Gebilde: 39.
Correspondenz-Princip für den Punktraum und zu ihm collineare Gebilde: 40.
Correspondenz-Princip im Strahlenraume: 44.
Correspondenz-Princip im Strahlennetze: 129.
Correspondenz-Princip im Strahlengewinde: 268.
Cuspidalpunkte einer Regelfläche: 49.
Cylindroid: 150.
Cyklische involutorische Correspondenz: 35.

Dichtigkeitsmass in einem Punkte des Hauptstrahls eines Strahlennetzes: 160.
Directionscurve einer von einem Kegelschnitte getragenen Correspondenz: 20.
Doppel-Involution: 36.
Doppel-Punkte oder -Elemente einer Correspondenz: 17.
Doppelstrahl eines Complexes: 214.
Doppelverhältniss von 4 Gewinden eines Büschels: 142.
Dreh-Regelschaar: 300.
Durchmesser eines Nullsystems: 65.
Durchmesser eines linearen Complexes oder Gewindes: 87.

Ebene 𝔈: 65.
elliptische windschiefe Involution: 123.
Entfernung zwischen Gewinden und linearen Systemen von Gewinden: 233.

Feldgrad einer Congruenz: 7.
Fussgewinde: 228.

Gebüsche = Strahlengebüsche: 3, 86.
Gebüsche von Gewinden: 186.
Gebüsche von Gewinden mit Grund-Strahlenbüschel: 194.
Gewebe von Gewinden: 197.
Gewebe von Gewinden mit Grundstrahl: 198.
Gewinde = Strahlengewinde: 94.
Grad eines Complexes: 8.
Grad einer in sich dualen Congruenz: 8.
Grad einer Regelfläche: 7.
Grenzaxen eines Büschels von Gewinden: 151.
Grenzpunkte des Hauptstrahls eines Strahlennetzes: 151.
Grundbedingungen für eine Regelschaar eines Gewindes: 301.
Grundgerade eines Gebüsches von Gewinden: 193.
Grund-Regelschaar eines Netzes von Gewinden: 178.
Grund-Strahlennetz eines Büschels von Gewinden 178.
Grundtetraeder eines tetraedralen Complexes: 334.

Harmonisch umgeschriebener Kegelschnitt: 296.
Hauptcurve bei einer Abbildung: 262.
Hauptebenen des Hauptstrahles eines Strahlennetzes: 152.
Hauptparameter eines Gewindes: 98.
Hauptstrahl eines Strahlennetzes: 150.
Hauptstrahl bei einer Abbildung: 261.
Haupttetraeder einer räumlichen Collineation: 307.
Hauptvierseit einer räumlichen Correlation: 307.
Hermite'sche Transformation: 310.
Homologie: 318.

Invariante zweier Gewinde: 143.
Involution n^{ten} Grades: 27.
Involution zwischen 2 Gewinden: 141.
Involution zwischen 2 linearen Systemen von Gewinden: 181, 193.
Involutions-Paare, -Tripel, . . . von Gewinden: 182, 234.
Involutorische Correlation: 62.
Involutorische Correspondenz $[n]$: 22, 23.
Involutorisch sich entsprechende Elemente einer Correspondenz: 21.

Klasse einer Congruenz: 7.

Leitgerade eines Gebüsches: 3.
Leitgerade (Leitlinien) eines Strahlennetzes: 10.
Leitschaar einer Regelschaar: 5.
Leitstrahlen eines Nullsystems: 64.
Leitstrahlen einer Collineation mit Axen, speciell einer windschiefen Involution: 115.
Linearer Complex: 64, 81.
Linearer Complex von projectiven Ebenenbüscheln: 353.
Lineare Congruenz: 10, 110.
Lineare Congruenz projectiver Ebenenbüschel: 353.
Linksgewundener linearer Complex (Gewinde): 91.

Mehrfache Bedingung: 3.
mehrfach orthogonale lineare Systeme von Gewinden: 225.
Mittelpunkt eines Strahlennetzes: 152.
Möbius'sche Tetraeder: 66.
Modul einer Bedingung: 305.
Modulus eines Polaren-Paares eines Gewindes: 99.
Moment zweier Geraden: 97.
Moment zweier Gewinde: 149.

Nebenaxen eines Büschels von Gewinden: 153.
Netz von Gewinden: 176.
Nullpunkt, Nullebene, Nullstrahlen in Bezug auf ein gemeines Nullsystem: 64.
Nullpunkt, Nullebene in Bezug auf einen linearen Complex (Gewinde): 82.
Nullsystem, gemeines: 62.
Nullsysteme, höhere: 78.

Ordnung einer Congruenz: 7.
Ordnungscurve eines Nullsystems (oder Gewindes): 330.
Orthogonale Gewinde: 223, 225.

Parameter (Hauptparameter) eines linearen Complexes oder Gewindes: 93.
Parameter eines Durchmessers eines Gewindes: 98.
Parameter zweier Geraden: 173.
Perpendiculäre Büschel von Gewinden (kurz: Perpendikel): 226.
Polar-Complexe: 95.
Polaren in Bezug auf ein Nullsystem: 65.
Polaren in Bezug auf einen linearen Complex (Gewinde): 82.
Poncelet'sche Polygone: 33.
Princip der Erhaltung der Anzahl: 7, 125.
Projection eines Gewindes auf ein lineares System von Gewinden: 227.
Product zweier eindeutiger Transformationen: 234.

Regelfläche: 6.
Regelschaar: 5.
Regelschaar (abc), $[abc]$: 73.
Rechtsgewundener linearer Complex (Gewinde): 91.
Reihe collinearer Ebenenbündel: 353.

Scheitel eines Strahlennetzes: 150.
Schmiegungsstrahl: 320.
Schmiegungstetraeder: 356, 360.
Singuläres Tetraeder eines tetraedralen Complexes: 334.
Sinn einer elliptischen Involution: 119.
Strahlengebüsche: 3.
Strahlengewinde: 94.
Strahlennetz: 10, 112.
Strahlennetz mit vereinigten Leitgeraden: 83.
Strahlensystem: 6.
Sich stützende Gewinde: 141.
Sylvester'sche Erzeugung des Strahlengewindes: 104.

Tetraedraler Complex: 333.
Torsallinien einer Regelfläche: 19, 49.
Torsus: 49.
Transformations-Gruppe: 236.
Treffgerade eines Gebüsches: 3.

Verbundene Regelschaaren: 13.
Vereinigte Elemente: 17.
Vertauschbare eindeutige Transformationen: 234.
Verzweigungs-Punkte oder -Elemente: 17.
Vierdimensionaler linearer Raum: 285.
Vollkommen orthogonale lineare Systeme von Gewinden: 225.

Wechselstrahl einer Correlation: 360.
Windschiefe Involution: 70.
Wurf: 20.

Zugeordnete Gewinde oder Punktquadrupel: 326.

Druckfehler.

S. 24 Z. 15 und 18 l. 0 statt O.
S. 30 Z. 7 l. eine solche st. dieselbe.
S. 58 Z. 24 l. jedem st. jeden.
S. 149 vorletzte Z. l. in diesem Kapitel.
Nr. 56 am Ende l. P st. T.
S. 155 Z. 19 l. H_0 st. H_1.
S. 211 Z. 20 l. Kapitel st. Abschnitt.
S. 275 Z. 4 v. u. l. ein st. an.
S. 285 Z. 18 fehlt „ersetzen" hinter „Stufe".
S. 297 Z. 1 der Anm. l. dieser st. diese.
Nr. 269, 270 l. $|\Sigma|$ st. (Σ).

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Anhang: Erweiterungen zu Theil I und Einleitung in die neuere Geometrie. Mit Uebungen. 2. umgearbeitete Auflage. (Mit vielen Holzschnitten im Text und zwei lithograph. Tafeln.) [36 u. 34 S.] gr. 8. 1878. geh. n. *M.* 1.20.

Müller, Dr. **Hubert,** Oberlehrer am Kaiserl. Lyceum in Metz, Zweiter Theil. Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie. [IV u. 111 S.] gr. 8. 1875. geh. n. *M.* 1.60.

——— Leitfaden der Stereometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. In zwei Theilen. Erster Theil: Die Grundgebilde und die einfachsten Körperformen. Mit zahlreichen Holzschnitten und 3 Tafeln. [VIII u. 127 S.] gr. 8. 1877. geh. n. *M.* 2.—

Pasch, Dr. **Moritz,** Professor an der Universität zu Giefsen, Vorlesungen über neuere Geometrie. [IV u. 202 S.] gr. 8. 1882. geh. n. *M.* 4.—

Reye, Dr. **Th.,** ord. Professor an der Universität zu Strassburg, synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme. [VIII u. 93 S.] gr. 8. 1879. geh. n. *M.* 2.40.

Schell, Dr. **Wilhelm,** Geh. Hofrath und Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe, allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Mit Holzschnitten. [106 S.] gr. 8. 1859. geh. n. *M.* 2.40.

Schroeter, Dr. **Heinrich,** Professor der Mathematik an der Universität zu Breslau, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. Nach Jacob Steiner's Prinzipien auf synthetischem Wege abgeleitet. [XVI u. 720 S. mit vielen Figuren im Text.] gr. 8. 1880. geh. n. *M.* 16.—

——— die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. Auf synthetisch-geometrischem Wege abgeleitet. [VIII u. 296 S.] gr. 8. 1888. geh. n. *M.* 8.—

——— Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species. [VI u. 101 S.] gr. 8. 1890. geh. n. *M.* 2.80.

Steiner's, Jacob, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. n. *M.* 20.—

Einzeln:

I. Teil. Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiners bearbeitet von Dr. C. F. Geiser, Professor am Schweizerischen Polytechnikum. Dritte Auflage. Mit 141 Holzschnitten im Text. [VIII u. 208 S.] gr. 8. 1887. geh. n. *M.* 6.—

II. — Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiners bearbeitet von Dr. Heinrich Schroeter, ordentl. Professor a. d. Universität zu Breslau. Zweite Auflage. Mit vielen Holzschnitten. [XVI u. 535 S.] gr. 8. 1876. geh. n. *M.* 14.—

Sturm, Dr. **Rudolf**, ord. Professor am Polytechnikum zu Darmstadt, Elemente der darstellenden Geometrie. Mit 12 lithographierten Tafeln. [VI u. 100 S.] gr. 8. 1874. geh. n. ℳ 4.—

——— synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. [XX u. 388 S.] gr. 8. 1867. geh. n. ℳ 8.—

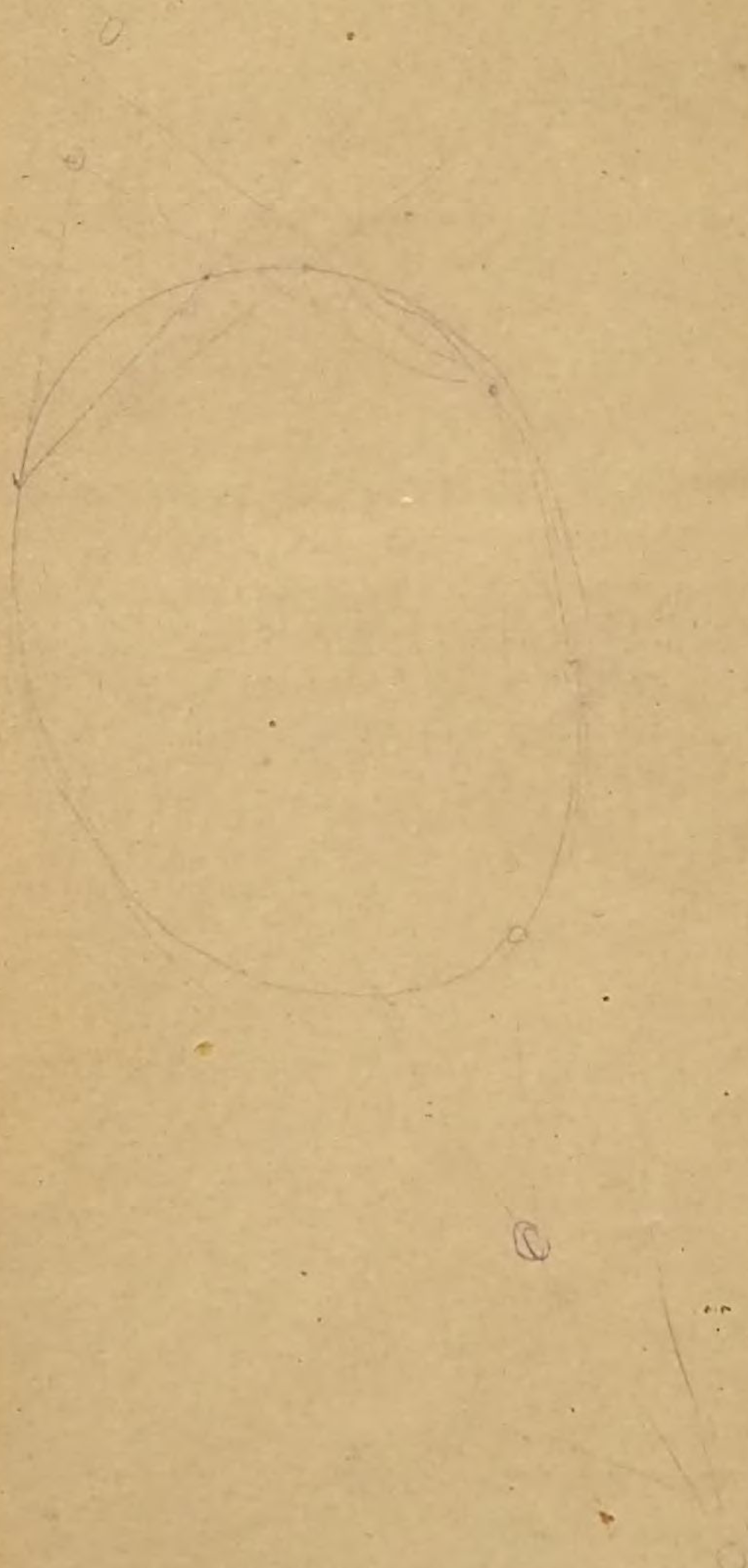
Weyer, Dr. **G. D. E.**, Prof. an der Universität in Kiel, Einführung in die neuere konstruierende Geometrie. Zum Gebrauch für Studierende. Mit 68 in den Text gedruckten Figuren. [VI u. 68 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 1.20.

Weyr, **Emil**, Assistent der Mathematik am deutschen polytechnischen Institut zu Prag, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse. Mit 5 Figurentafeln. [XII u. 156 S.] gr. 8. 1869. geh. n. ℳ 4.—

——— Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung. [VIII u. 175 S.] gr. 8. 1870. geh. n. ℳ 4.—

Wiener, Dr. **Christian**, Geh. Hofrath und Professor an der Grossh. polytechnischen Schule zu Karlsruhe, stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Graden. Mit erl. Texte. [2 phot. Blätter u. 8 S. Text.] qu. 8. 1869. In Kouvert. n. ℳ 2.40.

Witzschel, Dr. **Benjamin**, Grundlinien der neueren Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der metrischen Verhältnisse an Systemen von Punkten in einer Graden und einer Ebene. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [X u. 273 S.] gr. 8. 1857. geh. n. ℳ 6.—



Handbuchbinderei
H. B. Schiedeck 1983

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Sturm, Rudolf,

Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung

Bd.: 1

1892

Math.p. 554 q-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651793-7